

# MathSolver – manual

O que o MathSolver sabe resolver, como introduzir um exercício e como é o resultado.

O MathSolver resolve exercícios a partir de uma fotografia ou escritos à mão e, para cada resultado, mostra a resolução como se faz na escola – passo a passo, com explicações e, quando faz sentido, com um gráfico.

Cada capítulo trata um tipo de exercícios: o que esperar da solução, como introduzir o enunciado e exemplos de resultados reais da aplicação. As limitações conhecidas, se as houver, estão no fim do capítulo.

## Índice

---

1. Como introduzir um exercício
2. Equações e inequações do 1.º grau
3. Equações do 2.º grau
4. Equações de grau superior
5. Equações fracionárias
6. Equações irracionais
7. Equações e inequações exponenciais e logarítmicas
8. Módulo
9. Equações e inequações trigonométricas
10. Inequações e sistemas de inequações
11. Sistemas de equações
12. Equações e inequações com parâmetro
13. Cálculo com expressões
14. Limites
15. Derivadas
16. Estudo de uma função
17. Polinómio de Taylor
18. Integrais indefinidos
  - Primitivas imediatas e substituição
  - Integração por partes

Funções racionais

Funções trigonométricas

Funções hiperbólicas

Raízes

## 19. Integrais definidos e as suas aplicações

Integral definido

Integrais impróprios

Área sob uma curva e entre curvas

Comprimento de uma curva

Volume de um sólido de revolução

Área lateral de um sólido de revolução

Curvas paramétricas e em coordenadas polares

Curvas dadas por uma equação

## 20. Séries infinitas

Séries numéricas

Séries de potências

Série de Taylor

## 21. Séries de Fourier

## 22. Equações diferenciais

## 23. Recorrências e funções geradoras

## 24. Aplicações de equações diferenciais

## 25. Em breve

# Como introduzir um exercício

Pode fotografar o exercício – antes de enviar, recorte a fotografia para ficar só o enunciado. A aplicação reconhece-o e mostra uma pré-visualização; se a transcrição estiver errada, corrija-a no campo por baixo da pré-visualização. No mesmo campo também pode escrever o exercício diretamente.

Se o enunciado for uma expressão sem sinal de igual, escolhe com um chip o que fazer com ela: simplificar, desenvolver, fatorizar, decompor em frações parciais, derivar, fazer o estudo da função, calcular um polinómio de Taylor, integrar, somar uma série ou calcular uma série de Fourier. Ajuste a opção «Foco» do ecrã inicial ao que está a praticar – pré-seleciona o chip adequado.

As equações e inequações são resolvidas diretamente. Quando há mais de um método (o método para um sistema, para módulos, a derivada pela definição), escolhe-o com um chip; o resultado é recalculado de imediato. As equações e inequações são resolvidas nos números reais; com o chip «Resolver em» escolhe em vez disso  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}^+$ . Num limite, um chip escolhe se a indeterminação se resolve transformando ou diretamente pela regra de L'Hôpital.

## Como introduzir

|                                 |                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x^2 + 3x - 4$                  | As potências escrevem-se com ^; a multiplicação por um número ou uma variável pode ser omitida (3x, 2xy).                                                                                                                              |
| $(x+1)/(x-2)$                   | Frações com barra; ponha entre parênteses um numerador ou denominador que não seja um só número ou letra.                                                                                                                              |
| $\sqrt{x+1}$ , $x^{(1/3)}$      | Raiz quadrada sqrt(...), as outras raízes como potência de expoente fracionário.                                                                                                                                                       |
| $ 2x - 1 $                      | Módulo (valor absoluto) entre barras verticais. Se a escrita puder ser lida de mais de uma maneira ( x y z ), a aplicação oferece as leituras para escolher; para a tornar inequívoca, coloque o módulo entre parênteses: 2x( x - 1 ). |
| $\ln x$ , $\log x$ , $\log_2 x$ | ln é o logaritmo natural, log (ou lg) o decimal, log_2 o de base 2.                                                                                                                                                                    |

|                                                      |                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin x, \cos 2x, \tan x, \cot x$                    | Funções trigonométricas; um argumento sem parênteses é o termo logo a seguir à função ( $\cos 2x = \cos(2x)$ ).                                                                                                                    |
| $\sinh x, \cosh x, \tanh x, \operatorname{arsinh} x$ | Funções hiperbólicas $\sinh, \cosh, \tanh, \coth$ e as suas inversas $\operatorname{arsinh}, \operatorname{arcosh}, \operatorname{artanh}, \operatorname{arcoth}$ (também $\operatorname{asinh}, \operatorname{arcsinh}, \dots$ ). |
| $\sin \alpha = 1/2, \sin(x + 30^\circ)$              | Um ângulo em graus: uma letra grega como incógnita ( $\alpha, \beta, \dots$ ou o próprio $\alpha$ ), ou graus em um número; as letras latinas estão em radianos.                                                                   |
| $\sin x = 1/2, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$        | Raízes em um intervalo – depois de uma vírgula ou na linha seguinte ( $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ou $0 \leq x < 2\pi$ ).                                                                                                      |
| $\pi, e, \infty$                                     | O número $\pi$ , o número $e$ , infinito $\infty$ .                                                                                                                                                                                |
| $x \sin x, 2x(x+1)$                                  | Deixe um espaço entre uma variável e uma função ( $x \sin x$ ) – $x \sin x$ é lido como um produto de letras.                                                                                                                      |
| $2x + 3y = 7$<br>$x - y = 1$                         | Escreva um sistema de equações ou inequações linha a linha, uma em cada linha.                                                                                                                                                     |
| $(3+4i)/(1-2i)$                                      | Números complexos: $i$ é a unidade imaginária (em expressões e equações).                                                                                                                                                          |
| $x^2 < 10, x \in \mathbb{Z}$                         | O conjunto após uma vírgula: $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$ , «em $\mathbb{N}$ »); $\mathbb{N}$ sem o zero.                                       |

## Limitações conhecidas

- O resultado é dado na forma exata (frações, raízes,  $\pi$ ) com um valor aproximado; ainda não há um modo puramente numérico.

# Equações e inequações do 1.º grau

A aplicação transforma uma equação do 1.º grau como se faz na escola – desembaraça de parênteses, passa a incógnita para um lado e divide. Numa inequação, tem em conta a mudança de sentido ao multiplicar por um número negativo e escreve o resultado como intervalo; o gráfico mostra os dois membros como retas e marca a solução no eixo x.

## Exemplos

### Uma equação com parênteses.

Enunciado:  $3(x - 2) = 2x + 5$

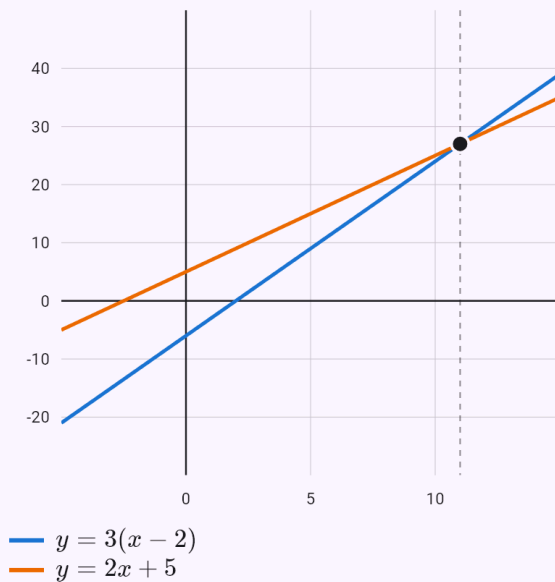
#### Resultado

$$x = 11$$

#### Passos

- Passamos tudo para um lado:  $x - 11 = 0$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita:  $x = 11$

#### Gráfico



#### Interseções dos gráficos:

- $(11; 27)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

## Uma inequação – dividir por um número negativo muda o sentido.

Enunciado:  $2x - 3 < 5x + 6$

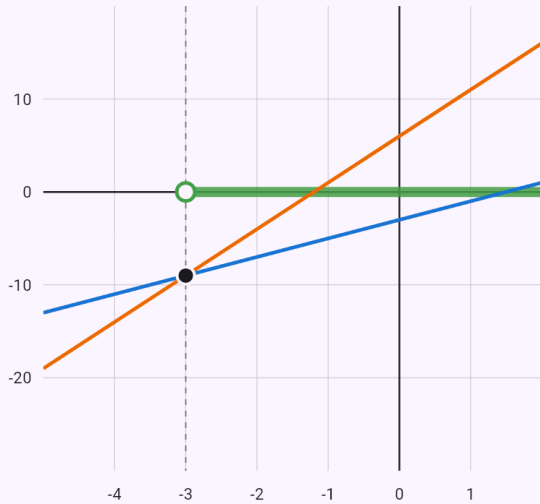
### Resultado

$$x \in (-3, \infty)$$

### Passos

- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita:  $-3x < 9$
- Dividimos pelo número negativo  $-3$ ; o sinal da desigualdade se inverte:  $x > -3$

### Gráfico



$y = 2x - 3$   
 $y = 5x + 6$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

●  $(-3; -9)$

# Equações do 2.º grau

A aplicação escreve uma equação do 2.º grau na forma  $ax^2 + bx + c = 0$  e resolve-a com o binómio discriminante e a fórmula resolvente; também reconhece uma raiz dupla. Se a equação não tiver solução real, di-lo, e o botão «Mostrar solução complexa» mostra as raízes complexas.

## Exemplos

### Duas raízes reais.

Enunciado:  $x^2 - 5x + 6 = 0$

#### Resultado

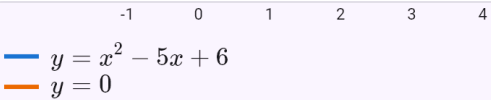
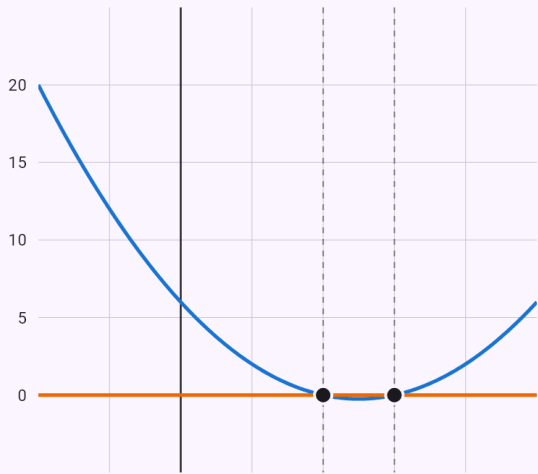
$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

#### Passos

- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

#### Gráfico



#### Interseções dos gráficos:

- (2; 0)
- (3; 0)

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

## Discriminante negativo – raízes complexas.

Enunciado:  $x^2 + 2x + 5 = 0$

[Mostrar solução complexa](#)

### Resultado

$$x_1 = -1 + 2i$$

$$x_2 = -1 - 2i$$

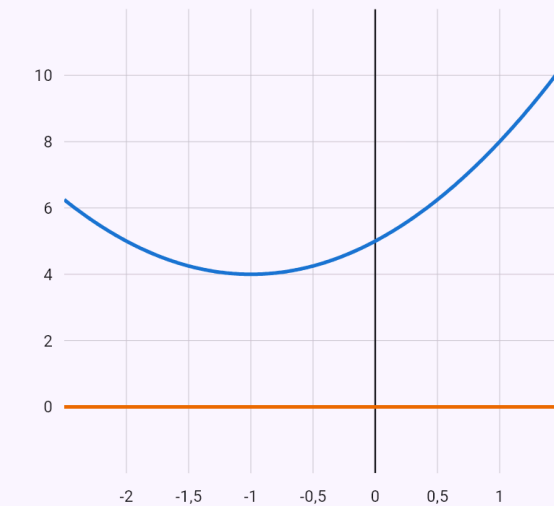
### Passos

- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- O discriminante é negativo – nos números complexos:  
 $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$

- Substituímos na fórmula de Bhaskara:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

### Gráfico



—  $y = x^2 + 2x + 5$   
—  $y = 0$

Os gráficos não se cruzam: a equação não tem solução real.

# Equações de grau superior

Uma equação biquadrada é transformada numa do 2.º grau por mudança de variável. Uma equação geral de grau superior é fatorizada com a regra de Ruffini: as raízes são procuradas entre os divisores do termo independente e cada raiz encontrada é posta em evidência até restar uma equação do 2.º grau.

## Exemplos

Uma equação biquadrada com a mudança  $y = x^2$ .

Enunciado:  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

### Resultado

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -1$$

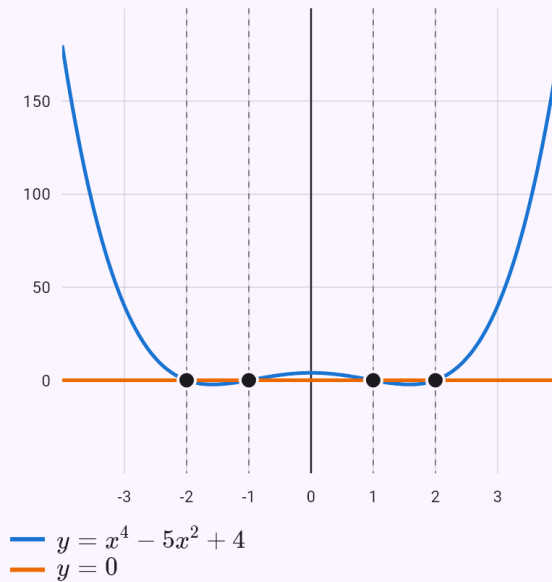
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 2$$

### Passos

- A substituição  $u = x^2$  a transforma em uma equação do segundo grau:  $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$$
- Voltamos à incógnita original:  $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Voltamos à incógnita original:  $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

### Gráfico



### Interseções dos gráficos:

•  $(-2; 0)$  •  $(-1; 0)$  •  $(1; 0)$  •  $(2; 0)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## Regra de Ruffini – raízes entre os divisores do termo independente.

Enunciado:  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

### Resultado

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

### Passos

- As raízes racionais só podem ser divisores do termo independente  $-6$ :  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

- Pelo dispositivo de Briot-Ruffini confirmamos a raiz  $x = 1$  e dividimos o polinômio:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

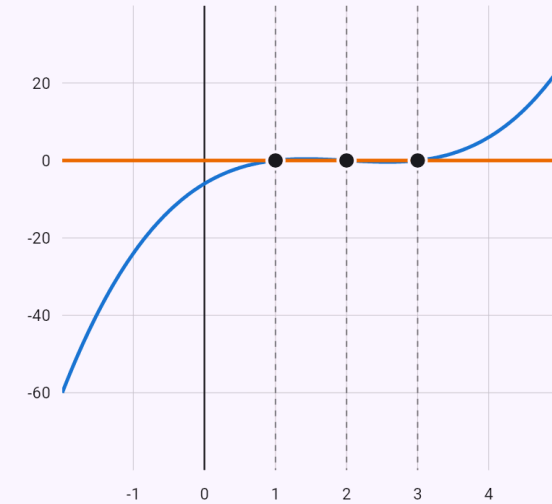
- Calculamos o discriminante:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

- Substituímos na fórmula de Bhaskara:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

### Gráfico



$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$   
 $y = 0$

Interseções dos gráficos:

•  $(1; 0)$  •  $(2; 0)$  •  $(3; 0)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

# Equações fracionárias

Numa equação com a incógnita num denominador, a aplicação começa por indicar as condições, depois multiplica pelo denominador comum e resolve. Compara as raízes com as condições e exclui as que não as verificam.

## Exemplos

Condições, denominador comum, equação do 2.º grau.

Enunciado:  $(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x$

### Resultado

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$

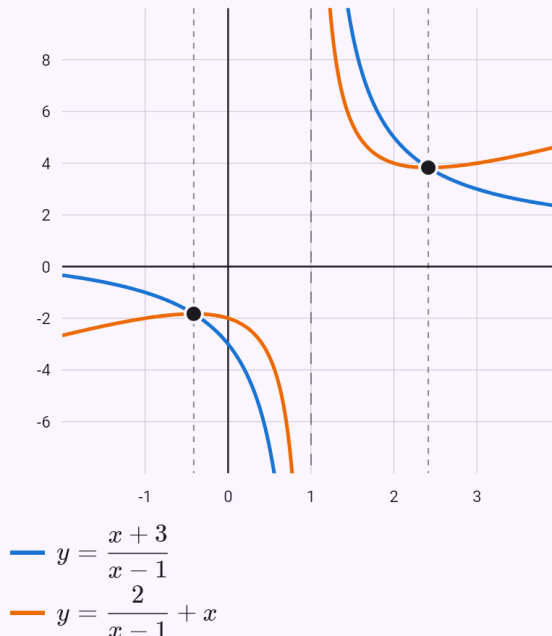
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Condições:  $x \neq 1$

### Passos

- Condições – o denominador não pode ser zero:  $x \neq 1$
- Multiplicamos ambos os lados pelo denominador  $x - 1$ :  
 $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Passamos tudo para um lado:  $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
- A raiz  $x = 1 - \sqrt{2}$  satisfaz as condições.
- A raiz  $x = 1 + \sqrt{2}$  satisfaz as condições.

### Gráfico



Interseções dos gráficos:

$$\bullet \left(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right) \quad \bullet \left(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

# Equações irracionais

Uma equação com a incógnita sob uma raiz é resolvida isolando a raiz e elevando ao quadrado. Elevar ao quadrado pode acrescentar raízes que não verificam a equação – por isso segue-se sempre uma verificação e as raízes que falham são excluídas.

## Exemplos

**Elevar ao quadrado e verificar – uma das raízes não verifica a equação.**

Enunciado:  $\sqrt{x+5} = x - 1$

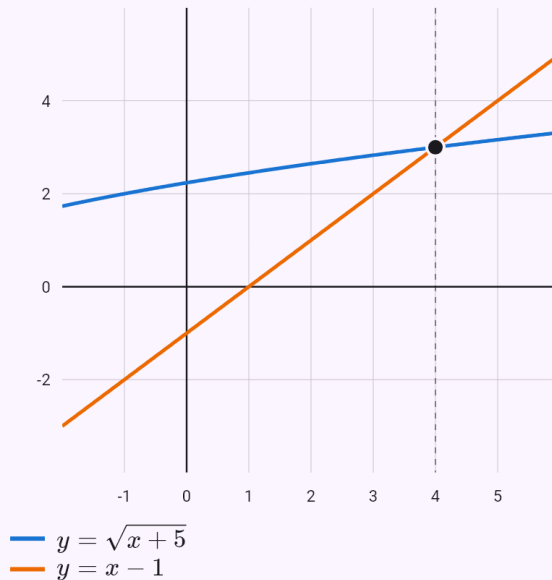
### Resultado

$$x = 4$$

### Passos

- Elevamos ambos os lados ao quadrado (não é uma transformação equivalente, por isso verificamos as raízes):  $x + 5 = (x - 1)^2$
- Passamos tudo para um lado:  $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- Verificação para  $x = -1$ : 1.º membro = 2, 2.º membro = -2, são diferentes – a raiz não serve.
- Verificação para  $x = 4$ : 1.º membro = 3, 2.º membro = 3, são iguais – a raiz serve.

### Gráfico



### Interseções dos gráficos:

● (4; 3)

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## Limitações conhecidas

- As inequações irracionais ainda não são resolvidas.

# Equações e inequações exponenciais e logarítmicas

Uma equação exponencial é resolvida passando à mesma base, aplicando logaritmos ou por mudança de variável; uma logarítmica, juntando os logaritmos pelas suas propriedades e eliminando o logaritmo, sempre com as condições. As inequações são resolvidas pela monotonia – para uma base menor do que 1, o sentido muda.

Equações com bases diferentes:  $a^x + b^x = c^x$  com bases de dois primos ( $25^x + 10^x = 4^x$ ) são divididas por uma potência e com  $t = (5/2)^x$  tornam-se quadráticas; os logaritmos de bases diferentes passam a uma só ( $\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$ ).

Logaritmos cujas bases são potências de um mesmo número ( $\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$ ) são convertidos para uma só base ( $\log_4 a = \log_2 a / 2$ ), a equação é multiplicada e os logaritmos agrupados. Um logaritmo com a incógnita na base ( $\log_x 8 = 3$ ) é eliminado pela definição ( $x^3 = 8$ ) com as condições  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . Uma equação com a incógnita na base e no expoente ( $x^{\log x} = 100$ ) é resolvida aplicando logaritmos e a substituição  $t = \log x$ . Inequações com a substituição  $t = \log(x + 1)$  e sistemas de inequações logarítmicas e exponenciais são resolvidos como inequações isoladas – pela monotonia.

Equações e inequações com funções hiperbólicas são reescritas pela definição ( $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ , ...) como exponenciais e resolvidas pela substituição  $t = e^x$ ;  $\operatorname{arsinh} x = c$  pela função inversa ( $x = \sinh c$ ).

# Exemplos

A mudança de variável  $t = 2^x$ .

Enunciado:  $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

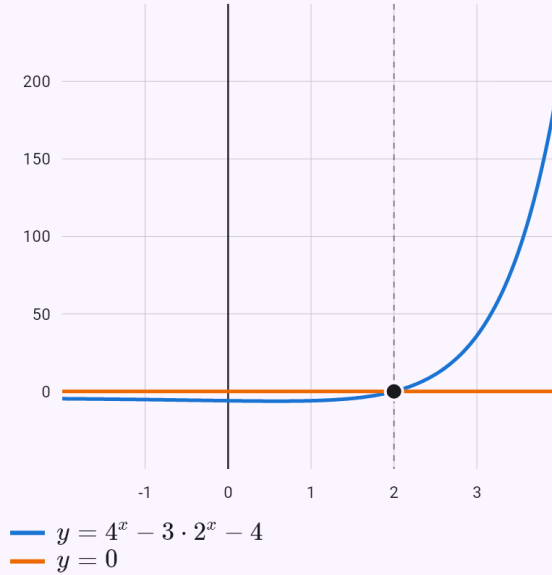
## Resultado

$$x = 2$$

## Passos

- Fazemos a substituição  $t = 2^x$ :  $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- A equação  $2^x = -1$  não tem solução real.
- Voltamos à incógnita original:  $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

## Gráfico



## Interseções dos gráficos:

- $(2; 0)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## Juntar logaritmos, condições.

Enunciado:  $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

### Resultado

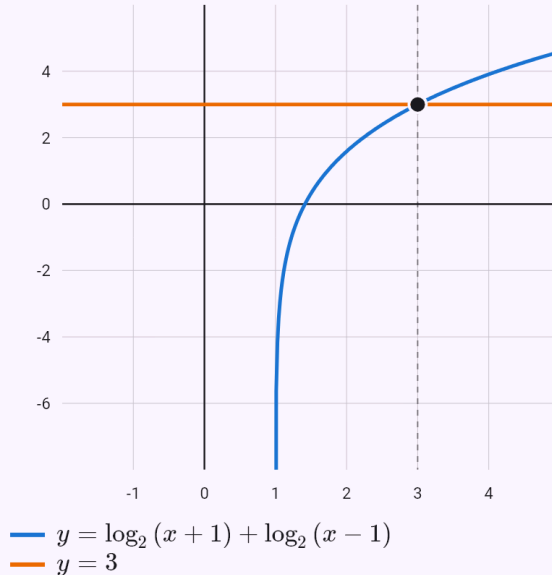
$$x = 3$$

Condições:  $x > 1$

### Passos

- Domínio - condições:  $x > -1$ ,  $x > 1 \Rightarrow x > 1$
- Juntamos os logaritmos pelas suas propriedades:  
 $\log_2((x-1)(x+1)) = 3$
- Eliminamos o logaritmo:  $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Passamos tudo para um lado:  $x^2 - 9 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 6}{2}$$
- A raiz  $x = -3$  não satisfaz a condição  $x > 1$ , portanto não é solução.
- A raiz  $x = 3$  satisfaz as condições.

### Gráfico



### Interseções dos gráficos:

- (3; 3)

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de x.

## Bases diferentes: dividimos por 4<sup>d</sup> e substituímos t = (5/2)<sup>d</sup>.

Enunciado:  $25^d + 10^d = 4^d$

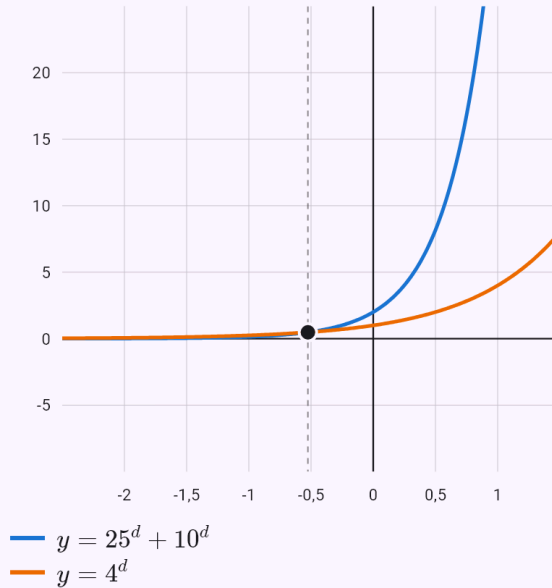
### Resultado

$$d = \log_{\frac{5}{2}} \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

### Passos

- Dividimos a equação pela expressão positiva 4<sup>d</sup>:  
 $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^d = 1$
- Fazemos a substituição  $t = \left(\frac{5}{2}\right)^d$ :  $t^2 + t - 1 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
- A equação  $\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  não tem solução real.
- Voltamos à incógnita original  
$$\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}} \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

### Gráfico



### Interseções dos gráficos:

- $\left( \log_{\frac{5}{2}} \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right); 0,4829 \right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de d.

## Base menor do que 1 – o sentido da desigualdade muda.

Enunciado:  $(1/2)^x > 8$

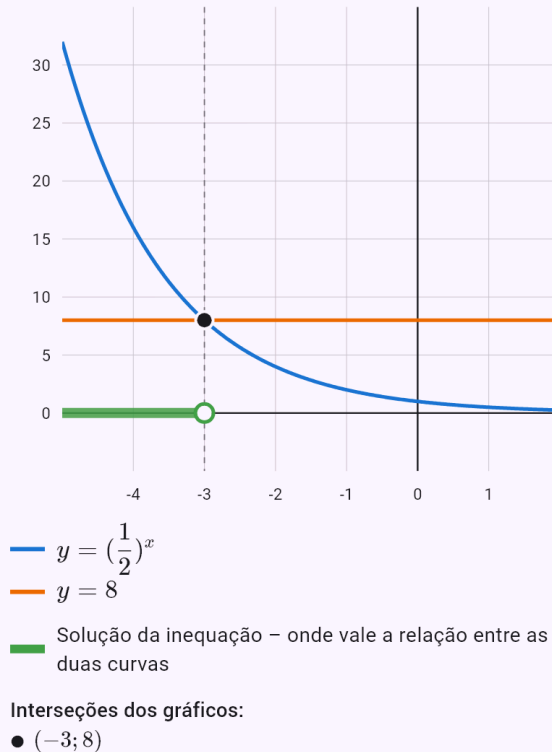
### Resultado

$$x \in (-\infty, -3)$$

### Passos

- Escrevemos ambos os lados como potências da mesma base:  $2^{-x} > 2^3$
- A função exponencial de base 2 é crescente – os expoentes satisfazem a desigualdade com o mesmo sinal:  $-x > 3$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita:  $-x > 3$
- Dividimos pelo número negativo  $-1$ ; o sinal da desigualdade se inverte:  $x < -3$
- A solução desta inequação é  $x \in (-\infty, -3)$

### Gráfico



## Tangente hiperbólica pela definição – substituição $t = e^{2x}$ .

Enunciado:  $\tanh x = 1/2$

### Resultado

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

### Passos

- Substituímos as definições

$$\tanh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Fazemos a substituição  $t = e^{2x}$ ;  $t - 3 = 0$
- Resolvemos:  $t = 3$
- Voltamos à incógnita original:  $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

A incógnita na base – pela definição; a raiz -1 não satisfaz as condições.

Enunciado:  $\log_x (2x+3) = 2$

#### Resultado

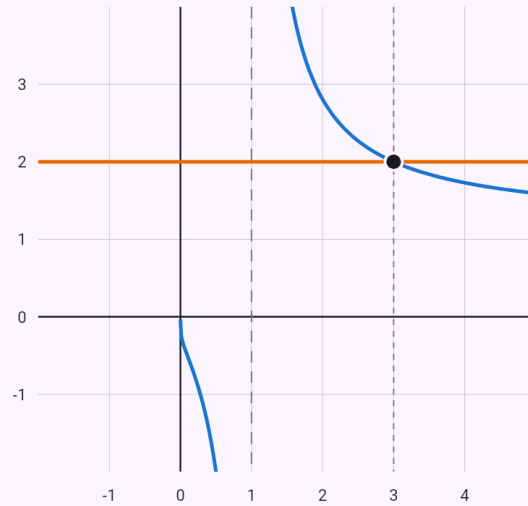
$$x = 3$$

Condições:  $x > 0$ ,  $x \neq 1$

#### Passos

- Domínio – condições:  $x > 0$ ,  $x \neq 1$
- Eliminamos o logaritmo:  $x^2 = 2x + 3$
- Passamos tudo para um lado:  $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
- A raiz  $x = -1$  não satisfaz a condição  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ , portanto não é solução.
- A raiz  $x = 3$  satisfaz as condições.

#### Gráfico



—  $y = \log_x (2x + 3)$   
—  $y = 2$

Interseções dos gráficos:

• (3; 2)

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## A incógnita na base e no expoente – aplicamos logaritmos, substituição $t = \log x$ .

Enunciado:  $x^{(\log x)} = 100$

### Resultado

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

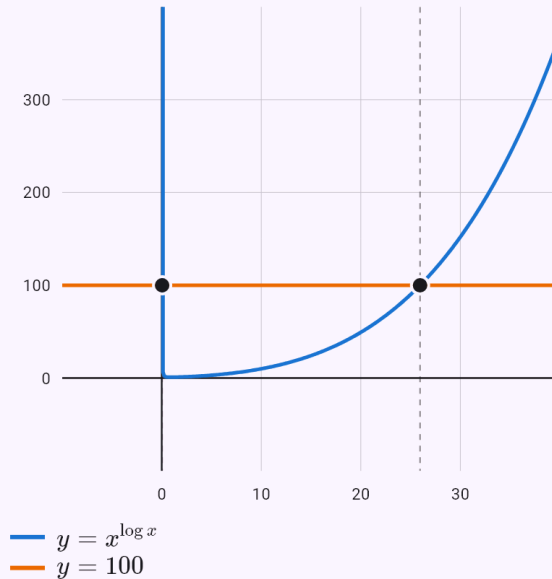
$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Condições:  $x > 0$

### Passos

- Aplicamos o logaritmo a ambos os lados:  
 $\log(x^{\log x}) = 2 \Rightarrow \log x \cdot \log x = 2$
- Domínio – condições:  $x > 0$
- Fazemos a substituição  $t = \log x$ :  $t^2 - 2 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Voltamos à incógnita original:  
 $\log x = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Voltamos à incógnita original:  
 $\log x = \sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{\sqrt{2}}$
- A raiz  $x = 10^{-\sqrt{2}}$  satisfaz as condições.
- A raiz  $x = 10^{\sqrt{2}}$  satisfaz as condições.

### Gráfico



#### Interseções dos gráficos:

$$\bullet \left(10^{-\sqrt{2}}; 100\right) \quad \bullet \left(10^{\sqrt{2}}; 100\right)$$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## Limitações conhecidas

- Logaritmos de bases diferentes que não são potências de um mesmo número ( $\log_2 x + \log_3(x + 1) = 2$ ) são resolvidos apenas numericamente.
- Equações hiperbólicas que levam a uma equação do 4.º grau em  $e^x$  ( $\cosh^2 x - 3 \sinh x = 3$ ) só são resolvidas numericamente; inequações com funções hiperbólicas inversas ainda não são suportadas.

# Módulo

A aplicação resolve equações e inequações com módulos de duas maneiras, que escolhe com um chip: «Pela definição» – um atalho que desdobra  $|a| = b$  ou  $|a| < b$  – e «Método dos zeros» – dividindo a reta numérica em intervalos em que cada módulo tem sinal fixo. Sem escolha, ela própria escolhe a mais adequada.

Módulos encaixados ( $||x| - 2| = 1$ ) resolvem-se da mesma forma: pela definição passo a passo de fora para dentro, pelo método dos zeros de dentro para fora – primeiro os zeros dos módulos interiores e depois, em cada intervalo, o módulo que resta.

Uma inequação  $|f| < |g|$  (apenas um módulo de cada lado) também pode ser resolvida com o chip «Elevando ao quadrado»: ambos os lados são não negativos, por isso é elevada ao quadrado e resolvida como quadrática. Uma expressão com módulos sozinha ( $|x - 1| + |x + 2|$ ) é simplificada por troços – zeros, tabela de sinais e, em cada intervalo, a expressão sem módulos.

## Exemplos

### Um módulo – desdobrado pela definição.

Enunciado:  $|2x - 1| = 5$

#### Resultado

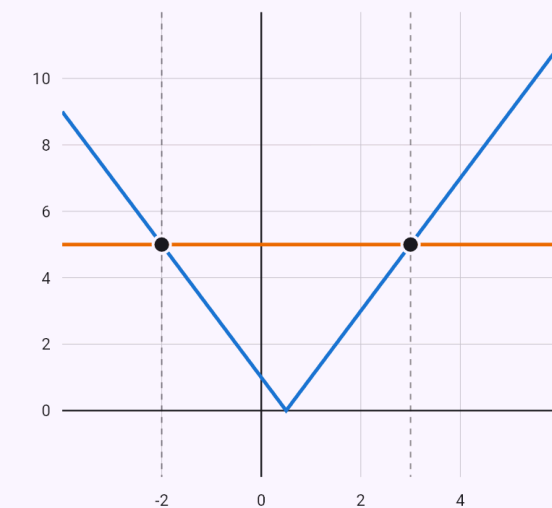
$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3$$

#### Passos

- Há um só valor absoluto e um número do outro lado – basta aplicar a definição.
- Pela definição,  $|2x - 1| = 5$  vale se e só se  $2x - 1 = 5$  ou  $2x - 1 = -5$
- Resolvemos:  $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Resolvemos:  $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

#### Gráfico



—  $y = |2x - 1|$   
—  $y = 5$

#### Interseções dos gráficos:

•  $(-2; 5)$  •  $(3; 5)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## Dois módulos – o método dos zeros.

Enunciado:  $|x - 1| + |x + 2| < 5$

### Resultado

$$x \in (-3, 2)$$

### Passos

- Eliminamos os valores absolutos pelo método dos zeros: eles dividem a reta numérica em intervalos e em cada um as expressões de dentro mantêm o sinal.

- Zeros das expressões dentro dos valores absolutos:  
 $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

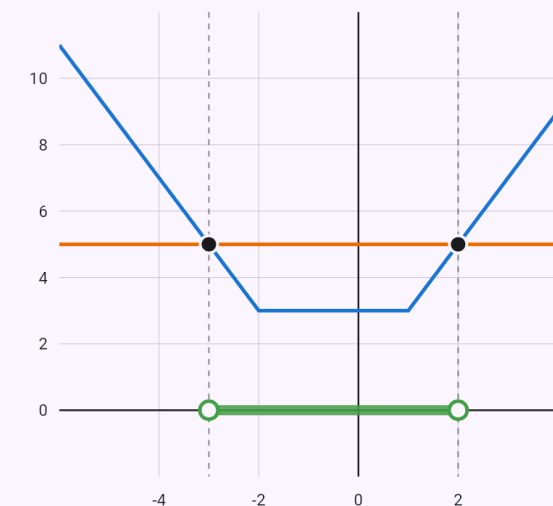
- Sinais em cada intervalo:

|         | $(-\infty, -2)$ | $[-2, 1)$ | $[1, \infty)$ |
|---------|-----------------|-----------|---------------|
| $x - 1$ | -               | -         | +             |
| $x + 2$ | -               | +         | +             |

- No intervalo  $(-\infty, -2)$  eliminamos os valores absolutos pelos sinais:  $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Resolvemos:  $-2x - 1 < 5$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita:  $-2x < 6$
- Dividimos pelo número negativo  $-2$ ; o sinal da desigualdade se inverte:  $x > -3$
- A solução desta inequação é  $x \in (-3, \infty)$
- Interseção com o intervalo  $(-\infty, -2)$ :  $x \in (-3, -2)$
- No intervalo  $[-2, 1)$  eliminamos os valores absolutos pelos sinais:  $(1 - x) + (x + 2) < 5$

- A incógnita desapareceu e ficou a afirmação verdadeira  $3 < 5$  – todo o intervalo  $[-2, 1)$  é solução.
- No intervalo  $[1, \infty)$  eliminamos os valores absolutos pelos sinais:  $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Resolvemos:  $2x + 1 < 5$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita:  $2x < 4$
- Dividimos pelo número positivo 2; o sinal da desigualdade se mantém:  $x < 2$
- A solução desta inequação é  $x \in (-\infty, 2)$
- Interseção com o intervalo  $[1, \infty)$ :  $x \in [1, 2)$
- A solução é a união dos resultados:  $x \in (-3, 2)$

### Gráfico



—  $y = |x - 1| + |x + 2|$   
—  $y = 5$

— Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

- $(-3; 5)$    •  $(2; 5)$

## Módulo encaixado – pela definição, de fora para dentro.

Enunciado:  $||x| - 2| = 1$

### Resultado

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -1$$

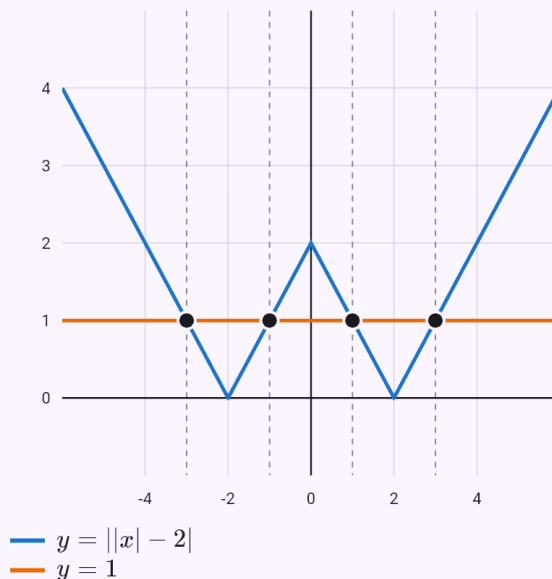
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 3$$

### Passos

- Há um só valor absoluto e um número do outro lado – basta aplicar a definição.
- Pela definição,  $||x| - 2| = 1$  vale se e só se  $|x| - 2 = 1$  ou  $|x| - 2 = -1$
- Isolamos o valor absoluto:  $|x| = 3$
- Pela definição,  $|x| = 3$  vale se e só se  $x = 3$  ou  $x = -3$
- Isolamos o valor absoluto:  $|x| = 1$
- Pela definição,  $|x| = 1$  vale se e só se  $x = 1$  ou  $x = -1$

### Gráfico



### Interseções dos gráficos:

•  $(-3; 1)$  •  $(-1; 1)$  •  $(1; 1)$  •  $(3; 1)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## Módulos em ambos os lados – elevar ao quadrado.

Enunciado:  $|x - 1| < |2x + 3|$  Elevando ao quadrado

### Resultado

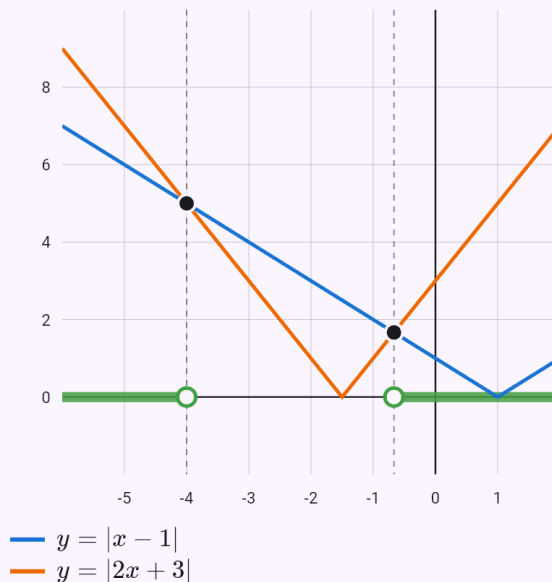
$$x \in (-\infty, -4) \cup \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$$

### Passos

- Em ambos os lados há apenas um valor absoluto – ambos são não negativos, por isso podemos elevar a inequação ao quadrado (é uma transformação equivalente).
- Elevamos ambos os lados ao quadrado:  
 $(x - 1)^2 < (2x + 3)^2$
- Passamos tudo para um lado:  $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Fatoramos:  $-(x + 4)(3x + 2) < 0$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos:  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = -\frac{2}{3}$
- Sinais em cada intervalo:

|                    | $(-\infty, -4)$ | $(-4, -\frac{2}{3})$ | $(-\frac{2}{3}, \infty)$ |
|--------------------|-----------------|----------------------|--------------------------|
| $-1$               | —               | —                    | —                        |
| $x + 4$            | —               | +                    | +                        |
| $3x + 2$           | —               | —                    | +                        |
| $-(x + 4)(3x + 2)$ | —               | +                    | —                        |

### Gráfico



Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

### Interseções dos gráficos:

•  $(-4; 5)$  •  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

## Expressão com módulos – por troços nos intervalos.

Enunciado:  $|x - 1| + |x + 2|$

### Resultado

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty, -2) \\ 3, & x \in [-2, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

### Passos

- Eliminamos os valores absolutos pelo método dos zeros: eles dividem a reta numérica em intervalos e em cada um as expressões de dentro mantêm o sinal.

- Zeros das expressões dentro dos valores absolutos:  
 $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

- Sinais em cada intervalo:

|         | $(-\infty, -2)$ | $[-2, 1)$ | $[1, \infty)$ |
|---------|-----------------|-----------|---------------|
| $x - 1$ | -               | -         | +             |
| $x + 2$ | -               | +         | +             |

- No intervalo  $(-\infty, -2)$  eliminamos os valores absolutos pelos sinais:  $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- No intervalo  $[-2, 1)$  eliminamos os valores absolutos pelos sinais:  $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- No intervalo  $[1, \infty)$  eliminamos os valores absolutos pelos sinais:  $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

## Limitações conhecidas

- Uma expressão com módulos é simplificada apenas em toda a reta numérica, não num intervalo dado; elevar ao quadrado só é oferecido numa inequação com um único módulo de cada lado.

# Equações e inequações trigonométricas

O aplicativo reduz a equação a equações básicas como  $\sin x = a$  e as resolve no círculo trigonométrico: encontra os ângulos de uma volta e soma múltiplos do período ( $x = \pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). O círculo aparece desenhado na resolução.

Dá preferência às fórmulas conhecidas – arco duplo e metade,  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , soma em produto –, depois à fatoração, à substituição  $t = \sin x$ , à divisão de uma equação homogênea por  $\cos^n x$  e ao ângulo auxiliar em  $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ . O resultado ainda é verificado numericamente em um período inteiro.

Uma incógnita com letra latina ( $x, t$ ) está em radianos, com letra grega ( $\alpha, \beta, \dots$ ) em graus – assim como uma entrada com o sinal ° ( $\sin(x + 30^\circ)$ ). Para obter as raízes em um intervalo, escreva-o depois de uma vírgula ou na linha seguinte.

Uma inequação é resolvida por um arco do círculo trigonométrico, uma mais complexa pelos zeros em um período; o resultado são intervalos com o período.

# Exemplos

Dois ramos de soluções, os ângulos no círculo trigonométrico.

Enunciado:  $\sin x = 1/2$

## Resultado

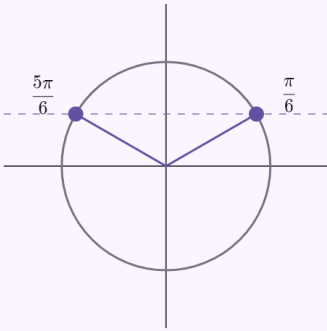
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

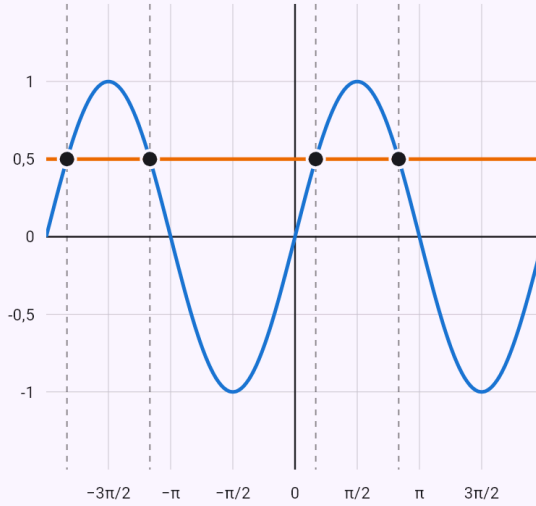
$$k \in \mathbb{Z}$$

## Passos

- Equação básica  $\sin x = \frac{1}{2}$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



## Gráfico



$$\text{— } y = \sin x$$

$$\text{— } y = \frac{1}{2}$$

Interseções dos gráficos:

$$\bullet \left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \bullet \left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \bullet \left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$$
$$\bullet \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## A substituição $t = \sin x$ e uma equação do segundo grau.

Enunciado:  $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

### Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

### Passos

- Fazemos a substituição  $t = \sin x$ :  $2t^2 - t - 1 = 0$

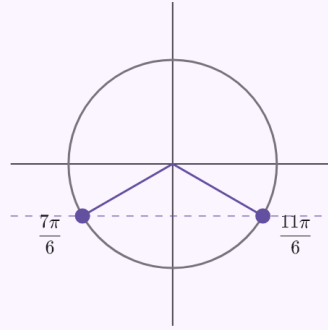
- Calculamos o discriminante:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

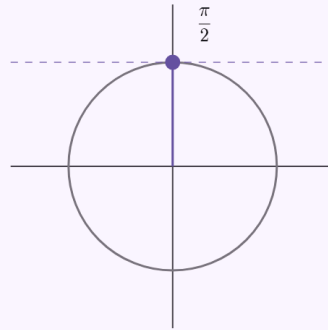
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

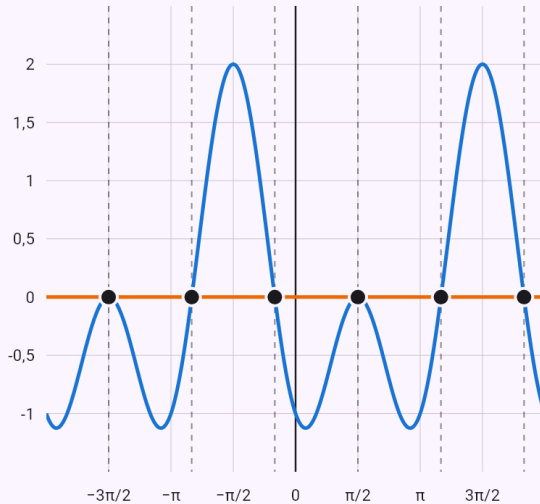
- Equação básica  $\sin x = -\frac{1}{2}$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{11\pi}{6}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Equação básica  $\sin x = 1$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{\pi}{2}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



### Gráfico



$$y = 2 \sin^2 x - \sin x - 1$$

$$y = 0$$

### Interseções dos gráficos:

$$\bullet \left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right) \bullet \left(-\frac{5\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(-\frac{\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

$$\bullet \left(\frac{7\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(\frac{11\pi}{6}; 0\right)$$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## A fórmula de $\sin 2x$ e a fatoração.

Enunciado:  $\sin 2x = \cos x$

### Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

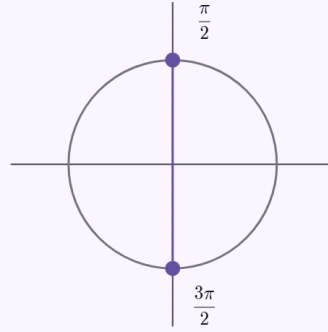
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

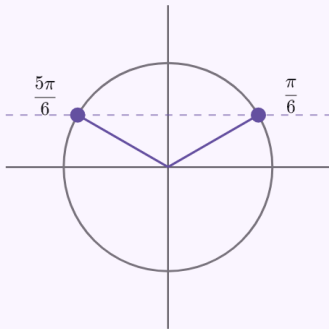
$$k \in \mathbb{Z}$$

### Passos

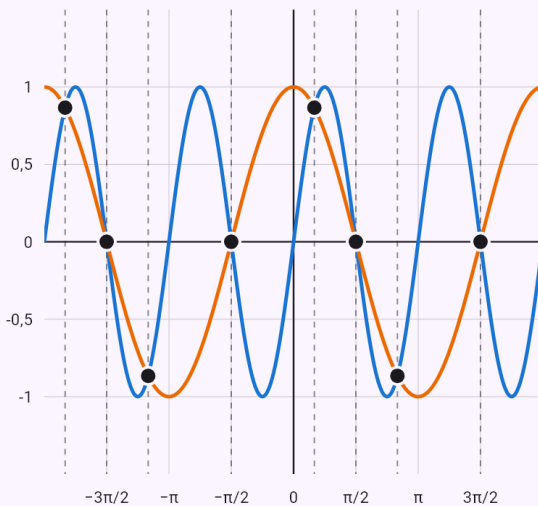
- Passamos tudo para um lado:  $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Usamos a fórmula  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ :  
 $2 \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Fatoramos: um produto é zero se e somente se um dos fatores for zero:  $(2 \sin x - 1) \cos x = 0$
- Resolvemos a equação  $\cos x = 0$
- Equação básica  $\cos x = 0$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Resolvemos a equação  $2 \sin x - 1 = 0$
- Isolamos a função trigonométrica:  $\sin x = \frac{1}{2}$
- Equação básica  $\sin x = \frac{1}{2}$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



### Gráfico



$y = \sin 2x$   
 $y = \cos x$

### Interseções dos gráficos:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

O ângulo auxiliar:  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \pi/4)$ .

Enunciado:  $\sin x + \cos x = 1$

#### Resultado

$$x_1 = 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

#### Passos

• Passamos tudo para um lado:  $\cos x + \sin x - 1 = 0$

• Introduzimos um ângulo auxiliar  $\varphi$ :

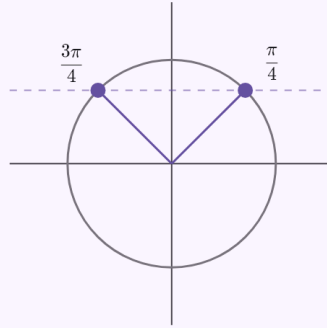
$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \text{ onde}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

• Isolamos a função trigonométrica:  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Equação básica  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:

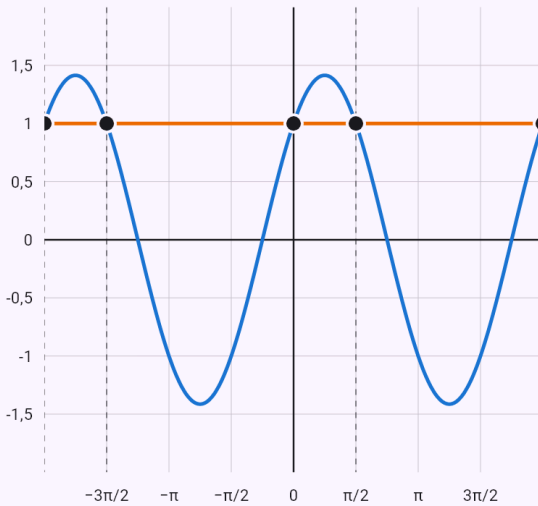
$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$



• Isolamos a incógnita

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

#### Gráfico



—  $y = \sin x + \cos x$

—  $y = 1$

Interseções dos gráficos:

•  $(-2\pi; 1)$  •  $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$  •  $(0; 1)$  •  $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$

•  $(2\pi; 1)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## Uma letra grega – o resultado em graus.

Enunciado:  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$

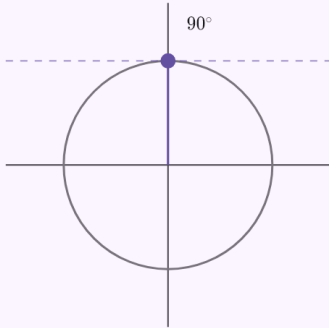
### Resultado

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

### Passos

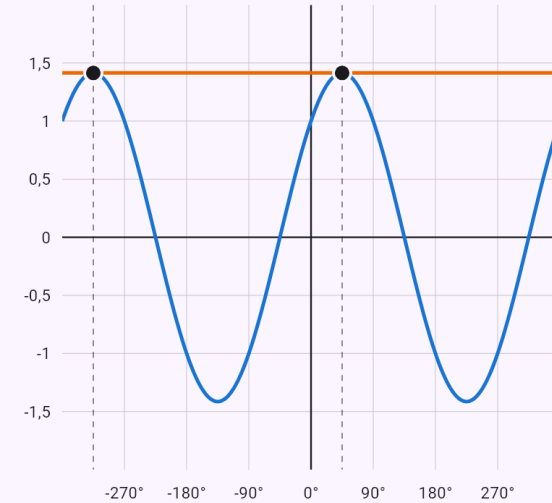
- Passamos tudo para um lado:  $\cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{2} = 0$
- Introduzimos um ângulo auxiliar  $\varphi$ :  
 $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$ , onde  
 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Isolamos a função trigonométrica:  $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Equação básica  $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $90^\circ$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Isolamos a incógnita

$$\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

### Gráfico



$$y = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{2}$$

### Interseções dos gráficos:

$$\bullet (-315^\circ; \sqrt{2}) \quad \bullet (45^\circ; \sqrt{2})$$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

## Só as raízes no intervalo dado.

Enunciado:  $\sin x = \frac{1}{2}$ ,  $x \in [0; 4\pi)$

### Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

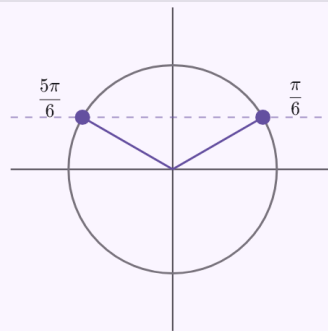
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$

$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

### Passos

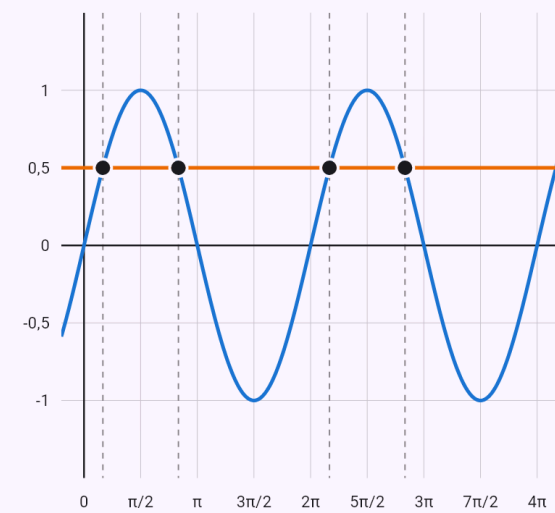
- Equação básica  $\sin x = \frac{1}{2}$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- As soluções no intervalo  $x \in [0, 4\pi)$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{13\pi}{6}, x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

### Gráfico



—  $y = \sin x$

—  $y = \frac{1}{2}$

Interseções dos gráficos:

•  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$  •  $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$  •  $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$  •  $\left(\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Cada interseção corresponde a uma solução da equação: sua primeira coordenada é o valor de  $x$ .

Um arco do círculo trigonométrico, um intervalo em torno de zero.

Enunciado:  $\cos x > \frac{1}{2}$

### Resultado

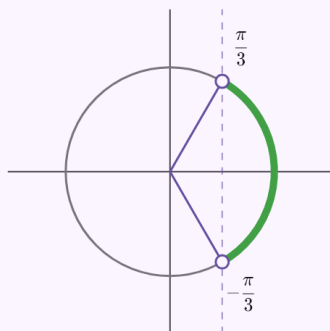
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

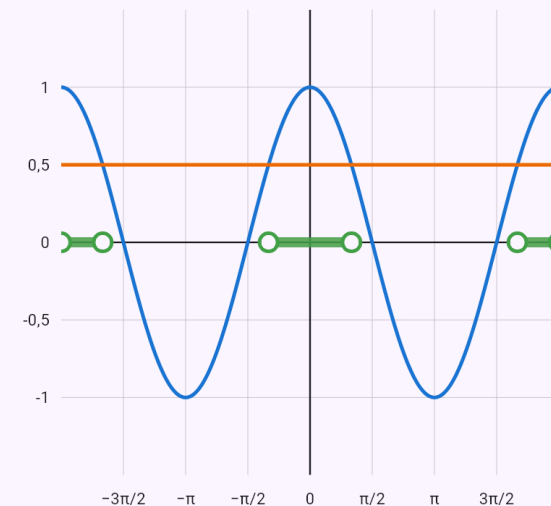
### Passos

• Inequação básica  $\cos x > \frac{1}{2}$ : no círculo trigonométrico, ela vale no arco destacado; com o período:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$



### Gráfico



—  $y = \cos x$

—  $y = \frac{1}{2}$

— Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

## Os zeros em um período e o sinal entre eles.

Enunciado:  $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$

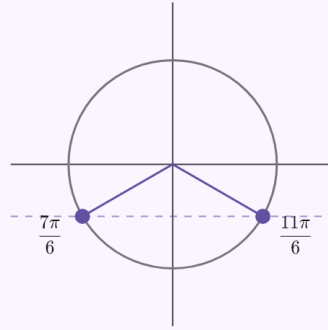
### Resultado

$$x \in \left( \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$$

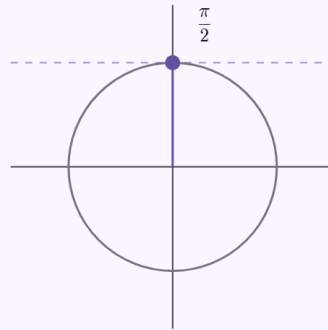
$$k \in \mathbb{Z}$$

### Passos

- Primeiro resolvemos a equação  
 $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Fazemos a substituição  $t = \sin x$ :  $2t^2 - t - 1 = 0$
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Equação básica  $\sin x = -\frac{1}{2}$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

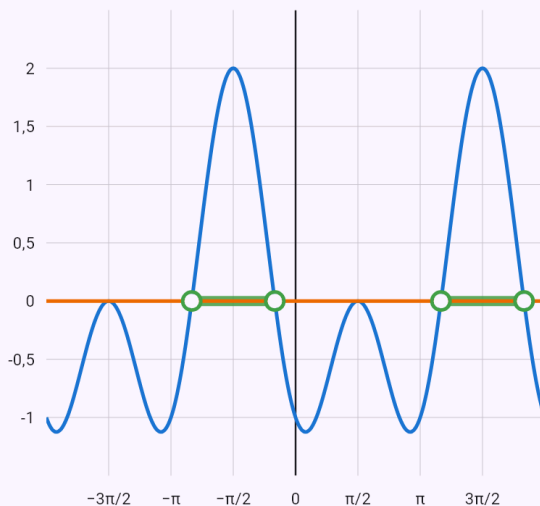


- Equação básica  $\sin x = 1$ : no círculo trigonométrico, os ângulos de uma volta que a satisfazem são  $\frac{\pi}{2}$ ; somando múltiplos do período, obtemos todas as soluções:  
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- A função tem período  $2\pi$ . Seus zeros (e os pontos onde não está definida)  $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$  dividem um período em intervalos; pelo sinal neles, a inequação vale para:  
 $x \in \left( \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$

### Gráfico



—  $y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$   
—  $y = 0$

— Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

## Limitações conhecidas

---

- Equações com a incógnita também fora de uma função trigonométrica ( $x = \cos x$ ) são resolvidas só numericamente, sem o período.
- Inequações trigonométricas duplas ( $-1/2 < \sin x < 1/2$ ) e funções trigonométricas dentro de um módulo ainda não são suportadas.

# Inequações e sistemas de inequações

As inequações do 2.º grau e fracionárias são resolvidas com os zeros e um quadro de sinais. Uma inequação dupla e um sistema de inequações são resolvidos como a interseção das soluções de cada inequação, mostrada na reta numérica. Um sistema de inequações com duas incógnitas é resolvido como uma região do plano, colorida no gráfico.

Num sistema de inequações com duas incógnitas a aplicação indica também os vértices da região – as interseções das fronteiras com coordenadas exatas. Um sistema de uma equação e inequações com uma incógnita é resolvido resolvendo a equação e substituindo as suas raízes nas inequações; com duas incógnitas a solução é a parte da curva da equação que está na região das inequações – destacada no gráfico, com os extremos calculados exatamente. Um sistema também pode ser escrito numa linha, separado por ponto e vírgula ( $2^x > 4$ ;  $3^x < 81$ ).

## Exemplos

Uma inequação do 2.º grau – zeros e sinais.

Enunciado:  $x^2 - x - 6 > 0$

### Resultado

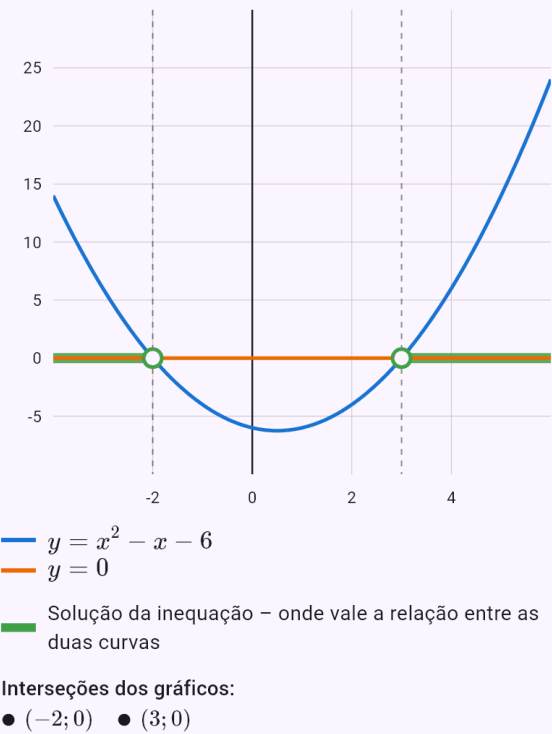
$$x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

### Passos

- Fatoramos:  $(x - 3)(x + 2) > 0$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$
- Sinais em cada intervalo:

|                  | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|------------------|-----------------|-----------|---------------|
| $x - 3$          | -               | -         | +             |
| $x + 2$          | -               | +         | +             |
| $(x - 3)(x + 2)$ | +               | -         | +             |

### Gráfico



## Uma inequação fracionária – o denominador não pode ser zero.

Enunciado:  $(x+1)/(x-3) \leq 0$

### Resultado

$$x \in [-1, 3)$$

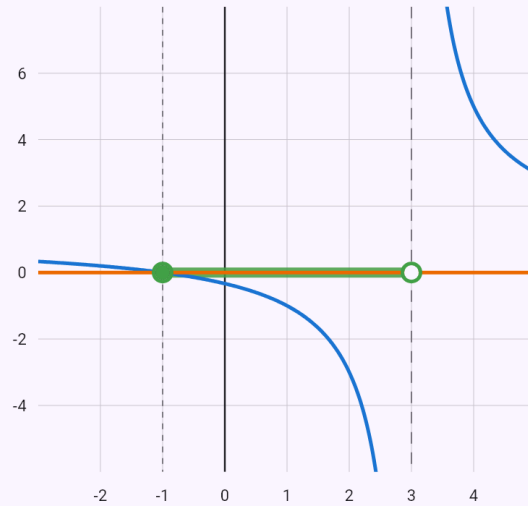
Condições:  $x \neq 3$

### Passos

- Condições – o denominador não pode ser zero:  $x \neq 3$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$
- Sinais em cada intervalo:

|                   | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|-------------------|-----------------|-----------|---------------|
| $x - 3$           | -               | -         | +             |
| $x + 1$           | -               | +         | +             |
| $\frac{x+1}{x-3}$ | +               | -         | +             |

### Gráfico



$$y = \frac{x+1}{x-3}$$
$$y = 0$$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

●  $(-1; 0)$

## Uma inequação dupla.

Enunciado:  $-1 \leq 2x + 1 < 5$

### Resultado

$$x \in [-1, 2)$$

### Passos

- Inequação 1:  $-1 \leq 2x + 1$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita:  $-2x \leq 2$
- Dividimos pelo número negativo  $-2$ ; o sinal da desigualdade se inverte:  $x \geq -1$
- A solução desta inequação é  $x \in [-1, \infty)$
- Inequação 2:  $2x + 1 < 5$
- Deixamos os termos com a incógnita à esquerda e passamos o resto para a direita:  $2x < 4$
- Dividimos pelo número positivo  $2$ ; o sinal da desigualdade se mantém:  $x < 2$
- A solução desta inequação é  $x \in (-\infty, 2)$
- A solução do sistema é a interseção das soluções das inequações:  $x \in [-1, 2)$

### Gráfico



### Solução do sistema (interseção)



Cada inequação tem a sua linha na reta numérica; a interseção está a verde. Um ponto cheio pertence à solução, um vazio não.

## Sistema de inequações com duas incógnitas – uma região do plano e os seus vértices.

Enunciado:  $x + y \leq 4$

$$x - y \geq 0$$

$$y \geq 0$$

### Resultado

$$y \leq 4 - x$$

$$y \leq x$$

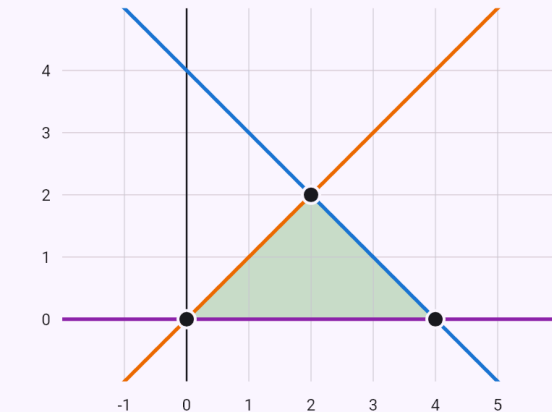
$$y \in [0, \infty)$$

### Passos

- Inequação 1:  $x + y \leq 4$
- A fronteira é a curva  $x + y = 4$ ; traçada contínua, seus pontos pertencem à solução.
- Substituímos o ponto  $[0; 0]$ :  $0 \leq 4$  é verdadeira; a solução é a parte do plano que contém o ponto.
- Inequação 2:  $x - y \geq 0$
- A fronteira é a curva  $x - y = 0$ ; traçada contínua, seus pontos pertencem à solução.
- Substituímos o ponto  $[1; 0]$ :  $1 \geq 0$  é verdadeira; a solução é a parte do plano que contém o ponto.
- Inequação 3:  $y \geq 0$
- A fronteira é a curva  $y = 0$ ; traçada contínua, seus pontos pertencem à solução.
- Substituímos o ponto  $[0; 1]$ :  $1 \geq 0$  é verdadeira; a solução é a parte do plano que contém o ponto.
- A solução do sistema é a parte comum dessas regiões, sombreada no gráfico.

- Vértices da região (interseções das fronteiras):  $[0; 0]$ ,  $[2; 2]$ ,  $[4; 0]$

### Gráfico



$$\begin{aligned} \text{—} & x + y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 4 - x \\ \text{—} & x - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x \\ \text{—} & y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0, \infty) \end{aligned}$$

A solução é a região sombreada. Uma fronteira contínua pertence a ela, uma tracejada não.

### Vértices da região:

$$\bullet (0; 0) \quad \bullet (2; 2) \quad \bullet (4; 0)$$

## Uma inequação nos inteiros – listam-se os inteiros do intervalo.

Enunciado:  $x^2 < 10$

### Resultado

$$x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

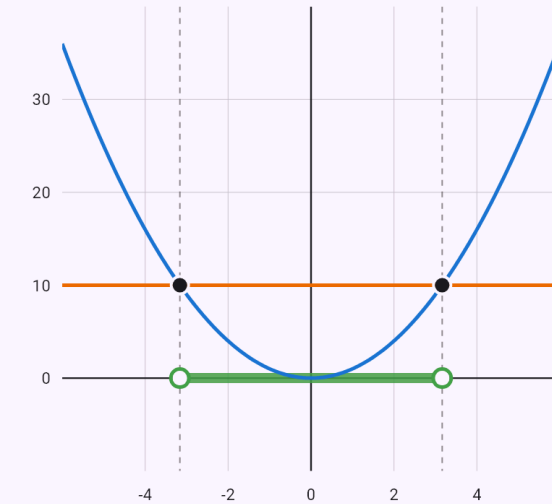
### Passos

- Passamos tudo para um lado:  $x^2 - 10 < 0$
- Os pontos críticos dividem a reta numérica em intervalos:  $x_1 = -\sqrt{10}$ ,  $x_2 = \sqrt{10}$
- Sinais em cada intervalo:

|            |                         |                           |                       |
|------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------|
| $x^2 - 10$ | $(-\infty, -\sqrt{10})$ | $(-\sqrt{10}, \sqrt{10})$ | $(\sqrt{10}, \infty)$ |
|            | +                       | -                         | +                     |

- Nos reais  $x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$ ; em  $\mathbb{Z}$ :  
 $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

### Gráfico



$y = x^2$   
 $y = 10$

Solução da inequação – onde vale a relação entre as duas curvas

Interseções dos gráficos:

$\bullet (-\sqrt{10}; 10)$   $\bullet (\sqrt{10}; 10)$

## Equação e inequação – as raízes da equação substituídas na inequação.

Enunciado:  $x^2 - x - 6 = 0$

$x > 0$

### Resultado

$$x = 3$$

### Passos

- Primeiro resolvemos a equação  $x^2 - x - 6 = 0$  e depois substituímos as suas raízes nas inequações.
- Calculamos o discriminante:  
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- Substituímos na fórmula de Bhaskara:  
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
- A raiz  $x = -2$  não satisfaz a condição  $x > 0$ , portanto não é solução.
- A raiz  $x = 3$  satisfaz as condições.

## Circunferência e semiplano – a solução é um arco; os seus extremos não lhe pertencem.

Enunciado:  $x^2 + y^2 = 4$

$$y > x$$

#### Resultado

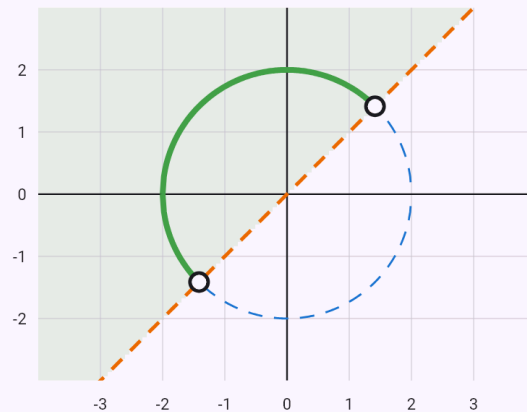
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y > x$$

#### Passos

- A solução são os pontos da curva  $x^2 + y^2 = 4$  que estão na região dada pelas inequações. Primeiro encontramos essa região:
- A fronteira é a curva  $y = x$ ; traçada tracejada, seus pontos não pertencem à solução.
- Substituímos o ponto  $[1; 0]$ :  $0 > 1$  é falsa; a solução é a parte do plano que não contém o ponto.
- Extremos do troço da curva:  $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ ,  $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$   
– numa fronteira tracejada, não pertencem à solução.

#### Gráfico



$$\text{---} x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{---} y > x$$

A solução é a parte da curva destacada a verde – a que está na região sombreada. Um extremo cheio pertence à solução, um vazio não.

Extremos:

$$\circ (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \quad \circ (\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

## Limitações conhecidas

- Um sistema com duas ou mais equações juntamente com inequações ainda não é resolvido; escreva os decimais com ponto ( $x > 2.5$ ).

# Sistemas de equações

Um sistema de equações lineares com duas incógnitas é resolvido pelo método da adição ou da substituição, e os sistemas maiores pela eliminação de Gauss – também na forma matricial. O método escolhe-se com um chip. Um sistema de duas equações com duas incógnitas tem também um gráfico em que as soluções são os pontos de interseção das retas ou curvas.

Um sistema não linear (por exemplo uma circunferência e uma reta) é resolvido e desenhado, por agora sem resolução.

## Exemplos

### O método da adição.

Enunciado:  $2x + 3y = 7$

$x - y = 1$

Adição

#### Resultado

$$x = 2$$

$$y = 1$$

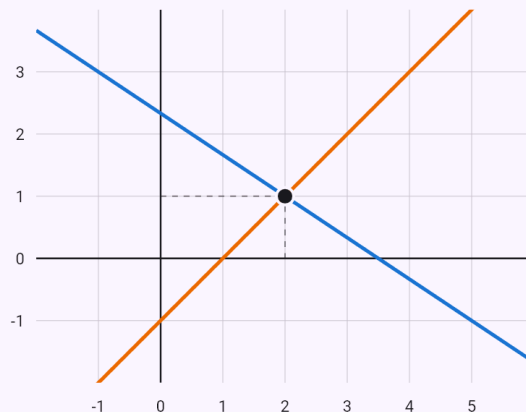
#### Passos

- Multiplicamos a primeira equação por 1 e a segunda por  $-2$  para que  $x$  se anule ao somá-las

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- Somamos as equações,  $x$  se anula:  $5y = 5$
- Resolvemos:  $5y = 5 \Rightarrow y = 1$
- Substituímos na equação 2:  $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

#### Gráfico



$$\begin{aligned} \text{— } 2x + 3y = 7 &\Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3} \\ \text{— } x - y = 1 &\Leftrightarrow y = x - 1 \end{aligned}$$

#### Interseções dos gráficos:

- $(2; 1)$

Cada interseção corresponde a uma solução do sistema: suas coordenadas são os valores de  $x$  e  $y$ .

### Três equações – eliminação de Gauss.

Enunciado:  $x + y + z = 6$

$2x - y + z = 3$

$$x + 2y - z = 2$$

Eliminação de Gauss

#### Resultado

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

#### Passos

- Eliminamos  $x$  das equações seguintes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Eliminamos  $y$  das equações seguintes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Resolvemos:  $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Substituímos na equação 2:  $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Substituímos na equação 1:  $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

## Uma circunferência e uma reta.

Enunciado:  $x^2 + y^2 = 25$

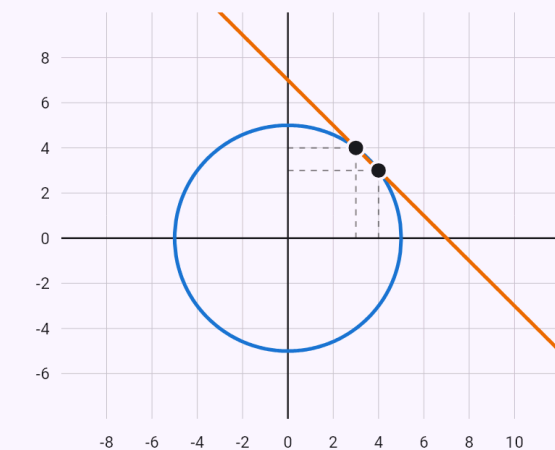
$$x + y = 7$$

#### Resultado

$$x_1 = 3, y_1 = 4$$

$$x_2 = 4, y_2 = 3$$

#### Gráfico



$$\text{— } x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{— } x + y = 7 \Leftrightarrow y = 7 - x$$

Interseções dos gráficos:

$$\bullet (3; 4) \quad \bullet (4; 3)$$

Cada interseção corresponde a uma solução do sistema: suas coordenadas são os valores de  $x$  e  $y$ .

## Limitações conhecidas

---

- Os sistemas não lineares aparecem por agora sem resolução.

# Equações e inequações com parâmetro

Uma letra na equação além da incógnita é um parâmetro – um número real qualquer de que depende a solução. A aplicação leva a equação à forma  $A \cdot x = B$  (uma quadrática a  $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$ ) e discute a solução consoante os valores do parâmetro: onde o coeficiente da incógnita é zero, onde o discriminante é positivo, zero ou negativo, onde as condições excluem uma raiz e para que valores o problema não faz sentido. O resultado resume os casos.

A aplicação escolhe a incógnita pela ordem  $x, y, z, u, v, w, t$ ; as outras letras são parâmetros. Escolhe outra incógnita com a etiqueta «Incógnita» ou escreve-a depois de uma vírgula. O gráfico mostra todas as soluções como uma curva (uma região numa inequação) no plano parâmetro–incógnita; escolhe o valor do parâmetro com o controlo deslizante e lê as soluções na reta vertical.

Num integral indefinido, as outras letras são constantes – a aplicação indica quais não podem ser zero ( $\int dx/(a - bx)^3$  para  $b \neq 0$ ).

## Como introduzir

|                                   |                                                                                                        |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $2ax + a = 4x$                    | Cada letra adicional é um parâmetro; a incógnita é $x$ (ou $y, z, \dots$ ).                            |
| $(q+3)x = 2x + q$ , incógnita $q$ | Podes indicar a incógnita ou o parâmetro depois de uma vírgula (« $a$ é parâmetro», «incógnita $q$ »). |

# Exemplos

## Equação linear – sem solução para $a = 2$ .

Enunciado:  $2ax + a = 4x$

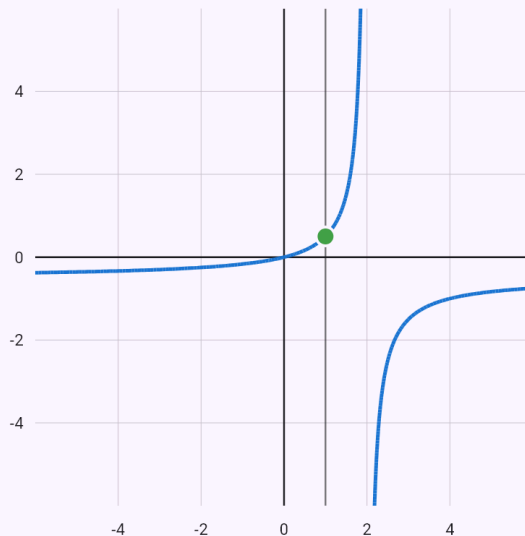
### Resultado

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

### Passos

- A incógnita é  $x$ , o parâmetro  $a$  é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- Passamos à forma básica:  $2(a-2)x = -a$
- Para  $a \neq 2$ ,  $2(a-2)$  é diferente de zero e podemos dividir:  $x = \frac{a}{2(2-a)}$
- Para  $a = 2$ , o coeficiente da incógnita é zero:  $0 \cdot x = -2$ , logo  $x \in \emptyset$

### Gráfico



—  $2xa + a = 4x$

Cada ponto  $[a; x]$  da curva é uma solução. Para um valor escolhido de  $a$ , as soluções estão na reta vertical – move-a com o controlo deslizante.



$a = 1 : x \approx 0,5$

## Equação quadrática – discussão pelo discriminante.

Enunciado:  $x^2 + 6x + p = 0$

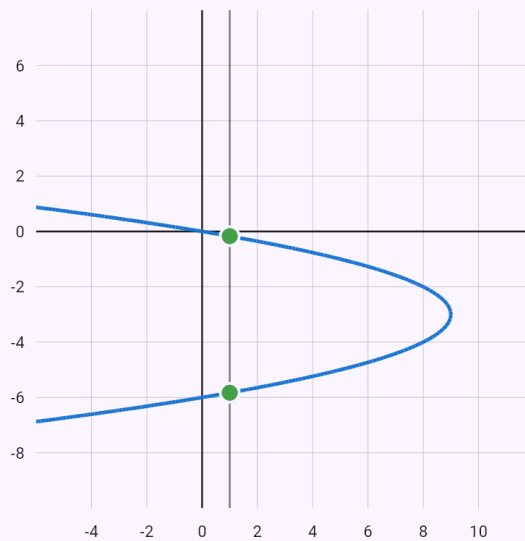
### Resultado

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

### Passos

- A incógnita é  $x$ , o parâmetro  $p$  é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- Passamos à forma básica:  $x^2 + 6x + p = 0$
- O discriminante em função do parâmetro:  
 $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9 - p)$
- Para  $p < 9$ ,  $D > 0$  e a equação tem duas raízes distintas:  
 $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - p}$
- Para  $p > 9$ ,  $D < 0$  e a equação não tem solução real.
- Para  $p = 9$ ,  $D = 0$  e a equação tem uma raiz dupla:  
 $x = -3$

### Gráfico



$$x^2 + 6x + p = 0$$

Cada ponto  $[p; x]$  da curva é uma solução. Para um valor escolhido de  $p$ , as soluções estão na reta vertical – move-a com o controle deslizante.

$p = 1 : x \approx -5,83; -0,17$

## Inequação – o sinal do coeficiente decide o sentido.

Enunciado:  $2x + 2p - 5 < 2px + 7$

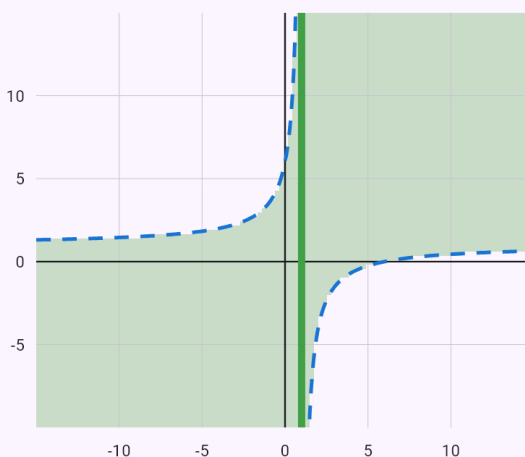
### Resultado

$$\begin{cases} x < \frac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \frac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

### Passos

- A incógnita é  $x$ , o parâmetro  $p$  é um número real qualquer. A solução depende do seu valor, por isso analisamos os casos (discussão da solução).
- Passamos à forma básica:  $2(1 - p)x < 2(6 - p)$
- Para  $p < 1$ ,  $2(1 - p)$  é positivo: ao dividir, o sinal da desigualdade mantém-se:  $x < \frac{p-6}{p-1}$
- Para  $p > 1$ ,  $2(1 - p)$  é negativo: ao dividir, o sinal da desigualdade inverte-se:  $x > \frac{p-6}{p-1}$
- Para  $p = 1$ , o coeficiente da incógnita é zero:  $0 \cdot x < 10$ , logo  $x \in \mathbb{R}$

### Gráfico



$$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \frac{p-6}{p-1}$$

A região sombreada contém todas as soluções  $[p; x]$ . Para um valor escolhido de  $p$ , a solução é a parte destacada da reta vertical – move-a com o controle deslizante.

$p = 1$

## Limitações conhecidas

---

- Por agora equações lineares e quadráticas e inequações lineares; a discussão completa por intervalos só com um parâmetro, com vários os casos gerais.
- Perguntas como «para que  $p$  tem a equação uma raiz positiva» e sistemas com parâmetro ainda não são suportados.

# Cálculo com expressões

Uma expressão sem sinal de igual é transformada segundo o chip escolhido: é simplificada (uma fração algébrica reduzida ao mesmo denominador e simplificada, com condições), desenvolvida, fatorizada (pondo em evidência, com casos notáveis e com a regra de Ruffini) ou decomposta em frações parciais – como no papel, com equações para os coeficientes desconhecidos. A fatoração é nos inteiros; se a expressão se puder fatorar mais nos reais (com raízes irracionais), o passo seguinte mostra-o. A raiz de um monómio é extraída em parte – com raiz par em valor absoluto onde a base pode ser negativa. Também funcionam os números complexos – a divisão multiplicando pelo conjugado.

## Exemplos

### Simplificar uma fração algébrica.

Enunciado:  $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)$  [Simplificar](#)

**Resultado**

$$\frac{x - 1}{x + 1}$$

Condições:  $x \neq -1$

**Passos**

- Condições – o denominador não pode ser zero:  $x \neq -1$
- Fatoramos o numerador e o denominador:
$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2}$$
- Cancelamos o fator comum  $x + 1$ :  $\frac{x - 1}{x + 1}$

### Desenvolver.

Enunciado:  $(x + 2)^3$  [Desenvolver](#)

**Resultado**

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

**Passos**

- Desenvolvemos os parênteses e agrupamos os termos semelhantes:  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

## Fatorizar com a regra de Ruffini.

Enunciado:  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Fatorar

### Resultado

$$(x - 3)(x - 2)(x - 1)$$

### Passos

- As raízes racionais só podem ser divisores do termo independente  $-6$ :  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

- Pelo dispositivo de Briot-Ruffini confirmamos a raiz  $x = 1$  e dividimos o polinômio:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

- Substituindo, vemos que estes candidatos não são raízes:  $P(-1) = -24 \neq 0$

- Pelo dispositivo de Briot-Ruffini confirmamos a raiz  $x = 2$  e dividimos o polinômio:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

## Decomposição em frações parciais.

Enunciado:  $(3x + 5)/(x^2 + x - 2)$

Frações parciais

### Resultado

$$\frac{8}{3(x - 1)} + \frac{1}{3(x + 2)}$$

Condições:  $x \neq -2, x \neq 1$

### Passos

- Condições – o denominador não pode ser zero:  
 $x \neq -2, x \neq 1$

- Fatoramos o denominador:  $(x - 1)(x + 2)$

- Procuramos a decomposição na forma:  $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$

- Multiplicamos ambos os lados pelo denominador  $(x - 1)(x + 2)$ :  $3x + 5 = A(x + 2) + B(x - 1)$

- Substituímos  $x = 1$ :  $8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$

- Substituímos  $x = -2$ :  $-1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

## Extração parcial da raiz com valor absoluto.

Enunciado:  $\sqrt{8a^5 b^2}$  [Simplificar](#)

### Resultado

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

### Passos

- Extraímos da raiz o que for possível – as potências saem para fora (com raiz par em valor absoluto onde a base pode ser negativa):  $2a^2|b|\sqrt{2a}$

## Divisão de números complexos.

Enunciado:  $(3+4i)/(1-2i)$  [Simplificar](#)

### Resultado

$$-1 + 2i$$

### Passos

- Multiplicamos a fração pelo conjugado do denominador,  $1 + 2i$   
$$\frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

# Limites

O MathSolver calcula o limite de uma função de uma variável num ponto, no infinito e os limites laterais, e procede como na escola: primeiro tenta substituir na função. O limite de uma sucessão ( $n \rightarrow \infty$ ) calcula-se da mesma forma – também a forma  $1^\infty$  ou uma soma de potências, da qual se põe em evidência o termo que cresce mais rápido.

Se a substituição der uma indeterminação ( $0/0$ ,  $\infty/\infty$ , ...), escolhe uma transformação conforme a forma da função – fatorizar e simplificar, multiplicar pelo conjugado, dividir pela maior potência, um limite notável ( $\sin x / x$ ) ou a regra de L'Hôpital, também repetidamente.

Um limite infinito, ou um limite que não existe (os limites laterais são diferentes), nunca é apresentado como um número – di-lo por palavras e mostra os limites laterais. O resultado inclui um gráfico da função perto do ponto com o valor do limite assinalado.

No limite de uma sucessão o gráfico mostra os pontos  $a_1, a_2, a_3, \dots$  em vez de uma curva contínua.

## Como introduzir

|                                                     |                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim(x \rightarrow 2) (x^2 - 4)/(x - 2)$           | Um limite escrito: depois da palavra lim, entre parênteses a variável, a seta $\rightarrow$ e o ponto, e depois a função. |
| $\lim(x \rightarrow \infty) (3x^2 + 1)/(x^2 - 5)$   | Um limite no infinito: infinito escreve-se $\infty$ (menos infinito $-\infty$ ).                                          |
| $\lim(x \rightarrow 0^+) 1/x$                       | Um limite lateral: $+$ (à direita) ou $-$ (à esquerda) depois do ponto.                                                   |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$           | A partir de uma fotografia, ou em LaTeX tal como a câmara o reconhece.                                                    |
| $\lim(n \rightarrow \infty) ((n+2)/(n+1))^{(2n+3)}$ | O limite de uma sucessão no infinito.                                                                                     |

# Exemplos

A indeterminação 0/0 – fatorizamos o numerador e simplificamos.

Enunciado:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$

## Resultado

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

## Passos

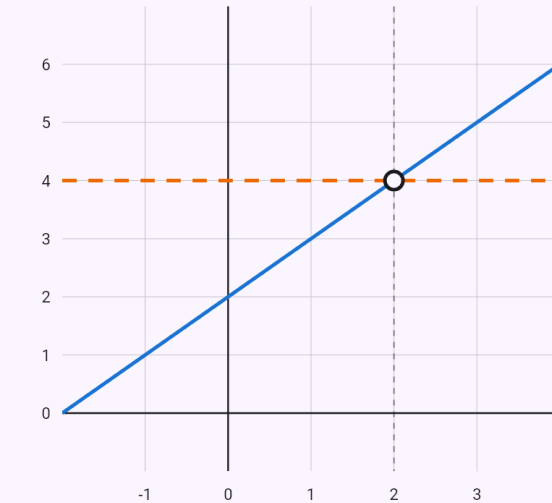
- Ao substituir sai a indeterminação  $\frac{0}{0}$  – é preciso transformar a expressão.

- Transformamos e simplificamos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$

- Substituímos:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

## Gráfico



—  $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$   
- - -  $y = 4$

Limite:

● (2; 4)

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

## Um limite no infinito – numerador e denominador divididos pela maior potência.

Enunciado:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) / (x^2 - 5)$

### Resultado

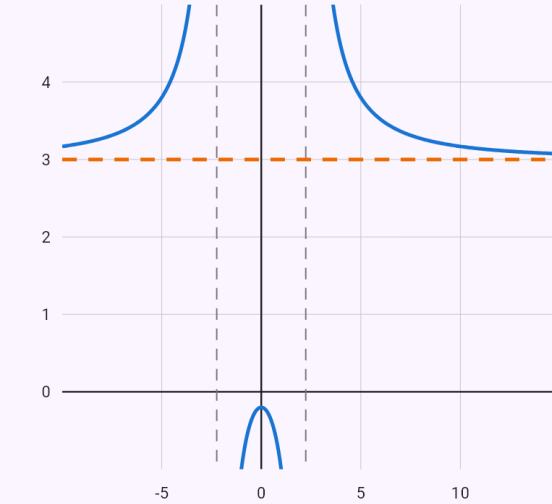
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = 3$$

### Passos

- Ao substituir sai a indeterminação  $\frac{\infty}{\infty}$  – é preciso transformar a expressão.
- Dividimos numerador e denominador por  $x^2$  – os termos do tipo  $c/x^n$  tendem para zero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{5}{x^2}} = 3$$

### Gráfico



$$\begin{aligned} \text{— } y &= \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} \\ \text{--- } y &= 3 \end{aligned}$$

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

## O limite notável $\sin x / x$ .

Enunciado:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x) / x$

### Resultado

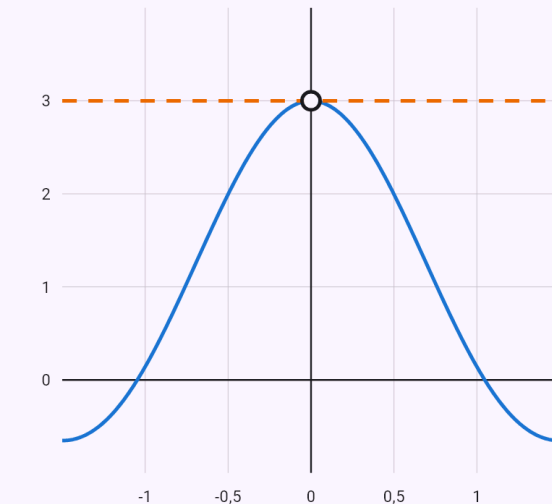
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

### Passos

- Ao substituir sai a indeterminação  $\frac{0}{0}$  – é preciso transformar a expressão.
- Usamos o limite conhecido  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

### Gráfico



$$\begin{aligned} \text{— } y &= \frac{\sin(3x)}{x} \\ \text{--- } y &= 3 \end{aligned}$$

Limite:

● (0; 3)

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

## A regra de L'Hôpital, aplicada duas vezes seguidas.

Enunciado:  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x) / x^2$

### Resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

### Passos

- Ao substituir sai a indeterminação  $\frac{0}{0}$  – é preciso transformar a expressão.

- Regra de L'Hôpital – derivamos o numerador e o denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x + e^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

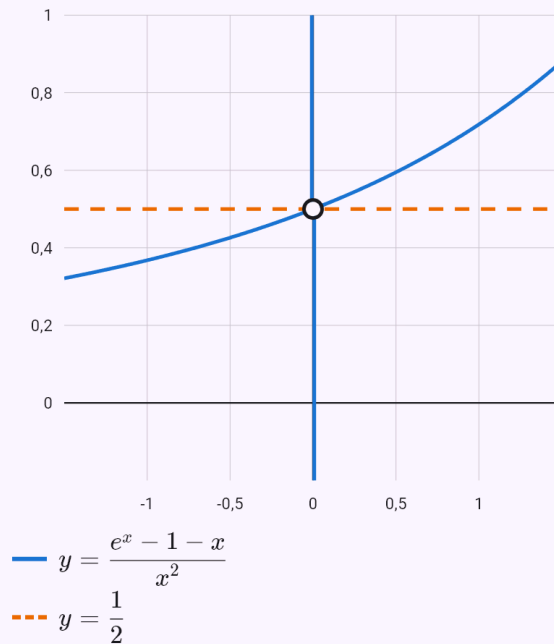
- Ao substituir sai a indeterminação  $\frac{0}{0}$  – é preciso transformar a expressão.

- Regra de L'Hôpital – derivamos o numerador e o denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2}$$

- Substituímos:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$

### Gráfico



Limite:

$$\bullet \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Círculo vazio – o valor de que a função se aproxima (no próprio ponto pode não estar definida); a tracejado – o limite.

## Os limites laterais são diferentes – o limite não existe.

Enunciado:  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$

### Resultado

O limite não existe – os limites laterais são diferentes.

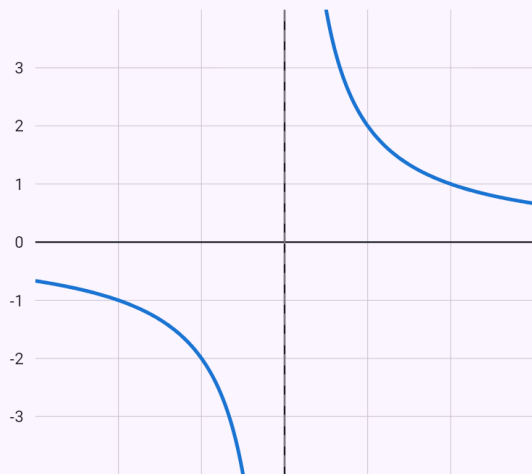
### Passos

- Ao substituir sai um número não nulo sobre zero – o limite é infinito, o sinal à esquerda e à direita:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{0}$$

- Limites laterais:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

### Gráfico



$$y = \frac{1}{x}$$

Limite de uma sucessão – pomos em evidência o termo que cresce mais rápido, 9<sup>n</sup>.

Enunciado:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}}$

Resultado

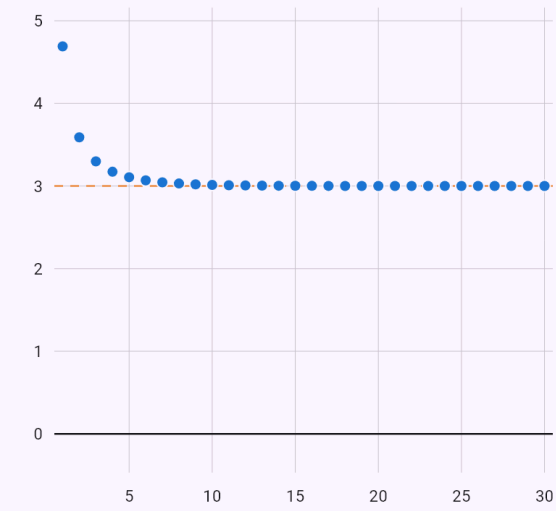
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Passos

- Colocamos em evidência o termo que cresce mais rápido, 9<sup>n</sup> – os outros divididos por ele tendem a zero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{9^n \cdot \left(\frac{6^n}{9^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1\right)} =$$

Gráfico



● termos  $a_n$  — limite da sucessão

Os pontos são os termos  $a_n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Se a sucessão tem limite, os termos aproximam-se dele (tracejado).

# Derivadas

A aplicação deriva pelas regras – da soma, da constante, do produto, do quociente e da função composta – e diz em cada passo que regra usou. Também calcula derivadas de ordem superior e o valor da derivada num ponto. As funções elementares ( $x^2$ ,  $\sin x$ ,  $e^x$ , ...) também podem ser derivadas pela definição, como limite da razão incremental. O resultado inclui um gráfico da função e da sua derivada.

Para uma função dada implicitamente por uma equação em  $x$  e  $y$  ( $x^3 + y^3 = 3xy$ ), deriva ambos os membros em ordem a  $x$  ( $y$  como função de  $x$ ) e isola  $y'$ , ou usa a fórmula  $y' = -F_x / F_y$ ; também calcula  $y''$  e, num ponto dado, a tangente e a normal, e desenha a curva.

Num ponto singular (a curva cruza-se ou tem uma cúspide), encontra as tangentes a partir dos termos de menor grau – no fólio, na origem,  $x = 0$  e  $y = 0$ .

## Como introduzir

|                          |                                                                                                                                                                        |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(x^2 \sin x)'$          | A derivada com uma plica depois do parêntese.                                                                                                                          |
| $\frac{d}{dx} (e^x / x)$ | A notação $d/dx$ , também a partir de uma fotografia $(\frac{d}{dx})$ .                                                                                                |
| $(x^3 \ln x)''$          | Derivadas de ordem superior com várias plicas, ou com a ordem no chip «Derivar».                                                                                       |
| $(x^2 + 1)'  _{x=2}$     | A derivada num ponto, ou indique o ponto no chip.                                                                                                                      |
| $x^2 \sin x$             | Uma expressão com o chip «Derivar» – aí escolhe também a ordem, o ponto e o método (pelas regras / pela definição).                                                    |
| $x^3 + y^3 = 3xy$        | Uma equação em $x$ e $y$ – o chip «Derivada implícita» (ordem 1 ou 2, o método, um ponto $[x_0; y_0]$ ) ou «Gráfico da curva»; escrito $\text{diff}(x^3+y^3=3xy, x)$ . |

# Exemplos

## A derivada do produto.

Enunciado:  $(x^2 \sin x)'$

### Resultado

$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

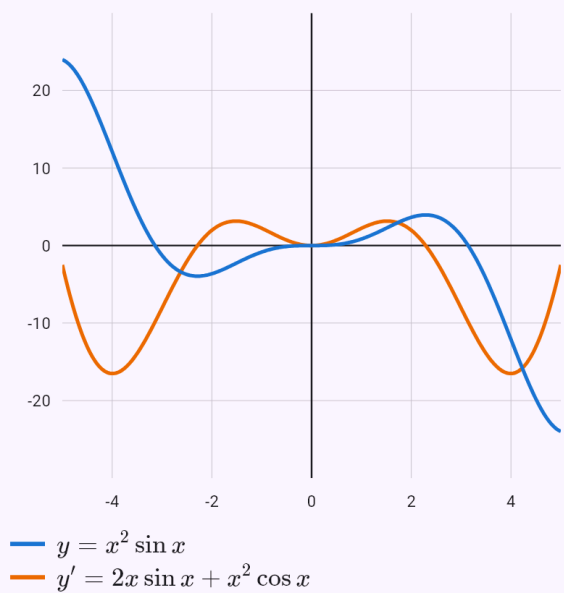
### Passos

- Regra do produto  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Onde a derivada é positiva, a função cresce; onde é negativa, decresce. Nos zeros da derivada a função tem tangente horizontal.

### Gráfico



## A derivada do quociente.

Enunciado:  $d/dx (e^x / x)$

### Resultado

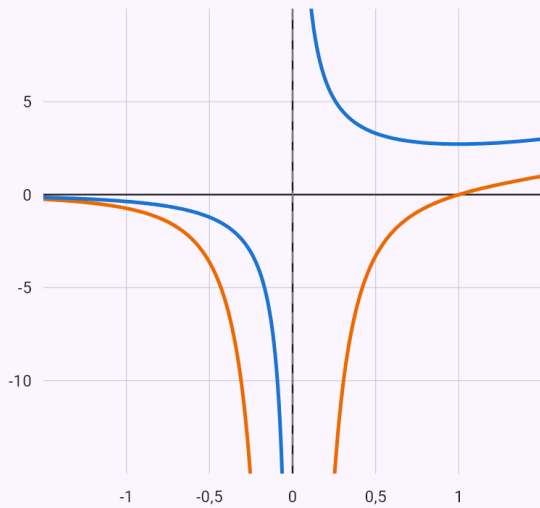
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

### Passos

- Regra do quociente  $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

### Gráfico



$$\text{— } y = \frac{e^x}{x}$$
$$\text{— } y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Onde a derivada é positiva, a função cresce; onde é negativa, decresce. Nos zeros da derivada a função tem tangente horizontal.

## A segunda derivada.

Enunciado:  $(x^3 \ln x)''$

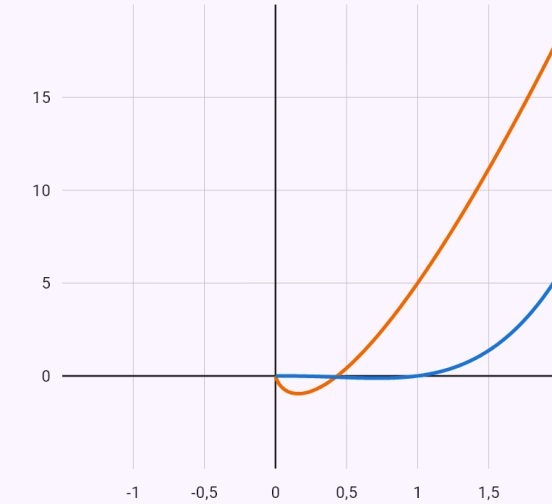
### Resultado

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

### Passos

- Derivada de ordem 1:  $y' = (x^3 \ln x)'$
- Regra do produto  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$   
 $(x^3 \ln x)' = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- Derivada de ordem 2:  $y'' = (x^2 + 3x^2 \ln x)'$
- A derivada de uma soma é a soma das derivadas:  
 $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = (x^2)' + (3x^2 \ln x)'$
- Tiramos a constante para fora da derivada:  
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x^2 \ln x)'$
- Regra do produto  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$   
 $(x^2 \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Substituímos:  
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Substituímos:  $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Simplificamos:  $y'' = 5x + 6x \ln x$

### Gráfico



$y = x^3 \ln x$   
 $y'' = 5x + 6x \ln x$

Onde a segunda derivada é positiva, a função é convexa (curvada para cima); onde é negativa, é côncava (curvada para baixo).

## A derivada pela definição, como limite.

Enunciado:  $x^2$  Derivar → Pela definição

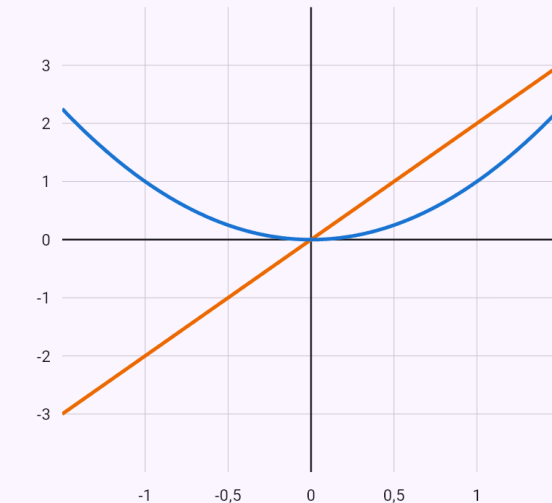
### Resultado

$$y' = 2x$$

### Passos

- Derivada pela definição  
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
- Ao substituir sai a indeterminação  $\frac{0}{0}$  - é preciso transformar a expressão.
- Transformamos e simplificamos  
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)$$
- Substituímos:  $\lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$

### Gráfico



$y = x^2$   
 $y' = 2x$

Onde a derivada é positiva, a função cresce; onde é negativa, decresce. Nos zeros da derivada a função tem tangente horizontal.

## Derivada implícita – o fólio de Descartes, a tangente e a normal em $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ , a segunda derivada.

Enunciado:  $x^3 + y^3 = 3xy$

Derivada implícita, ordem 2, ponto  $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$

### Resultado

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

$$t: y = 3 - x$$

$$n: y = x$$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Condições:  $y^2 - x \neq 0$

### Passos

- A função  $y = y(x)$  é dada pela equação  $x^3 + y^3 = 3xy$  – derivamos ambos os membros em ordem a  $x$ , tomando  $y$  como função de  $x$  (regra da cadeia: p. ex.  $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$ ).
- Derivamos ambos os membros:  
 $(x^3 + y^3)' = (3xy)' \Rightarrow 3y^2 y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Os termos com  $y'$  para a esquerda, o resto para a direita, e pomos  $y'$  em evidência:  $y'(3y^2 - 3x) = -3x^2 + 3y$

- Isolamos  $y'$ :  $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$

- A segunda derivada – derivamos  $y'$  de novo em ordem a  $x$  ( $y$  e  $y'$  são funções de  $x$ )

$$y'' = \left( -\frac{x^2 - y}{y^2 - x} \right)' = \frac{2x^2 y y' - 2xy^2 - y^2 y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

- Substituímos  $y'$

$$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{(-y^2 + x)^3}$$

- Sobre a curva verifica-se  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  – o que simplifica a expressão:  $y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$

- O ponto  $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$  pertence à curva:

$$x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}} = 0$$

- A derivada no ponto  $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$  – o declive da tangente:

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

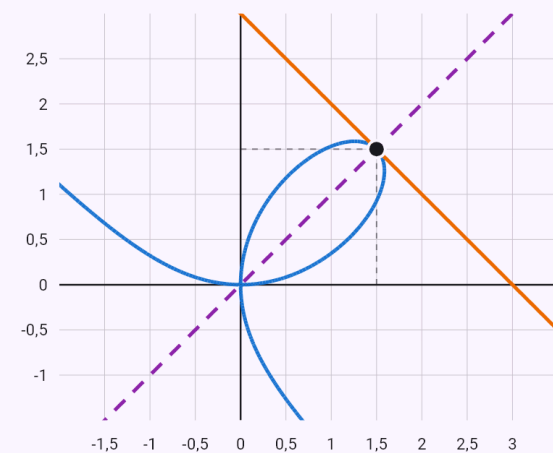
- A tangente:  $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$

- A normal é perpendicular à tangente, o seu declive é 1:

$$y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$$

- A segunda derivada no ponto:  $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

### Gráfico



—  $x^3 + y^3 = 3xy$   
 — t:  $y = 3 - x$   
 - - - n:  $y = x$

A curva dada pela equação. No ponto dado, a tangente (traço contínuo) e a normal (tracejado).

# Estudo de uma função

A aplicação estuda uma função pela ordem habitual: domínio, paridade, interseções com os eixos, sinal da função, limites nos extremos do domínio e assíntotas, primeira derivada – monotonia e extremos (também por derivadas de ordem superior), segunda derivada – concavidades e pontos de inflexão, e por fim o contradomínio. Resume tudo e desenha um gráfico com os pontos assinalados.

Numa função trigonométrica, o aplicativo encontra o período, estuda a função em um período e escreve os resultados com o período (um máximo em  $x = \pi/2 + 2k\pi$ ); se só a derivada for periódica ( $x + 2 \sin x$ ), os extremos e a monotonia se repetem com o período. Os módulos são removidos pelos sinais nos intervalos e nos bicos se comparam as derivadas laterais; onde a derivada é infinita, aparece uma tangente vertical. Módulos encaixados e somas de módulos são estudados por troços; onde a função é constante num intervalo, isso é indicado com o seu valor (um mínimo em cada ponto do intervalo).

## Como introduzir

---

estudo  $y = x^3 - 3x$

Com a palavra «estudo» antes da função.

---

$x^3 - 3x$

Uma função com o chip «Estudo da função».

---

# Exemplos

## Um polinómio – extremos e um ponto de inflexão.

Enunciado:  $x^3 - 3x$

Estudo da função

### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Paridade: ímpar

Zeros:  $[-\sqrt{3}; 0]$ ,  $[0; 0]$ ,  $[\sqrt{3}; 0]$

Crescente:  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, \infty)$

Decrescente:  $[-1, 1]$

Máximo local:  $[-1; 2]$

Mínimo local:  $[1; -2]$

Convexa:  $[0, \infty)$

Côncava:  $(-\infty, 0]$

Pontos de inflexão:  $[0; 0]$

### Passos

- Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$  - a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).
- Interseções com o eixo x:  
 $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$ , ou seja  $[-\sqrt{3}; 0]$ ,  $[0; 0]$ ,  $[\sqrt{3}; 0]$
- Interseção com o eixo y:  $f(0) = 0$ , ou seja  $[0; 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

|        |                        |                  |                 |                      |
|--------|------------------------|------------------|-----------------|----------------------|
| $f(x)$ | $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3}, 0)$ | $(0, \sqrt{3})$ | $(\sqrt{3}, \infty)$ |
|        | -                      | +                | -               | +                    |

A função é positiva para  $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$  e negativa para  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

- Limites nos extremos do domínio  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- A função não tem assíntotas verticais.
- Não há assíntota em  $\pm\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
- Primeira derivada:  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$
- Pontos estacionários:  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$
- Sinal da primeira derivada - onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         |                 |            |               |
|---------|-----------------|------------|---------------|
|         | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$  | $(1, \infty)$ |
| $f'(x)$ | +               | -          | +             |
| $f(x)$  | $\nearrow$      | $\searrow$ | $\nearrow$    |

A função é crescente em  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, \infty)$  e decrescente em  $[-1, 1]$

- Em  $x = -1$ :  $f''(-1) = -6 < 0$  - máximo local.
- Em  $x = 1$ :  $f''(1) = 6 > 0$  - mínimo local.
- Máximo local  $[-1; 2]$ , mínimo local  $[1; -2]$

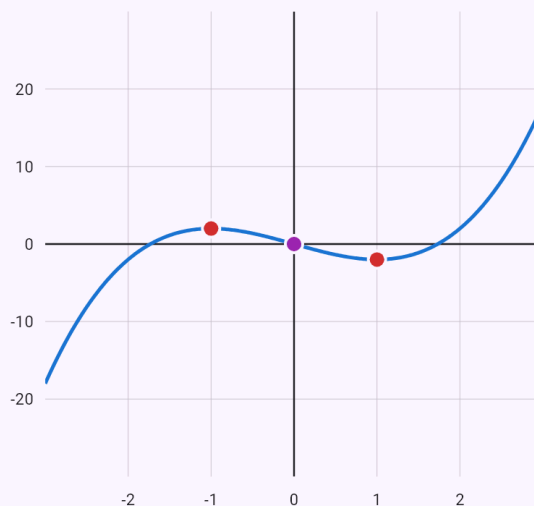
- Segunda derivada:  $f''(x) = 6x$
- Candidatos a pontos de inflexão:  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

|          | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|----------|----------------|---------------|
| $f''(x)$ | -              | +             |
| $f(x)$   | ∩              | ∪             |

A função é convexa em  $[0, \infty)$  e côncava em  $(-\infty, 0]$

- Em  $x = 0$ :  $f'''(0) = 6 > 0$  – a primeira derivada não nula (a partir da terceira) é de ordem ímpar: ponto de inflexão.
- Pontos de inflexão:  $[0; 0]$
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites:  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

## Gráfico



$y = x^3 - 3x$

Pontos notáveis:

- máximo  $(-1; 2)$
- inflexão  $(0; 0)$
- mínimo  $(1; -2)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

## Uma função racional – assíntotas.

Enunciado:  $x^2/(x - 1)$  **Estudo da função**

### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

Paridade: nem par nem ímpar

Zeros:  $[0; 0]$

Crescente:  $(-\infty, 0]$ ,  $[2, \infty)$

Decrescente:  $[0, 1)$ ,  $(1, 2]$

Máximo local:  $[0; 0]$

Mínimo local:  $[2; 4]$

Convexa:  $(1, \infty)$

Côncava:  $(-\infty, 1)$

Assíntotas:  $x = 1$ ,  $y = x + 1$

### Passos

- Domínio – condições  $x \neq 1$ :  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- O domínio  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  não é simétrico em relação a zero – a função não é par nem ímpar.
- Interseções com o eixo x:  $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ , ou seja  $[0; 0]$
- Interseção com o eixo y:  $f(0) = 0$ , ou seja  $[0; 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

|        | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|--------|----------------|----------|---------------|
| $f(x)$ | -              | -        | +             |

A função é positiva para  $x \in (1, \infty)$  e negativa para  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Assíntotas verticais (o limite aí é infinito):  $x = 1$

- Assíntota em  $\pm\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ,  
 $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 1$  – a reta  $y = x + 1$

- Primeira derivada

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

- Pontos estacionários:  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---------|----------------|----------|----------|---------------|
| $f'(x)$ | +              | -        | -        | +             |
| $f(x)$  | ↗              | ↘        | ↘        | ↗             |

A função é crescente em  $(-\infty, 0]$ ,  $[2, \infty)$  e decrescente em  $[0, 1)$ ,  $(1, 2]$

- Em  $x = 0$ :  $f''(0) = -2 < 0$  – máximo local.

- Em  $x = 2$ :  $f''(2) = 2 > 0$  – mínimo local.

- Máximo local  $[0; 0]$ , mínimo local  $[2; 4]$

- Segunda derivada:  $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

- A equação  $f''(x) = 0$  não tem solução.

- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

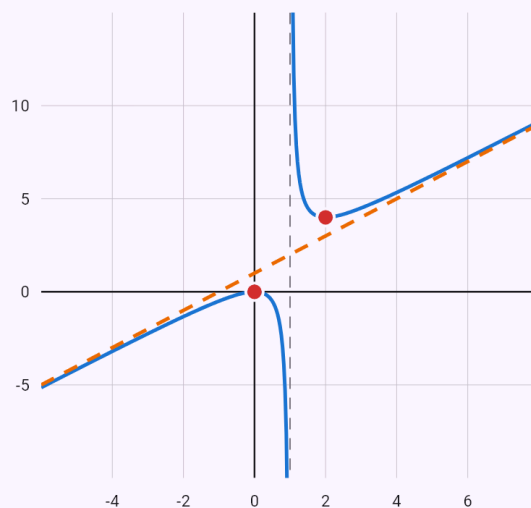
|          | $(-\infty, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|----------|----------------|---------------|
| $f''(x)$ | $-$            | $+$           |
| $f(x)$   | $\cap$         | $\cup$        |

A função é convexa em  $(1, \infty)$  e côncava em  $(-\infty, 1)$

- A função não tem pontos de inflexão.

- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites:  $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

## Gráfico



$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$y = x + 1$$

### Pontos notáveis:

● máximo  $(0; 0)$  ● mínimo  $(2; 4)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

## Função periódica – tudo em um período, os resultados com o período.

Enunciado:  $\sin 2x + 2\cos x$

### Estudo da função

#### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Paridade: nem par nem ímpar

Período:  $p = 2\pi$

Zeros:  $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$

Crescente:  $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Decrescente:  $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Máximo local:  $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Mínimo local:  $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Convexa:

$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$

Côncava:

$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi,$

Pontos de inflexão:

$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

#### Passos

• Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

• A função é periódica de período  $2\pi$ : estudamos em um período (de 0 a  $2\pi$ ) e repetimos os resultados com o período,  $k \in \mathbb{Z}$ .

•  $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$  – não é  $f(x)$  nem  $-f(x)$ : a função não é par nem ímpar.

• Interseções com o eixo x:  $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , ou seja  $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$

• Interseção com o eixo y:  $f(0) = 2$ , ou seja  $[0; 2]$

• O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

|        |                      |                                   |                          |
|--------|----------------------|-----------------------------------|--------------------------|
|        | $(0, \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ | $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ |
| $f(x)$ | +                    | -                                 | +                        |

A função é positiva para  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$  e negativa para  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

• Uma função periódica (que não é constante) não tem limite em  $\pm\infty$ .

• Primeira derivada:  $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$

• Pontos estacionários

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2}$

- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         |                      |                                   |                                    |                          |
|---------|----------------------|-----------------------------------|------------------------------------|--------------------------|
|         | $(0, \frac{\pi}{6})$ | $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ | $(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ | $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ |
| $f'(x)$ | +                    | -                                 | +                                  | +                        |
| $f(x)$  | $\nearrow$           | $\searrow$                        | $\nearrow$                         | $\nearrow$               |

A função é crescente em  $[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$  e decrescente em  $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$

- Máximo local  $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$ , mínimo local  $[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$

- Segunda derivada:  $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$

- Candidatos a pontos de inflexão

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$$

- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

|          |                      |                                               |                                                |
|----------|----------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|
|          | $(0, \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, \pi + \arcsin(\frac{1}{4}))$ | $(\pi + \arcsin(\frac{1}{4}), \frac{3\pi}{2})$ |
| $f''(x)$ | -                    | +                                             | -                                              |
| $f(x)$   | $\cap$               | $\cup$                                        | $\cap$                                         |

A função é convexa em e côncava em

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$$

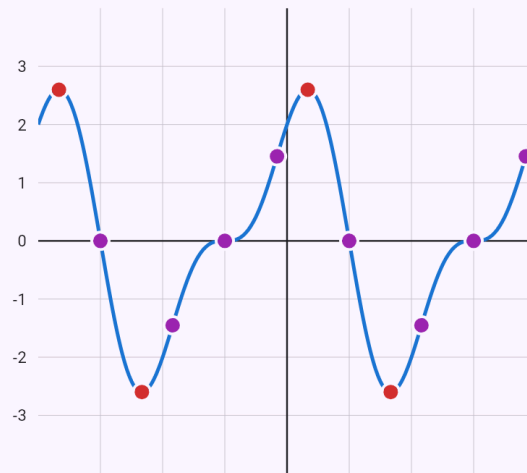
- Pontos de inflexão

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right], \left[2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$$

- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos

$$\text{Im}(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

### Gráfico



$$-3\pi/2 \quad -\pi \quad -\pi/2 \quad 0 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 3\pi/2$$

$$y = \sin 2x + 2\cos x$$

#### Pontos notáveis:

- máximo  $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$     inflexão  $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- mínimo  $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexão  $\left(-\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexão  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- inflexão  $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- máximo  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$     inflexão  $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- mínimo  $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexão  $\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexão  $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- inflexão  $\left(2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assintotas tracejadas.

# Tangente – assíntotas verticais, imagem $\mathbb{R}$ .

Enunciado: tg x      Estudo da função

## Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Paridade: ímpar

Período:  $p = \pi$

Zeros:  $[k\pi; 0]$

Crescente:  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Convexa:  $\left[ k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Côncava:  $\left( \frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi \right]$

Pontos de inflexão:  $[k\pi; 0]$

Assíntotas:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

## Passos

- Domínio – condições  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ :  
 $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
- A função é periódica de período  $\pi$ : estudamos em um período (de 0 a  $\pi$ ) e repetimos os resultados com o período,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $f(-x) = -\tan x = -f(x)$  – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).

• Interseções com o eixo x:  $f(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$ , ou seja  $[k\pi; 0]$

• Interseção com o eixo y:  $f(0) = 0$ , ou seja  $[0; 0]$

• O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

|        | $(0, \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ |
|--------|----------------------|------------------------|
| $f(x)$ | +                    | -                      |

A função é positiva para  $x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$  e negativa para  $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$

• Uma função periódica (que não é constante) não tem limite em  $\pm\infty$ .

• Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

• Assíntotas verticais (o limite aí é infinito):  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

• Primeira derivada:  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

• A equação  $f'(x) = 0$  não tem solução – não há pontos estacionários.

• Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         | $(0, \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ |
|---------|----------------------|------------------------|
| $f'(x)$ | +                    | +                      |
| $f(x)$  | ↗                    | ↘                      |

A função é crescente em  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

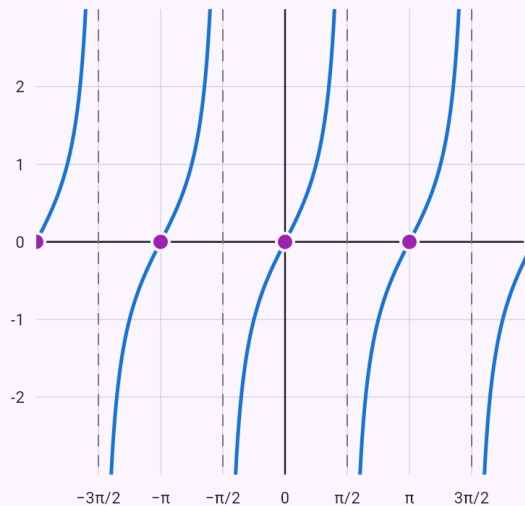
- A função não tem extremos locais.
- Segunda derivada:  $f''(x) = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$
- Candidatos a pontos de inflexão:  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

|          | $(0, \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ |
|----------|----------------------|------------------------|
| $f''(x)$ | +                    | -                      |
| $f(x)$   | ∪                    | ∩                      |

A função é convexa em  $\left[ k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$  e côncava em  $\left( \frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi \right]$

- Pontos de inflexão:  $[k\pi; 0]$
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites:  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

## Gráfico



$y = \text{tg } x$

Pontos notáveis:

- inflexão  $(-2\pi; 0)$       inflexão  $(-\pi; 0)$
- inflexão  $(0; 0)$       inflexão  $(\pi; 0)$       inflexão  $(2\pi; 0)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

## Tangente hiperbólica – assíntotas horizontais $y = \pm 1$ .

Enunciado:  $\tanh x$       Estudo da função

### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = (-1, 1)$

Paridade: ímpar

Zeros:  $[0; 0]$

Crescente:  $\mathbb{R}$

Convexa:  $(-\infty, 0]$

Côncava:  $[0, \infty)$

Pontos de inflexão:  $[0; 0]$

Assíntotas:  $y = -1$ ,  $y = 1$

### Passos

- Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$  – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).
- Interseções com o eixo  $x$ :  $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ , ou seja  $[0; 0]$
- Interseção com o eixo  $y$ :  $f(0) = 0$ , ou seja  $[0; 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

|        | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|--------|----------------|---------------|
| $f(x)$ | $-$            | $+$           |

A função é positiva para  $x \in (0, \infty)$  e negativa para  $x \in (-\infty, 0)$

- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

|          | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|----------|----------------|---------------|
| $f''(x)$ | $+$            | $-$           |
| $f(x)$   | $\cup$         | $\cap$        |

A função é convexa em  $(-\infty, 0]$  e côncava em  $[0, \infty)$

- Em  $x = 0$ :  $f'''(0) = -2 < 0$  – a primeira derivada não nula (a partir da terceira) é de ordem ímpar: ponto de inflexão.
- Pontos de inflexão:  $[0; 0]$
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites:  $\text{Im}(f) = (-1, 1)$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

- A função não tem assíntotas verticais.

- Assíntota em  $-\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  – a reta  $y = -1$

- Assíntota em  $+\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  
 $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  – a reta  $y = 1$

- Primeira derivada:  $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$

- A equação  $f'(x) = 0$  não tem solução – não há pontos estacionários.

- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         | $(-\infty, \infty)$ |
|---------|---------------------|
| $f'(x)$ | $+$                 |
| $f(x)$  | $\nearrow$          |

A função é crescente em  $\mathbb{R}$

- A função não tem extremos locais.

- Segunda derivada:  $f''(x) = -\frac{2 \tanh x}{\cosh^2 x}$

- Candidatos a pontos de inflexão:  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

## Só a derivada é periódica – os valores dos extremos crescem com k.

Enunciado:  $x + 2\sin x$

Estudo da função

### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

Paridade: ímpar

Período:  $p = 2\pi$

Zeros:  $[0; 0]$

Crescente:  $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Decrescente:  $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Máximo local:  $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Mínimo local:  $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Convexa:  $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$

Côncava:  $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$

Pontos de inflexão:  $[2k\pi; 2k\pi], [\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

### Passos

- Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$
- A função não é periódica, mas sua derivada é (período  $2\pi$ ): a monotonia, os extremos e a concavidade se repetem com esse período,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$  – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).

- Interseções com o eixo x:  $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ , ou seja  $[0; 0]$

- Interseção com o eixo y:  $f(0) = 0$ , ou seja  $[0; 0]$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Primeira derivada:  $f'(x) = 2\cos x + 1$

- Pontos estacionários

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         | $(0, \frac{2\pi}{3})$ | $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ | $(\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$ |
|---------|-----------------------|------------------------------------|--------------------------|
| $f'(x)$ | +                     | -                                  | +                        |
| $f(x)$  | $\nearrow$            | $\searrow$                         | $\nearrow$               |

A função é crescente em  $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$  e decrescente em  $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

- Máximo local  $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ , mínimo local  $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

- Segunda derivada:  $f''(x) = -2\sin x$

- Candidatos a pontos de inflexão:  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$

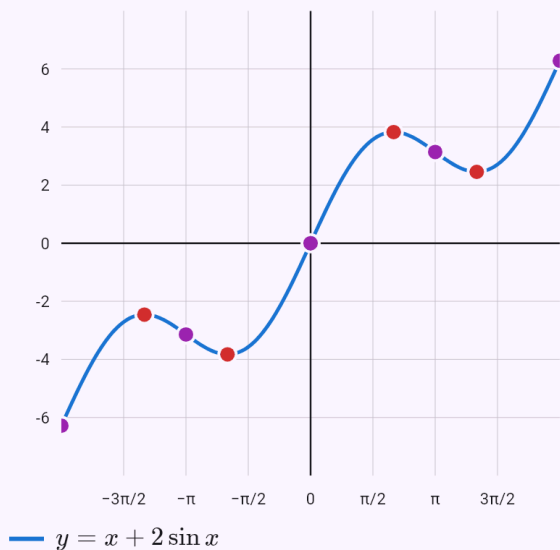
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

|          | $(0, \pi)$ | $(\pi, 2\pi)$ |
|----------|------------|---------------|
| $f''(x)$ | $-$        | $+$           |
| $f(x)$   | $\cap$     | $\cup$        |

A função é convexa em  $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$  e côncava em  $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$

- Pontos de inflexão:  $[2k\pi; 2k\pi]$ ,  $[\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

### Gráfico



### Pontos notáveis:

- inflexão  $(-2\pi; -2\pi)$
- máximo  $\left(-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- inflexão  $(-\pi; -\pi)$
- mínimo  $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexão  $(0; 0)$
- máximo  $\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexão  $(\pi; \pi)$
- mínimo  $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- inflexão  $(2\pi; 2\pi)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

## Módulo – bicos, derivadas laterais.

Enunciado:  $|x^2 - 1|$  | Estudo da função

### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

Paridade: par

Zeros:  $[-1; 0]$ ,  $[1; 0]$

Crescente:  $[-1, 0]$ ,  $[1, \infty)$

Decrescente:  $(-\infty, -1]$ ,  $[0, 1]$

Máximo local:  $[0; 1]$

Mínimo local:  $[-1; 0]$ ,  $[1; 0]$

Convexa:  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, \infty)$

Côncava:  $[-1, 1]$

### Passos

- Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$
- Removemos os módulos pelo sinal de seus argumentos em cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1) \\ 1 - x^2, & x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

- a função é par (o gráfico é simétrico em relação ao eixo y).

$$f(-x) = |(-x)^2 - 1| = |x^2 - 1| = f(x)$$

- Interseções com o eixo x:  $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$ , ou seja  $[-1; 0]$ ,  $[1; 0]$

- Interseção com o eixo y:  $f(0) = 1$ , ou seja  $[0; 1]$

- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

|        |                 |           |               |
|--------|-----------------|-----------|---------------|
|        | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, \infty)$ |
| $f(x)$ | +               | +         | +             |

A função é positiva para

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$  e negativa para  $x \in \emptyset$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- A função não tem assíntotas verticais.

- Não há assíntota em  $-\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

- Não há assíntota em  $+\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

- Primeira derivada

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{|x^2 - 1|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x^2 - 1|}$$

- Pontos estacionários:  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

- Em  $x = -1$  não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ( $f'_-(-1) = -2$ ,  $f'_+(-1) = 2$ ), o gráfico tem ali um bico.

- Em  $x = 1$  não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ( $f'_-(1) = -2$ ,  $f'_+(1) = 2$ ), o gráfico tem ali um bico.

- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$  | $(0, 1)$   | $(1, \infty)$ |
|---------|-----------------|------------|------------|---------------|
| $f'(x)$ | -               | +          | -          | +             |
| $f(x)$  | $\searrow$      | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$    |

A função é crescente em  $[-1, 0]$ ,  $[1, \infty)$  e decrescente em  $(-\infty, -1]$ ,  $[0, 1]$

- Em  $x = 0$ :  $f''(0) = -2 < 0$  – máximo local.
- Máximo local  $[0; 1]$ , mínimo local  $[-1; 0]$ ,  $[1; 0]$
- Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)^3}{|x^2 - 1|^3} = \frac{2(x - 1)^3(x + 1)^3}{|x^2 - 1|^3}$$

- A equação  $f''(x) = 0$  não tem solução.
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

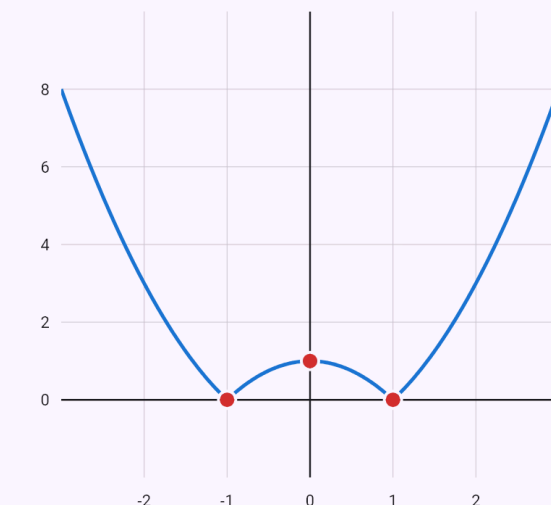
|          | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|----------|-----------------|-----------|---------------|
| $f''(x)$ | +               | -         | +             |
| $f(x)$   | $\cup$          | $\cap$    | $\cup$        |

A função é convexa em  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, \infty)$  e côncava em  $[-1, 1]$

- A função não tem pontos de inflexão.

- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites:  $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

### Gráfico



$$y = |x^2 - 1|$$

### Pontos notáveis:

- mínimo  $(-1; 0)$
- máximo  $(0; 1)$
- mínimo  $(1; 0)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

## Raiz cúbica – tangente vertical em zero.

Enunciado:  $x^{1/3}$

Estudo da função

### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Paridade: ímpar

Zeros:  $[0; 0]$

Crescente:  $\mathbb{R}$

Convexa:  $(-\infty, 0]$

Côncava:  $[0, \infty)$

Pontos de inflexão:  $[0; 0]$

### Passos

- Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$  – a função é ímpar (o gráfico é simétrico em relação à origem).
- Interseções com o eixo x:  $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ , ou seja  $[0; 0]$
- Interseção com o eixo y:  $f(0) = 0$ , ou seja  $[0; 0]$
- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

|        | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|--------|----------------|---------------|
| $f(x)$ | -              | +             |

A função é positiva para  $x \in (0, \infty)$  e negativa para  $x \in (-\infty, 0)$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- A função não tem assíntotas verticais.
- Não há assíntota em  $-\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , mas  $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- Não há assíntota em  $+\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , mas  $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- Primeira derivada:  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- A equação  $f'(x) = 0$  não tem solução – não há pontos estacionários.
- Em  $x = 0$  a derivada é infinita ( $f'_-(0) = \infty$ ,  $f'_+(0) = \infty$ ): o gráfico tem ali uma tangente vertical.
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---------|----------------|---------------|
| $f'(x)$ | +              | +             |
| $f(x)$  | $\nearrow$     | $\nearrow$    |

A função é crescente em  $\mathbb{R}$

- A função não tem extremos locais.
- Segunda derivada:  $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

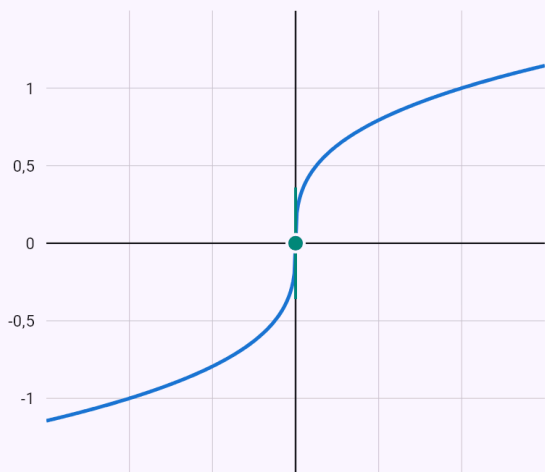
- A equação  $f''(x) = 0$  não tem solução.
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é convexa, onde é negativa côncava:

|          | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|----------|----------------|---------------|
| $f''(x)$ | +              | -             |
| $f(x)$   | ∪              | ∩             |

A função é convexa em  $(-\infty, 0]$  e côncava em  $[0, \infty)$

- Pontos de inflexão:  $[0; 0]$
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites:  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

#### Gráfico



-1 -0,5 0 0,5 1

$y = x^{\frac{1}{3}}$

Pontos notáveis:

- inflexão  $(0; 0)$
- tangente vertical  $(0; 0)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

## Módulo encaixado – por troços, função par.

Enunciado:  $|-x^2 + 2|x| + 3|$

### Estudo da função

#### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

Paridade: par

Zeros:  $[-3; 0], [3; 0]$

Crescente:  $[-3, -1], [0, 1], [3, \infty)$

Decrescente:  $(-\infty, -3], [-1, 0], [1, 3]$

Máximo local:  $[-1; 4], [1; 4]$

Mínimo local:  $[-3; 0], [0; 3], [3; 0]$

Convexa:  $(-\infty, -3], [3, \infty)$

Côncava:  $[-3, 0], [0, 3]$

#### Passos

- Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$
- Removemos os módulos pelo sinal de seus argumentos em cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty, -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3, 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0, 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

- a função é par (o gráfico é simétrico em relação ao eixo y).

$$f(-x) = | -(-x)^2 + 2|(-x)| + 3 | = |-x^2 + 2|x| + 3| :$$

- Interseções com o eixo x:  $f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$ , ou seja  $[-3; 0], [3; 0]$

- Interseção com o eixo y:  $f(0) = 3$ , ou seja  $[0; 3]$

- O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

|        | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|--------|-----------------|-----------|---------------|
| $f(x)$ | +               | +         | +             |

A função é positiva para

$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$  e negativa para  $x \in \emptyset$

- Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- A função não tem assíntotas verticais.

- Não há assíntota em  $-\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

- Não há assíntota em  $+\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

- Primeira derivada

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x| \cdot |-x^2 + 2|x| + 3|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x| \cdot |-x^2 + 2|x| + 3|}$$

- Pontos estacionários:  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

- Em  $x = -3$  não existe derivada: as derivadas laterais

são diferentes ( $f'_-(-3) = -4$ ,  $f'_+(-3) = 4$ ), o gráfico tem ali um bico.

- Em  $x = 0$  não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ( $f'_-(0) = -2$ ,  $f'_+(0) = 2$ ), o gráfico tem ali um bico.
- Em  $x = 3$  não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ( $f'_-(3) = -4$ ,  $f'_+(3) = 4$ ), o gráfico tem ali um bico.
- Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         | $(-\infty, -3)$ | $(-3, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, 3)$ |
|---------|-----------------|------------|-----------|----------|----------|
| $f'(x)$ | -               | +          | -         | +        | -        |
| $f(x)$  | ↘               | ↗          | ↘         | ↗        | ↘        |

A função é crescente em  $[-3, -1]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[3, \infty)$  e decrescente em  $(-\infty, -3]$ ,  $[-1, 0]$ ,  $[1, 3]$

- Em  $x = -1$ :  $f''(-1) = -2 < 0$  – máximo local.
- Em  $x = 1$ :  $f''(1) = -2 < 0$  – máximo local.
- Máximo local  $[-1; 4]$ ,  $[1; 4]$ , mínimo local  $[-3; 0]$ ,  $[0; 3]$ ,  $[3; 0]$
- Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

- A equação  $f''(x) = 0$  não tem solução.
- Sinal da segunda derivada – onde é positiva a função é

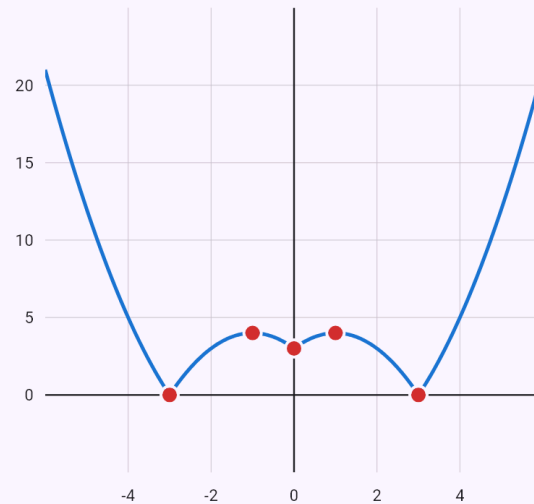
convexa, onde é negativa côncava:

|          | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 0)$ | $(0, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|----------|-----------------|-----------|----------|---------------|
| $f''(x)$ | +               | -         | -        | +             |
| $f(x)$   | ∪               | ∩         | ∩        | ∪             |

A função é convexa em  $(-\infty, -3]$ ,  $[3, \infty)$  e côncava em  $[-3, 0]$ ,  $[0, 3]$

- A função não tem pontos de inflexão.
- Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites:  $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

### Gráfico



$$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$$

#### Pontos notáveis:

- mínimo  $(-3; 0)$  • máximo  $(-1; 4)$  • mínimo  $(0; 3)$
- máximo  $(1; 4)$  • mínimo  $(3; 0)$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

## Soma de módulos – um troço constante e duas assíntotas oblíquas.

Enunciado:  $|x - 2| + |x + 3|$

Estudo da função

### Resultado

Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem:  $\text{Im}(f) = [5, \infty)$

Paridade: nem par nem ímpar

Crescente:  $[2, \infty)$

Decrescente:  $(-\infty, -3]$

Constante:  $[-3, 2]$

Mínimo local:  $f(x) = 5, x \in [-3, 2]$

Assíntotas:  $y = -2x - 1, y = 2x + 1$

### Passos

• Domínio:  $D(f) = \mathbb{R}$

• Removemos os módulos pelo sinal de seus argumentos em cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty, -3) \\ 5, & x \in [-3, 2] \\ 2x + 1, & x \in [2, \infty) \end{cases}$$

• - não é  $f(x)$  nem  $-f(x)$ : a função não é par nem ímpar.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x|$$

• A equação  $f(x) = 0$  não tem solução – o gráfico não corta o eixo x.

• Interseção com o eixo y:  $f(0) = 5$ , ou seja  $[0; 5]$

• O sinal da função entre os zeros e os pontos fora do domínio:

• Sinal da primeira derivada – onde é positiva a função cresce, onde é negativa decresce:

|         | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 2)$     | $(2, \infty)$ |
|---------|-----------------|---------------|---------------|
| $f'(x)$ | -               | 0             | +             |
| $f(x)$  | $\searrow$      | $\rightarrow$ | $\nearrow$    |

A função é crescente em  $[2, \infty)$  e decrescente em  $(-\infty, -3]$ . Em  $[-3, 2]$  é constante ( $f' = 0$ ).

• Mínimo local  $f(x) = 5, x \in [-3, 2]$ , sem máximo local.

• Segunda derivada:  $f''(x) = 0$

• A segunda derivada é zero – o gráfico é (parte de) uma reta, nem convexo nem côncavo.

• Imagem – a partir da monotonia, dos extremos e dos limites:  $\text{Im}(f) = [5, \infty)$

$$\frac{f(x)}{x} \Big| \begin{matrix} (-\infty, \infty) \\ + \end{matrix}$$

A função é positiva para  $x \in \mathbb{R}$  e negativa para  $x \in \emptyset$

• Limites nos extremos do domínio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• A função não tem assíntotas verticais.

• Assíntota em  $-\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ ,  
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -1$  – a reta  $y = -2x - 1$

• Assíntota em  $+\infty$ :  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ ,  
 $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = 1$  – a reta  $y = 2x + 1$

• Primeira derivada

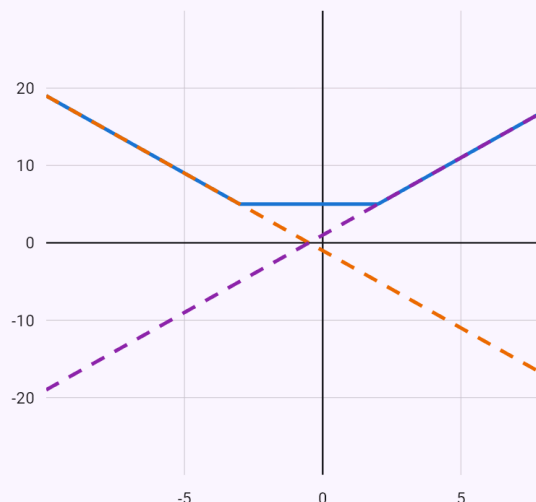
$$f'(x) = \frac{x}{|x-2|} + \frac{x}{|x+3|} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{3}{|x+3|} = \frac{x|x-2|}{|x-2|^2} + \frac{x|x+3|}{|x+3|^2} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{3}{|x+3|}$$

• A equação  $f'(x) = 0$  não tem solução – não há pontos estacionários.

• Em  $x = -3$  não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ( $f'_-(-3) = -2, f'_+(-3) = 0$ ), o gráfico tem ali um bico.

• Em  $x = 2$  não existe derivada: as derivadas laterais são diferentes ( $f'_-(2) = 0, f'_+(2) = 2$ ), o gráfico tem ali um bico.

### Gráfico



—  $y = |x - 2| + |x + 3|$

- - -  $y = -2x - 1$

- - -  $y = 2x + 1$

Extremos locais em vermelho, pontos de inflexão em roxo, círculo vazio – um ponto onde a função não está definida; assíntotas tracejadas.

## Limitações conhecidas

---

- Uma função que nem tem derivada periódica ( $x \cdot \sin x$ ) é estudada só numericamente em  $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$  e sem o período; as funções trigonométricas inversas ( $\arcsin$ ,  $\arctan$ ) ainda não são suportadas.

# Polinómio de Taylor

A aplicação constrói o polinómio de Taylor (em 0, o de Maclaurin) do grau indicado: uma tabela das derivadas no ponto, a substituição na fórmula e o resto na forma de Lagrange. Também pode encontrar ela própria o grau – o menor para o qual o erro num ponto ou num intervalo não ultrapassa um limite dado. O gráfico mostra a função e o polinómio; com um cursor muda o grau e vê a aproximação a melhorar.

## Como introduzir

|                                                |                                                                                        |
|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>taylor(sin x, 0, 5)</code>               | A função, o ponto e o grau.                                                            |
| <code>maclaurin(e^x, 4)</code>                 | O polinómio de Maclaurin – o ponto é 0.                                                |
| <code>taylor(e^x, 0, erro=0.001, x=0.5)</code> | O grau segundo o erro no ponto x (num intervalo, escreva r=... em vez de x).           |
| <code>ln(1 + x)</code>                         | Uma função com o chip «Polinómio de Taylor» – aí indica o ponto, o grau ou a precisão. |

# Exemplos

## Um polinómio de grau 4 com o resto.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

### Resultado

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

### Passos

- O polinómio de Maclaurin (o polinómio de Taylor em 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- As derivadas e os seus valores em a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+1) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x+1} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} & f'''(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(x+1)^4} & f^{(4)}(0) &= -6 \end{aligned}$$

- Substituímos os valores das derivadas

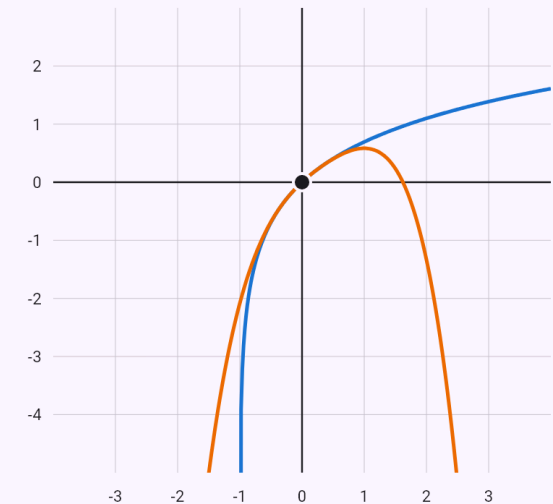
$$\begin{aligned} T_4(x) &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

- O resto (o erro) na forma de Lagrange,  $\xi$  entre a e x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!} x^5$$

### Gráfico

Grau: 4



—  $y = \ln(1+x)$

—  $T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

O ponto em torno do qual o polinómio aproxima a função:

- (0; 0)

Com o cursor acima do gráfico escolhes o grau – com um grau maior o polinómio aproxima melhor a função, e mais longe do ponto.

O grau segundo a precisão pedida – um valor aproximado de  $e^{0,5}$ .

Enunciado: `taylor(e^x, 0, erro=0.001, x=0.5)`

#### Resultado

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0,5) \approx 1,6484$$

#### Passos

- O polinómio de Maclaurin (o polinómio de Taylor em 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- As derivadas e os seus valores em a

$$f(x) = e^x \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \quad f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \quad f^{(4)}(0) = 1$$

- Substituímos os valores das derivadas

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- O resto (o erro) na forma de Lagrange,  $\xi$  entre a e x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^\xi}{5!} x^5$$

- Procuramos o menor grau n cuja estimativa do resto em

x não ultrapasse o erro

$$M_k = \max_{t \in [0, 0,5]} |f^{(k)}(t)|, \quad h = |x - a| = 0,5$$

$$n = 1: |R_1| \leq \frac{1,6487}{2!} \cdot 0,5^2 \approx 0,2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: |R_2| \leq \frac{1,6487}{3!} \cdot 0,5^3 \approx 0,0344 > 10^{-3}$$

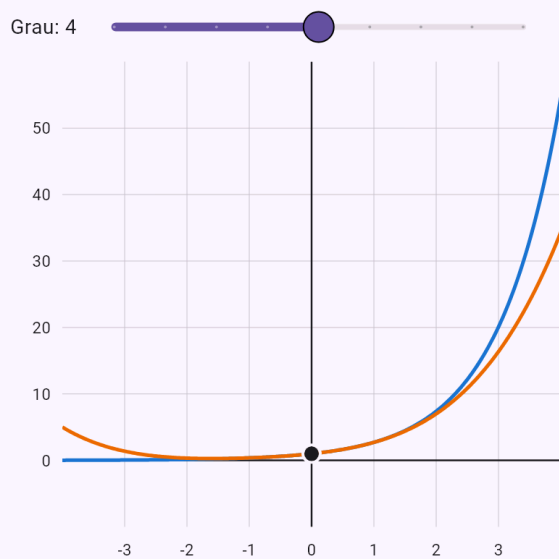
$$n = 3: |R_3| \leq \frac{1,6487}{4!} \cdot 0,5^4 \approx 4,3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: |R_4| \leq \frac{1,6487}{5!} \cdot 0,5^5 \approx 4,3 \cdot 10^{-4} \leq 10^{-3}$$

- O valor aproximado:  $f(0,5) \approx T_4(0,5) = \frac{211}{128} \approx 1,6484$

## Gráfico

Grau: 4



—  $y = e^x$

—  $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

O ponto em torno do qual o polinômio aproxima a função:

● (0; 1)

Com o cursor acima do gráfico escolhes o grau – com um grau maior o polinômio aproxima melhor a função, e mais longe do ponto.

# Integrais indefinidos

A aplicação integra com os métodos ensinados na escola e diz em cada passo o que faz. Verifica o resultado derivando (a verificação é o último passo) e desenha a função integranda e a primitiva.

As raízes de potências da variável ( $\sqrt[3]{x^4}$ ,  $\sqrt{x^3}$ ) são reescritas como potências de expoente racional; um valor absoluto ( $|\cos x|$ ,  $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ ), com a função sinal  $\operatorname{sgn}$ .

Se um integral não tiver primitiva elementar (como  $e^{-x^2}$ ), a aplicação di-lo e exprime-a com uma função especial ( $\operatorname{erf}$ ,  $\operatorname{Si}$ , ...).

## Como introduzir

|                             |                                                             |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------|
| <code>int(x e^x, x)</code>  | Um integral com a variável.                                 |
| <code>int(x^2 sin x)</code> | Sem a variável quando só há uma.                            |
| <code>∫ x^2 dx</code>       | Com o sinal de integral, também a partir de uma fotografia. |
| <code>x e^x</code>          | Uma função com o chip «Integrar».                           |

## Primitivas imediatas e substituição

O integral de uma soma termo a termo, as constantes fora do integral, as primitivas da tabela (também com uma função interior linear) e a substituição quando a função integranda contém uma função juntamente com a derivada do seu interior.

## Exemplos

### Termo a termo pela tabela.

Enunciado:  $\text{int}(3x^2 - 2/x + e^x)$

#### Resultado

$$\int \left( 3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = x^3 + e^x - 2$$

#### Passos

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left( 3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = \int 3x^2 dx + \int e^x dx + \int -\frac{2}{x}$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int e^x dx = e^x$

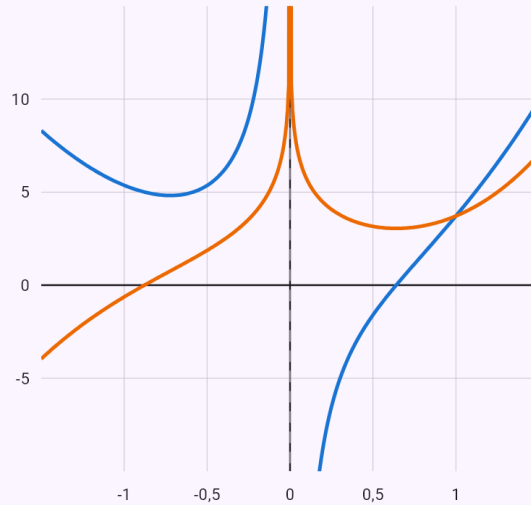
- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -\frac{2}{x} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

- Verificação – a derivada do resultado é a função integrada:  $(x^3 + e^x - 2 \ln |x|)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

#### Gráfico



$$\begin{aligned} \text{— } f(x) &= 3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \\ \text{— } F(x) &= x^3 + e^x - 2 \ln |x| \end{aligned}$$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

## A substituição $t = x^2$ .

Enunciado:  $\text{int}(2x \cos(x^2))$

### Resultado

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$

### Passos

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int 2x \cos(x^2) dx = 2 \int x \cos(x^2) dx$$

- Substituição  $t = x^2$ ,  $dt = 2x dx$ :

$$\int x \cos(x^2) dx = \int \frac{\cos t}{2} dt$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

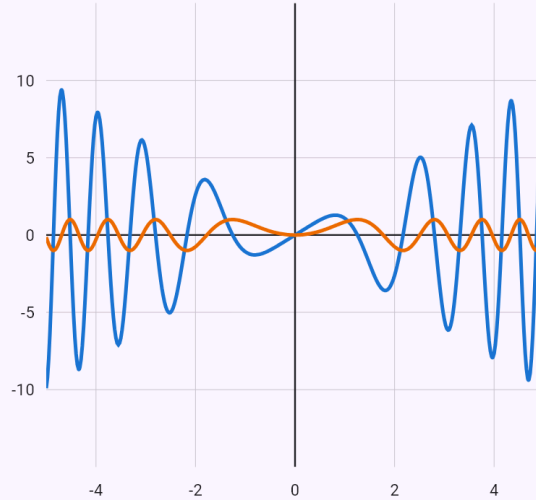
$$\int \frac{\cos t}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \cos t dt = \sin t$

- Voltamos à variável original:  $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin(x^2)}{2}$

- Verificação – a derivada do resultado é a função integrada:  $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$

### Gráfico



—  $f(x) = 2x \cos(x^2)$

—  $F(x) = \sin(x^2)$

A função integrada  $f$  e a primitiva  $F$  para  $C = 0$  (outro  $C$  desloca-a para cima ou para baixo). Onde  $f$  é positiva,  $F$  cresce; onde é negativa,  $F$  decresce.

## Integral com constantes $a$ , $b$ .

Enunciado:  $\text{int}(1/(a - bx)^3)$

### Resultado

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2} + C$$

Condições:  $b \neq 0$

### Passos

- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2}$$

- Verificação – a derivada do resultado é a função

integrada:  $\left(\frac{1}{2b(bx - a)^2}\right)' = \frac{1}{(a - bx)^3}$

## Integração por partes

O produto de um polinómio por uma exponencial, uma função trigonométrica ou um logaritmo é integrado por partes, várias vezes se for preciso; integrais como  $e^x \sin x$  por partes de forma cíclica.

## Exemplos

### Por partes duas vezes seguidas.

Enunciado:  $\int x^2 e^x dx$

#### Resultado

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

#### Passos

- Por partes ( $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$ ),  $u = x^2$ ,  $v' = e^x$ , logo  $u' = 2x$ ,  $v = e^x$ :  $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$

- Tiramos a constante para fora do integral:

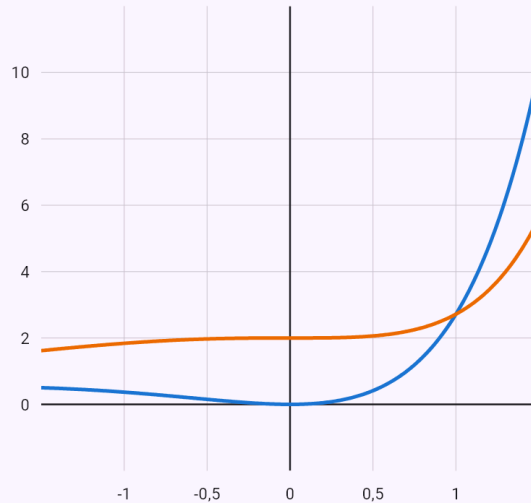
$$\int 2x e^x dx = 2 \int x e^x dx$$

- Por partes ( $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$ ),  $u = x$ ,  $v' = e^x$ , logo  $u' = 1$ ,  $v = e^x$ :  $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int e^x dx = e^x$

- Verificação – a derivada do resultado é a função integrada:  $(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x)' = x^2 e^x$

#### Gráfico



—  $f(x) = x^2 e^x$

—  $F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

A função integrada  $f$  e a primitiva  $F$  para  $C = 0$  (outro  $C$  desloca-a para cima ou para baixo). Onde  $f$  é positiva,  $F$  cresce; onde é negativa,  $F$  decresce.

## Funções racionais

Uma função racional é dividida se necessário, o denominador é fatorizado e a função decomposta em frações parciais, que são integradas em logaritmos e arcos tangentes.

Um denominador que não se fatoriza nos racionais ( $x^4 + 1$ ,  $x^5 + 1$ ) é fatorizado nos reais – cada par de raízes complexas conjugadas dá um fator quadrático sem raízes reais.

## Exemplos

### Decomposição em frações parciais.

Enunciado:  $\text{int}((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))$

#### Resultado

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|$$

#### Passos

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais:

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left( \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} \right) dx$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left( \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} \right) dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int -\frac{2}{x - 1} dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{3}{x - 2} dx = 3 \int \frac{1}{x - 2} dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{x - 2} dx = \ln |x - 2|$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -\frac{2}{x - 1} dx = -2 \int \frac{1}{x - 1} dx$$

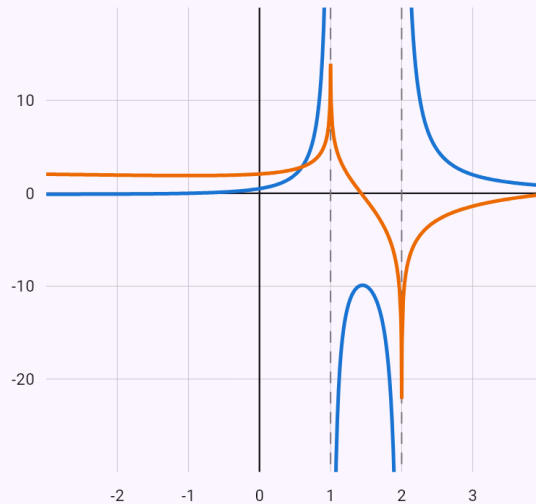
- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{x - 1} dx = \ln |x - 1|$$

- Verificação – a derivada do resultado é a função integrada

$$(3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|)' = \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

#### Gráfico



$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$F(x) = 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|$$

A função integrada  $f$  e a primitiva  $F$  para  $C = 0$  (outro  $C$  desloca-a para cima ou para baixo). Onde  $f$  é positiva,  $F$  cresce; onde é negativa,  $F$  decresce.

## Fatorização do denominador $x^4 + 1$ nos reais.

Enunciado:  $\int \frac{1}{x^4 + 1} dx$

### Resultado

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} (x + 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} (x - 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \right) + C$$

### Passos

- Fatorizamos o denominador em  $\mathbb{R}$ : as suas raízes complexas formam pares conjugados  $r, \bar{r}$  e cada par dá um fator quadrático  $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2\operatorname{Re} r \cdot x + |r|^2$  sem raízes reais:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \int \left( \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left( \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx = \int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx + \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx$$

- O denominador não tem raízes reais: um múltiplo da sua derivada separado do numerador dá  $\ln$ , o resto, completando o quadrado, dá  $\arctg$

$$\int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2 - \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$$

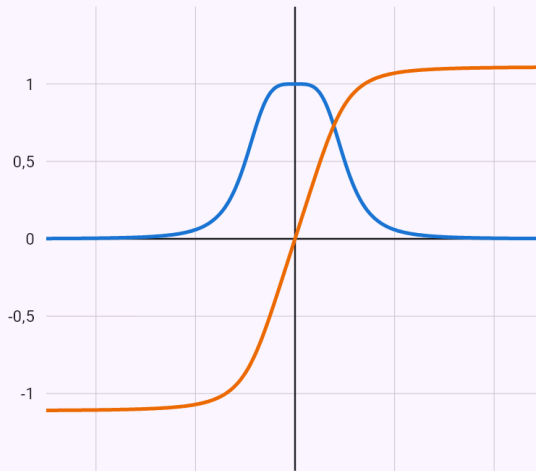
- O denominador não tem raízes reais: um múltiplo da sua derivada separado do numerador dá  $\ln$ , o resto, completando o quadrado, dá  $\arctg$

$$\int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx = -\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2 + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

- Verificação – a derivada do resultado é a função integrada

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} (x + 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} (x - 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \right) \right)' = \frac{1}{x^4 + 1}$$

### Gráfico



—  $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

—  $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} (x + 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} (x - 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \sqrt{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \right) + C$

A função integrada  $f$  e a primitiva  $F$  para  $C = 0$  (outro  $C$  desloca-a para cima ou para baixo). Onde  $f$  é positiva,  $F$  cresce; onde é negativa,  $F$  decresce.

## Funções trigonométricas

Primeiro as fórmulas ( $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ , produtos em somas), para uma potência ímpar a substituição  $t = \sin x$  ou  $t = \cos x$ , para uma função racional de seno e cosseno uma substituição segundo a paridade, e a substituição universal  $t = \tan(x/2)$  só no fim.

## Exemplos

### Uma potência ímpar do seno – a substituição $t = \cos x$ .

Enunciado: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

#### Resultado

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} .$$

#### Passos

- Uma potência ímpar – substituição  $t = \cos x$ ,

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$dt = -\sin x dx$$

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \int (t^4 - t^2) dt$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais:

$$\int (t^4 - t^2) dt = \int t^4 dt + \int -t^2 dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int t^4 dt = \frac{t^5}{5}$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -t^2 dt = -\int t^2 dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}$

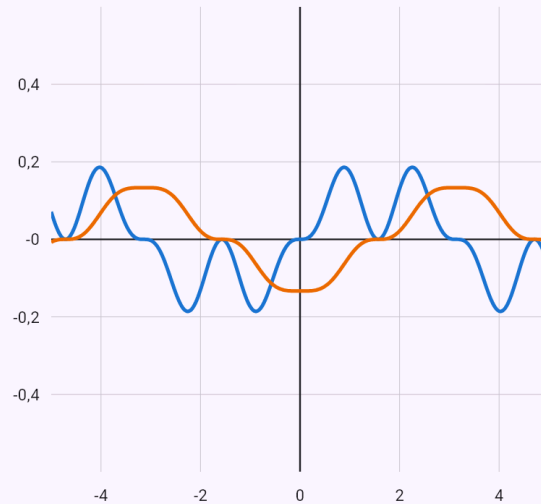
- Voltamos à variável original:

$$t = \cos x : \quad \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$$

- Verificação – a derivada do resultado é a função

$$\text{integrada: } \left( \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$

#### Gráfico



$$\begin{aligned} \text{— } f(x) &= \cos^2 x \sin^3 x \\ \text{— } F(x) &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \end{aligned}$$

A função integrada  $f$  e a primitiva  $F$  para  $C = 0$  (outro  $C$  desloca-a para cima ou para baixo). Onde  $f$  é positiva,  $F$  cresce; onde  $f$  é negativa,  $F$  decresce.

## Funções hiperbólicas

Integrais da tabela ( $\int \sinh x dx = \cosh x + C$ ,  $\int 1/\cosh^2 x dx = \tanh x + C$ , ...),  $\int \tanh x dx$  pelo logaritmo da derivada, por partes ( $x \sinh x$ ,  $\operatorname{arsinh} x$ ), quadrados pelas fórmulas  $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$ ,  $\tanh^2 x = 1 - 1/\cosh^2 x$ ; o resto pela definição através de exponenciais.

## Exemplos

A fórmula  $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$ .

Enunciado: `int(sinh(x)^2)`

### Resultado

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

### Passos

- Usamos a fórmula  $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$ :

$$\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left( \frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$$

- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :

$$\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$$

- Verificação – a derivada do resultado é a função integrada

$$\left( -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} = \sinh^2 x$$

## Raízes

Integrais com a raiz de uma função linear fracionária por substituição, com a raiz de um trinómio do 2.º grau por uma substituição de Euler, e integrais binómios segundo as condições de Tchebychev – se nenhuma se verificar, a aplicação diz que o integral não é elementar.

## Exemplos

### Uma substituição de Euler.

Enunciado: `int(sqrt(x^2 + 1))`

#### Resultado

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$$

#### Passos

- Substituição de Euler (tipo 1)  $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$  - o integral passa a ser o de uma função racional de t

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt$$

- Tiramos a constante para fora do integral

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt$$

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt = \int \left( t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left( t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \int t dt + \int \frac{2}{t} dt + \int \frac{1}{t^3} dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int t dt = \frac{t^2}{2}$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{2}{t} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t|$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2}$

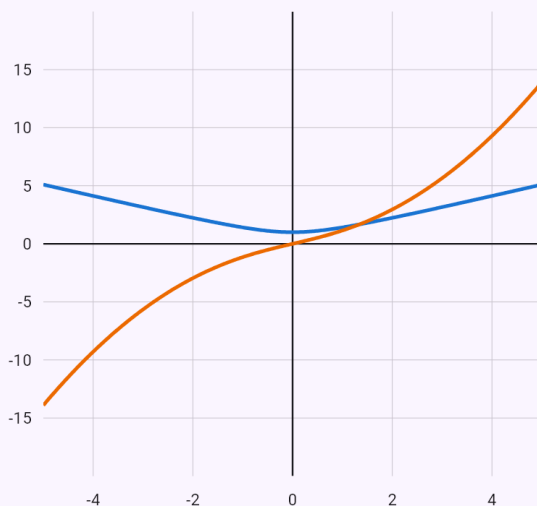
- Voltamos à variável original

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} : \quad \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} + \frac{(x^2 + 1)}{2}$$

- Verificação - a derivada do resultado é a função integrada

$$\left( \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} \right)' = \sqrt{x^2 + 1}$$

#### Gráfico



$$\text{— } f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{— } F(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$$

A função integrada f e a primitiva F para C = 0 (outro C desloca-a para cima ou para baixo). Onde f é positiva, F cresce; onde é negativa, F decresce.

## Limitações conhecidas

---

- Para alguns integrais, encontramos o resultado sem resolução – a aplicação indica-o nos passos.
- Um cálculo sem resolução que demora demasiado é interrompido – a aplicação indica-o.

# Integrais definidos e as suas aplicações

A aplicação calcula um integral definido pela fórmula de Barrow (Newton–Leibniz) e desenha a área sob o gráfico – a parte acima do eixo x de outra cor que a de baixo. Também trata integrais impróprios e aplicações: área, comprimento de curva, volume e área lateral de um sólido de revolução, também para curvas paramétricas e em coordenadas polares.

## Integral definido

---

A aplicação encontra a primitiva como no integral indefinido e substitui os limites. Com uma substituição, transforma logo os limites. Se o integral não tiver primitiva elementar, calcula-o numericamente.

### Como introduzir

|                                        |                                                                   |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| <code>int(x^2, x, 0, 3)</code>         | Um integral com a variável e os limites.                          |
| <code>\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx</code> | A partir de uma fotografia ou em LaTeX.                           |
| <code>x^2</code>                       | Uma função com o chip «Integrar» – escreva os limites nos campos. |

---

## Exemplos

### Uma substituição com os limites transformados.

Enunciado:  $\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx$

#### Resultado

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = \sin 1 \approx 0,8415$$

#### Passos

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int 3x^2 \cos(x^3) dx = 3 \int x^2 \cos(x^3) dx$$

- Substituição  $t = x^3$ ,  $dt = 3x^2 dx$ :

$$\int x^2 \cos(x^3) dx = \int \frac{\cos t}{3} dt$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{\cos t}{3} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \cos t dt = \sin t$

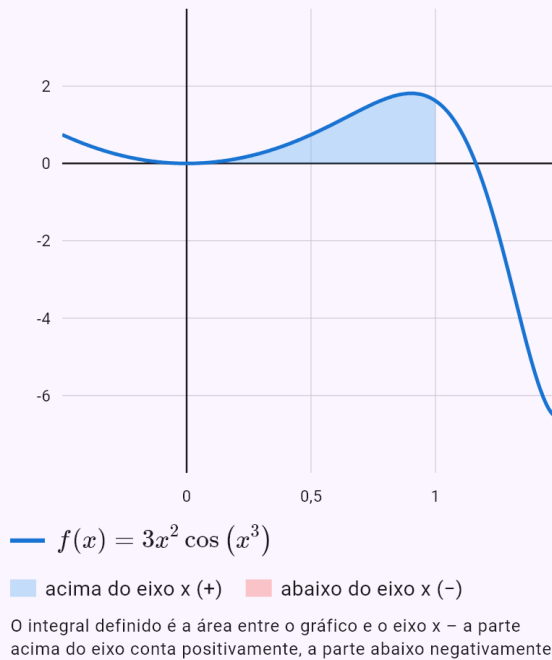
- Com a substituição, recalculamos também os limites – não é preciso voltar à variável original:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$$

- A fórmula de Newton-Leibniz,  $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$$

#### Gráfico



## Integrais impróprios

Um limite infinito ou uma função não limitada são tratados com um limite da primitiva, e a aplicação diz se o integral converge ou diverge. Se esse limite não puder ser calculado, decide por um critério de comparação.

## Exemplos

### Um limite superior infinito.

Enunciado: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

#### Resultado

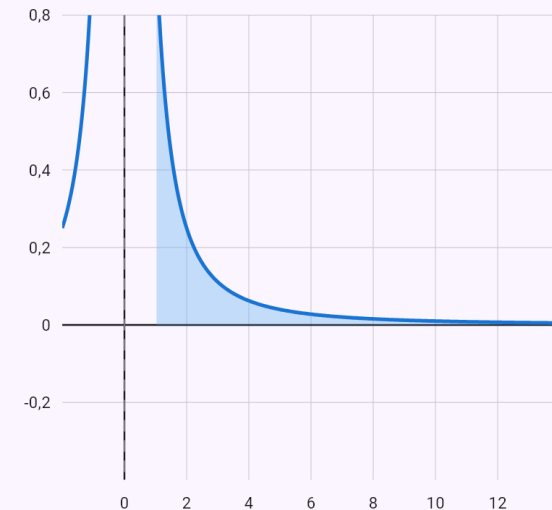
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

#### Passos

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$
- Um integral impróprio – num limite infinito e onde a função não é limitada tomamos o limite da primitiva. Os limites são finitos, o integral converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

#### Gráfico



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

■ acima do eixo x (+) ■ abaixo do eixo x (-)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

### Uma função não limitada no limite inferior.

Enunciado: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

#### Resultado

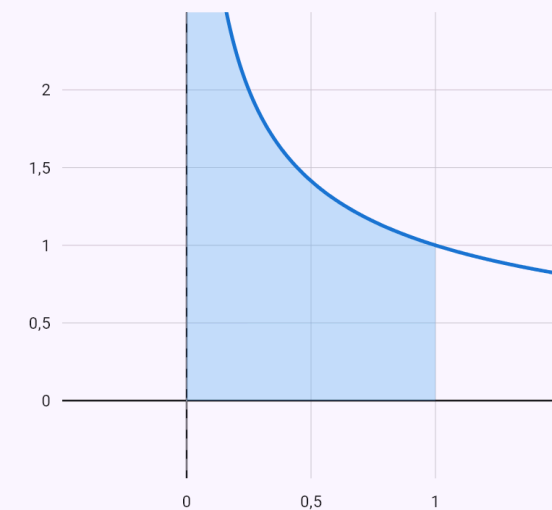
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

#### Passos

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$
- Um integral impróprio – num limite infinito e onde a função não é limitada tomamos o limite da primitiva. Os limites são finitos, o integral converge

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

#### Gráfico



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

■ acima do eixo x (+) ■ abaixo do eixo x (-)

O integral definido é a área entre o gráfico e o eixo x – a parte acima do eixo conta positivamente, a parte abaixo negativamente.

# Área sob uma curva e entre curvas

---

A área entre um gráfico e o eixo x, ou entre duas curvas, é calculada como o integral do módulo da diferença – as partes acima e abaixo contam ambas como positivas. Não precisa de indicar os limites: são encontrados como os pontos de interseção das curvas.

## Como introduzir

|                                 |                                                                                                          |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>área(x^2, x)</code>       | A área entre duas curvas, limites a partir dos pontos de interseção.                                     |
| <code>área(sin x, 0, pi)</code> | A área entre uma curva e o eixo x num intervalo.                                                         |
| <code>x^2</code>                | Uma função com o chip «Integrar» → «Área entre curvas»; escreva a segunda curva e os limites nos campos. |

---

## Exemplos

### A área entre uma parábola e uma reta.

Enunciado:  $x^2$  Área entre curvas, segunda curva  $x$

#### Resultado

$$S = \frac{1}{6}$$

#### Passos

- Os limites são as interseções das curvas:

$$x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$$

- A área entre as curvas (as partes acima e abaixo contam positivas),  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ :

$$S = \int_0^1 |x^2 - x| dx$$

- A expressão em módulo não muda de sinal no intervalo – retiramos o módulo por ele:

$$\int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais:

$$\int (-x^2 + x) dx = \int -x^2 dx + \int x dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -x^2 dx = - \int x^2 dx$$

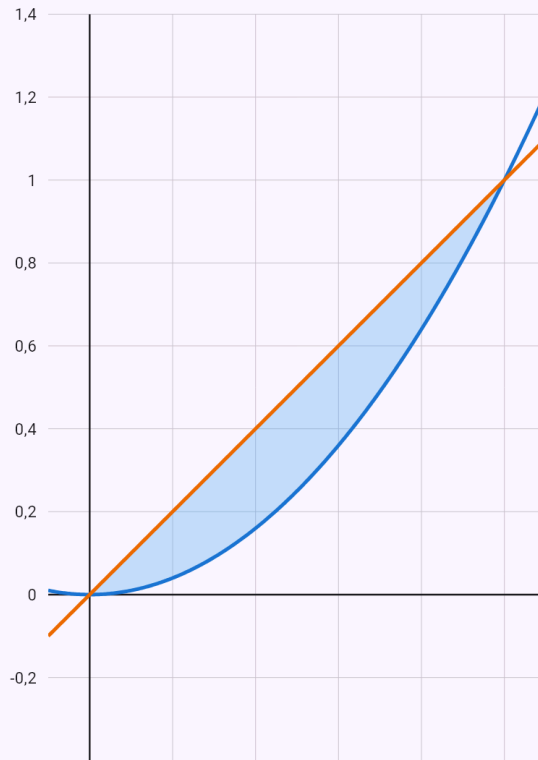
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- A fórmula de Newton–Leibniz,  $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

#### Gráfico



0 0,2 0,4 0,6 0,8 1

—  $f(x) = x^2$   
—  $g(x) = x$

A região sombreada – a sua área é o resultado (as partes acima e abaixo do eixo contam positivas).

## Comprimento de uma curva

O comprimento de um gráfico num intervalo é calculado pela fórmula  $l = \int \sqrt{1 + f'^2} dx$ . A aplicação tenta simplificar a raiz (numa semicircunferência obtém-se o arco seno); quando o integral não tem primitiva elementar, o resultado é numérico.

### Como introduzir

`comprimento( $x^{(3/2)}$ , 0, 4)`

O comprimento da curva num intervalo.

# Exemplos

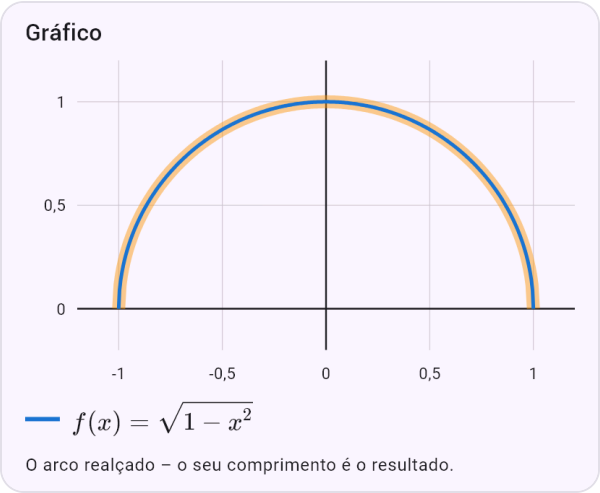
## O comprimento de uma semicircunferência.

Enunciado: `sqrt(1 - x^2)` Comprimento de curva, limites -1 e 1

**Resultado**  
 $l = \pi \approx 3,1416$

**Passos**

- O comprimento da curva
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
- Pela tabela de integrais imediatos:
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$
- Um integral impróprio – num limite infinito e onde a função não é limitada tomamos o limite da primitiva. Os limites são finitos, o integral converge
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x - \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$



## Volume de um sólido de revolução

O volume de um sólido de revolução em torno do eixo x é calculado pela fórmula  $V = \pi \int f^2 dx$  (entre duas curvas, por anéis), em torno do eixo y pelo método das cascas cilíndricas. A aplicação mostra também o sólido em 3D – rode-o com o dedo.

### Como introduzir

|                                    |                                                           |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| <code>volume(sqrt(x), 0, 4)</code> | O volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo x. |
| <code>volume(x^2, 0, 2, y)</code>  | Rotação em torno do eixo y.                               |

## Exemplos

### Um parabolóide de revolução.

Enunciado: `sqrt(x)` Volume de um sólido, limites 0 e 4

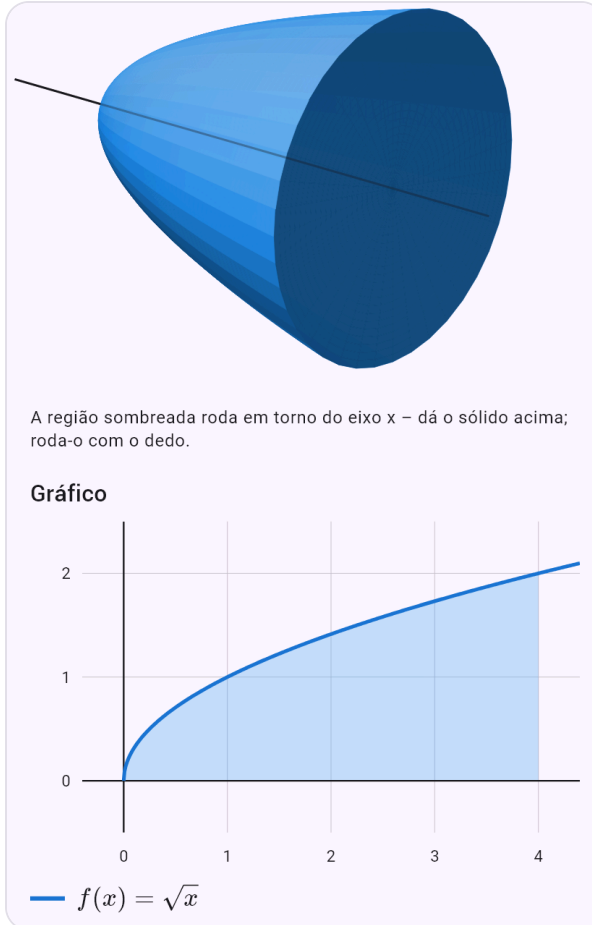
#### Resultado

$$V = 8\pi \approx 25,1327$$

#### Passos

- O volume do sólido de revolução em torno do eixo  $x$ ,  
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx: V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- A fórmula de Newton–Leibniz,  $F(b) - F(a)$ :  
$$\int_0^4 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8 - 0 = 8$$
- O valor do integral vezes a constante à frente:  
$$V = \pi \cdot 8 = 8\pi$$

#### Sólido de revolução



## Área lateral de um sólido de revolução

A área lateral é calculada pela fórmula  $S = 2\pi \int f\sqrt{1 + f'^2} dx$ ; o produto sob a raiz simplifica-se muitas vezes (numa esfera obtém-se uma constante).

### Como introduzir

`superficie(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`

A área lateral por rotação em torno do eixo  $x$ .

## Exemplos

### A superfície de uma esfera de raio 2.

Enunciado:  $\sqrt{4 - x^2}$

Superfície de um sólido, limites -2 e 2

#### Resultado

$$S = 16\pi \approx 50,2655$$

#### Passos

- A área lateral do sólido de revolução em torno do eixo x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-2}^2 2 dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int 2 dx = 2x$

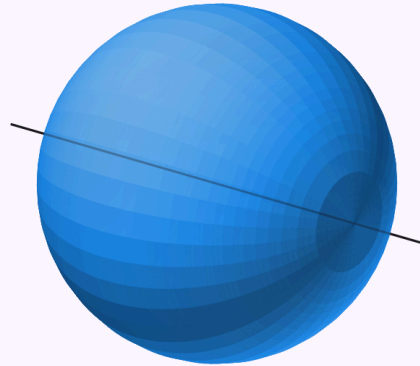
- A fórmula de Newton-Leibniz,  $F(b) - F(a)$ :

$$\int_{-2}^2 2 dx = [2x]_{-2}^2 = 4 - (-4) = 8$$

- O valor do integral vezes a constante à frente:

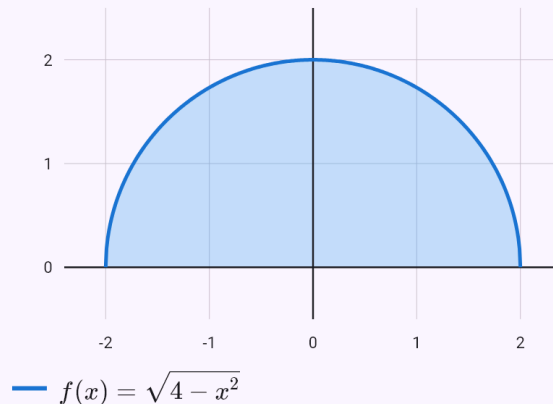
$$S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

#### Sólido de revolução



A região sombreada roda em torno do eixo x - dá o sólido acima; roda-o com o dedo.

#### Gráfico



## Curvas paramétricas e em coordenadas polares

Escreva uma curva  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  em duas linhas, e uma curva em coordenadas polares como  $r = \rho(\varphi)$ . O chip «Integrar» oferece então a área, o comprimento, o volume e a superfície; os limites do parâmetro são opcionais (sem eles, de 0 a  $2\pi$ ). O volume e a superfície são calculados rodando em torno do eixo x a parte da curva acima do eixo.

### Como introduzir

$$x = t - \sin(t)$$

$$y = 1 - \cos(t)$$

Uma curva paramétrica em duas linhas.

$$r = 1 + \cos(\phi)$$

Uma curva em coordenadas polares (também  $r^2 = \dots$  para uma lemniscata).

comprimento( $x=\cos(t)^3$ ,  $y=\sin(t)^3$ ,  $t$ ,  $0, 2\pi$ )

A forma escrita com o parâmetro e os limites.

## Exemplos

### A área sob um arco de cicloide.

Enunciado:  $x = t - \sin(t)$

$y = 1 - \cos(t)$

Área

#### Resultado

$$S = 3\pi \approx 9,4248$$

#### Passos

- As derivadas em ordem ao parâmetro:

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$$

- A área sob uma curva paramétrica (dentro de uma curva fechada) para  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \right|$ :

$$S = \left| \int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt \right|$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \int 1 dt + \int -2 \cos t dt -$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int 1 dt = t$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -2 \cos t dt = -2 \int \cos t dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \cos t dt = \sin t$

- Usamos a fórmula  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ :

$$\int \cos^2 t dt = \int \left( \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left( \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2}$

- Tiramos a constante para fora do integral:

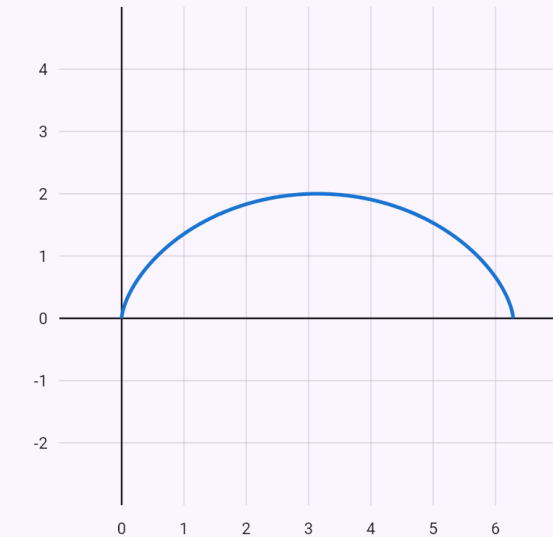
$$\int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt$$

- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :  $\int \cos(2t) dt = \frac{\sin(2t)}{2}$

- A fórmula de Newton–Leibniz,  $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \left[ \frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{\sin(2t)}{4} \right]$$

## Gráfico



$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

A curva dada parametricamente (ou em coordenadas polares), desenhada para os limites escolhidos do parâmetro.

## O comprimento de uma cardioide.

Enunciado:  $r = 1 + \cos(\phi)$

Comprimento de curva

### Resultado

$$l = 8$$

### Passos

- As derivadas em ordem ao parâmetro:  $\rho'(\varphi) = -\sin \varphi$

- O comprimento de uma curva em coordenadas polares

$$\text{para } \varphi \in [0, 2\pi], \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi$$

- Dividimos o intervalo nos zeros das expressões em módulo ( $\pi$ ) e em cada parte retiramos o módulo pelo sinal

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Tiramos a constante para fora do integral

$$\int 2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \int \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por a:

$$\int \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)$$

- A fórmula de Newton-Leibniz,  $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{\pi} 2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[ 4 \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$

- Tiramos a constante para fora do integral

$$\int -2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = -2 \int \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por a:

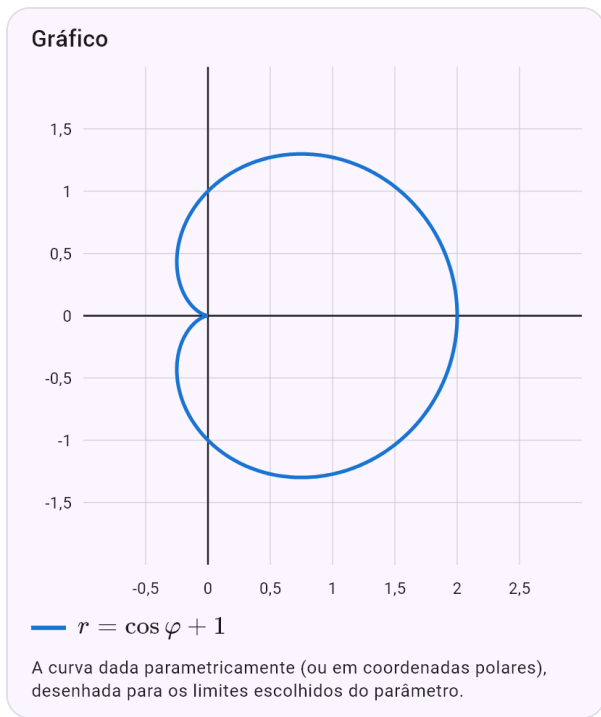
$$\int \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)$$

- A fórmula de Newton-Leibniz,  $F(b) - F(a)$

$$\int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[ -4 \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) = 4$$

- Somamos os valores das partes:

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$



## Curvas dadas por uma equação

Para uma equação em  $x$  e  $y$  ( $x^3 + y^3 = 3xy$ ), o chip «Integrar» oferece a área, o comprimento, o volume e a superfície. Sem limites, usa toda a curva fechada: a circunferência e a elipse na forma paramétrica com  $\cos$  e  $\sin$ , um laço que passa pela origem (o fólio de Descartes) pelas retas  $y = tx$  – a área do laço então exatamente a partir dos setores, o comprimento, o volume e a superfície numericamente. Com limites em  $x$ , usa o ramo superior  $y = f(x)$ .

### Como introduzir

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Uma curva fechada – o chip «Integrar» sem limites.

$$y^2 = x^3$$

Uma curva não fechada – o chip «Integrar» com limites em  $x$  (o ramo superior  $y = x^{3/2}$ ).

## Exemplos

A área do laço do fólio – pelas retas  $y = tx$  e pelos setores,  $S = 3/2$ .

Enunciado:  $x^3 + y^3 = 3xy$

Integrar → Área

### Resultado

$$S = \frac{3}{2}$$

### Passos

- O laço que passa pela origem na forma paramétrica pelas retas  $y = tx$  – substituímos na equação e isolamos  $x$

$$y = tx \Rightarrow x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}, \quad t \in (0; \infty)$$

- A área do laço somando os setores a partir da origem:  $S = \frac{1}{2} \int (x \cdot y' - y \cdot x') dt$ , e sobre a reta  $y = tx$ ,  $x \cdot y' - y \cdot x' = x^2$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt$$

- Tiramos a constante para fora do integral

$$\int \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \frac{9}{2} \int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt$$

- Substituição  $u = t^3 + 1$ ,  $du = 3t^2 dt$ :

$$\int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt = \int \frac{1}{3u^2} du$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{1}{3u^2} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2} du$$

—  $x^3 + y^3 = 3xy$

—  $x = \frac{3t}{t^3 + 1}, y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$

Toda a curva dada pela equação; destacada a parte usada no cálculo.

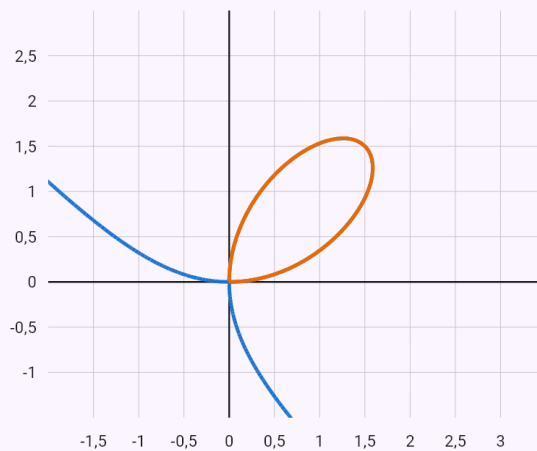
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}$

- Voltamos à variável original:  $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3(t^3 + 1)}$

- Um integral impróprio – num limite infinito e onde a função não é limitada tomamos o limite da primitiva. Os limites são finitos, o integral converge

$$\int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{3}{2(t^3 + 1)} \right) - \left( -\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

### Gráfico



## Limitações conhecidas

- O comprimento de  $y = \sqrt[3]{x}$  (e de curvas semelhantes) só é calculado numericamente – conduz a um integral elíptico, que não tem primitiva elementar.
- Nas curvas paramétricas e polares ainda faltam a área colorida e o sólido em 3D; rotação só em torno do eixo  $x$ .
- Rotação em torno do eixo  $y$  só para uma região de um lado do eixo.
- Nas curvas implícitas sem limites só são suportadas a circunferência, a elipse e um laço que passa pela origem; rotação só em torno do eixo  $x$ .

# Séries infinitas

Numa série numérica, a aplicação verifica primeiro a condição necessária de convergência e depois escolhe um critério conforme a forma da série – série geométrica,  $\sum 1/n^p$ , critério da razão, da raiz, de comparação por passagem ao limite, do integral ou de Leibniz; numa série alternada distingue convergência absoluta e simples. Quando possível, soma a série. O gráfico mostra os termos e as somas parciais.

## Séries numéricas

A aplicação encontra a soma de séries geométricas e telescópicas (de Mengoli), de séries  $\sum P(n)q^n$  e de séries conhecidas ( $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ ); caso contrário, calcula-a numericamente. Uma soma finita calcula-se como na escola – telescópica, aritmética, geométrica, senão termo a termo. Também se resolve uma equação com a soma de uma série geométrica, verificando a condição de convergência  $|q| < 1$ .

### Como introduzir

|                                                |                                                                       |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| <code>soma(1/n^2)</code>                       | O termo geral; o índice n a partir de 1 (também sum).                 |
| <code>soma(1/n^2, n, 1, oo)</code>             | Com o índice e o valor inicial.                                       |
| <code>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}</code> | A partir de uma fotografia ou em LaTeX.                               |
| <code>1/n^2</code>                             | O termo geral com o chip «Série» – escreva o índice inicial no campo. |
| <code>soma(2k+1, k, 1, 100)</code>             | Uma soma finita – com o índice, o limite inferior e o superior.       |

# Exemplos

A série  $\sum 1/n^2$  – converge, a soma é  $\pi^2/6$ .

Enunciado: `sum(1/n^2)`

### Resultado

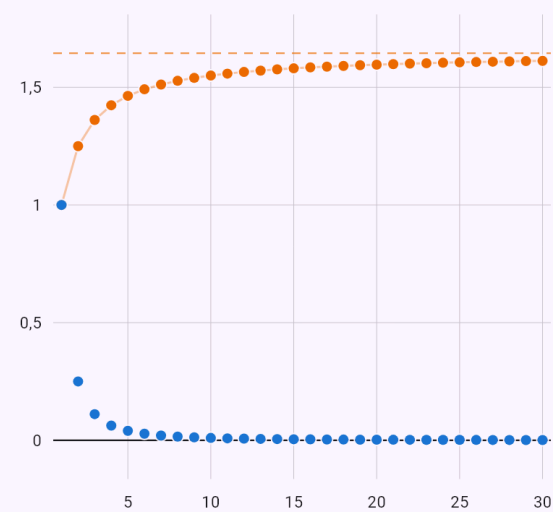
A série converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$$

### Passos

- A condição necessária de convergência verifica-se (sozinha não decide):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é do tipo  $\sum 1/n^p$  com  $p = 2 > 1$  – converge.
- A soma de uma série conhecida:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

### Gráfico



● termos  $a_n$  ● somas parciais  $s_n$  — a soma

Os pontos são os termos  $a_n$  e as somas parciais  $s_n = a_1 + \dots + a_n$ . Se a série converge, os termos tendem para zero e as somas parciais para a sua soma.

## O critério de Leibniz – converge simplesmente.

Enunciado:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

### Resultado

A série converge, mas não absolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0,6931$$

### Passos

- A condição necessária de convergência verifica-se (sozinha não decide):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

- Os termos têm sinais diferentes – primeiro a convergência absoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

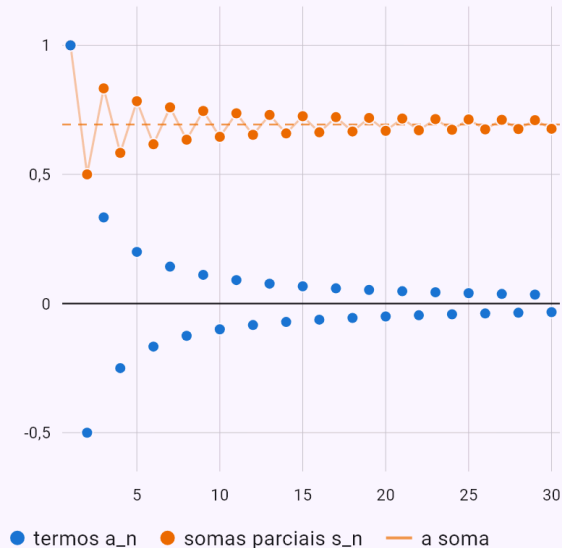
- A série harmónica diverge – os termos agrupados por potências de dois, cada grupo pelo menos  $1/2$

$$1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Critério de Leibniz:  $|a_n| = \frac{1}{n}$  decresce e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  – a série converge.

- Conclusão: a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge, mas não absolutamente (pelo critério de Leibniz).
- A soma de uma série conhecida:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

### Gráfico



Os pontos são os termos  $a_n$  e as somas parciais  $s_n = a_1 + \dots + a_n$ . Se a série converge, os termos tendem para zero e as somas parciais para a sua soma.

## O critério da razão e a soma.

Enunciado:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

### Resultado

A série converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

### Passos

- A condição necessária de convergência verifica-se (sozinha não decide):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$

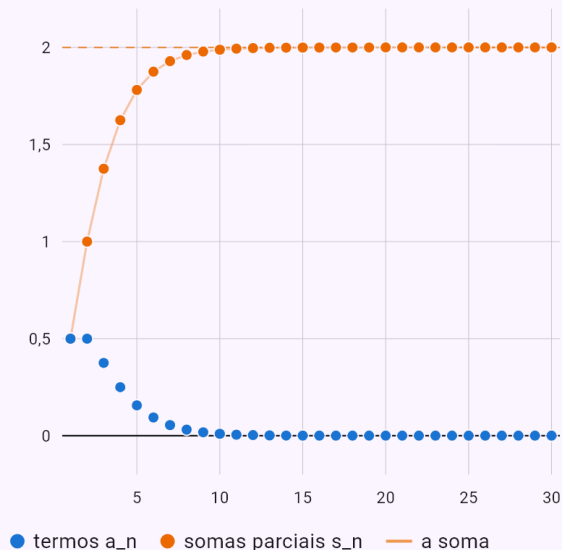
- Critério da razão (d'Alembert) – a série converge.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

- Uma série  $\sum P(n) \cdot q^n$  somada derivando a série

$$\text{geométrica: } \sum_{n=0}^{\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$$

### Gráfico



Os pontos são os termos  $a_n$  e as somas parciais  $s_n = a_1 + \dots + a_n$ . Se a série converge, os termos tendem para zero e as somas parciais para a sua soma.

## A condição necessária não se verifica – a série diverge.

Enunciado: `sum(n/(n+1))`

### Resultado

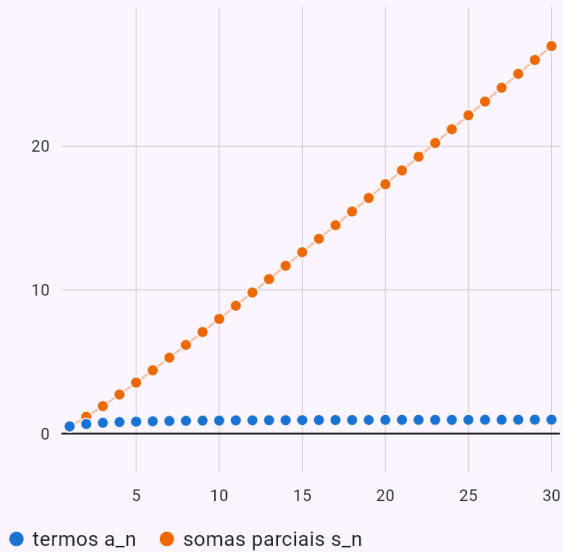
A série diverge.

### Passos

- A condição necessária de convergência não se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

### Gráfico



Os pontos são os termos  $a_n$  e as somas parciais  $s_n = a_1 + \dots + a_n$ . Se a série converge, os termos tendem para zero e as somas parciais para a sua soma.

## Soma telescópica – ficam o primeiro e o último termo.

Enunciado: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

### Resultado

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 10$$

### Passos

- Soma telescópica – os termos vizinhos cancelam-se, ficam só o primeiro e o último:

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 11 - 1 = 10$$

## Equação com a soma de uma série geométrica.

Enunciado:  $\text{sum}((2^x)^n, n, 1, \infty) = 1$

### Resultado

$$x = -1$$

### Passos

- A série é geométrica de razão  $q = 2^x$  e converge para

$$|2^x| < 1; \text{ a sua soma: } \sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$$

- Resolvemos:  $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$  cumpre a condição de convergência:  $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

## Séries de potências

Numa série de potências, a aplicação encontra o raio de convergência pelo critério da razão, estuda os extremos como séries numéricas e indica o intervalo de convergência; quando possível, também a soma. O gráfico mostra as somas parciais com um cursor para o número de termos.

## Exemplos

### O intervalo de convergência $[-1, 1[$ .

Enunciado: `sum(x^n/n)`

#### Resultado

$$x \in [-1, 1)$$

#### Passos

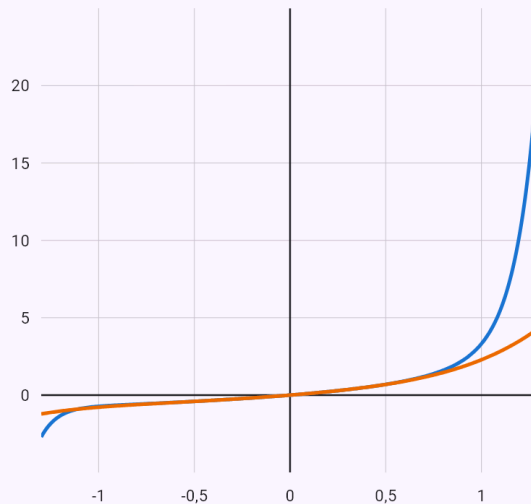
- O raio de convergência  $R = 1$  pelo critério da razão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1$$

- O extremo  $x = -1$ : a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge, mas não absolutamente (pelo critério de Leibniz).
- O extremo  $x = 1$ : a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge pelo agrupamento dos termos da série harmónica.
- O intervalo de convergência:  $x \in [-1, 1)$

#### Gráfico

Termos: 5



$$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$$
$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Escolhe o número de termos com o cursor – as somas parciais aproximam-se da soma apenas dentro do intervalo de convergência.

## Série de Taylor

A série de Taylor de uma função é obtida a partir de desenvolvimentos conhecidos ( $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ , ...) por substituição, e a aplicação determina o seu intervalo de convergência.

### Como introduzir

`taylor(e^x, 0, oo)`

A função, o ponto e oo em vez do grau; ou o chip «Polinómio de Taylor» → «Série».

## Exemplos

### A série de $\ln(1 + x)$ e o seu intervalo de convergência.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

#### Resultado

$$\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

#### Passos

- Do desenvolvimento conhecido

$$\ln(1 + u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n} \text{ com } u = x:$$

$$\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

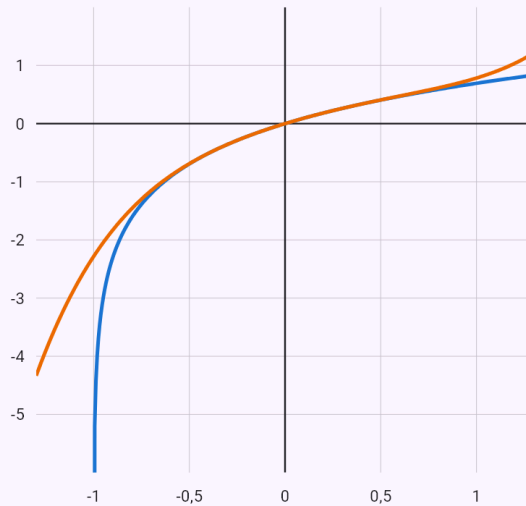
- O raio de convergência  $R = 1$  pelo critério da razão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{xn}{n+1} \right| = |x| < 1$$

- O extremo  $x = -1$ : a série  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$  diverge pelo agrupamento dos termos da série harmónica.
- O extremo  $x = 1$ : a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge, mas não absolutamente (pelo critério de Leibniz).
- O intervalo de convergência:  $x \in (-1, 1]$

#### Gráfico

Termos: 5



$$s(x) = \ln(x + 1)$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

Escolhe o número de termos com o cursor – as somas parciais aproximam-se da soma apenas dentro do intervalo de convergência.

# Séries de Fourier

A aplicação constrói a série de Fourier de uma função num intervalo tomado como um período (sem indicação, em  $[-\pi, \pi]$ ), ou a série de senos ou de cossenos de uma função em  $[0, L]$ . A função também pode ser definida por ramos.

Calcula os coeficientes por integrais com toda a resolução (por partes com o parâmetro  $n$ ), substitui  $\sin n\pi = 0$  e  $\cos n\pi = (-1)^n$  e aproveita a simetria das funções pares e ímpares. Nos pontos de descontinuidade determina a soma da série pelo teorema de Dirichlet e, substituindo um ponto e com a identidade de Parseval, deduz somas de séries numéricas (como  $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ ). O gráfico mostra o prolongamento periódico da função e as somas parciais com um cursor.

## Como introduzir

|                                                                        |                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>fourier(x^2, -pi, pi)</code>                                     | A função e o intervalo.                                                              |
| <code>fouriersin(x, 0, pi)</code>                                      | A série de senos (fouriercos – a de cossenos).                                       |
| <code>-1, -pi &lt; x &lt; 0</code><br><code>1, 0 &lt; x &lt; pi</code> | Uma função definida por ramos, linha a linha, com o chip «Série de Fourier».         |
| <code>x^2</code>                                                       | Uma função com o chip «Série de Fourier» – aí escolhe o tipo de série e o intervalo. |

# Exemplos

Uma função par – só cossenos; as somas  $\Sigma 1/n^2$  e  $\Sigma 1/n^4$ .

Enunciado: `fourier(x^2)`

## Resultado

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad ;$$

## Passos

- O intervalo  $[-\pi, \pi]$  é um período:  $T = 2\pi$ , meio período  $l = \pi$ . Procuramos a série com os coeficientes

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- A função é par,  $f(-x) = x^2 = f(x)$ , por isso os coeficientes dos senos são nulos e basta calcular os outros sobre metade do intervalo

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

- O coeficiente  $a_0$ :  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$
- Substituímos os limites:  $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
- O coeficiente  $a_n$ :  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$
- Por partes ( $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$ ),  $u = x^2$ ,  $v' = \cos(nx)$ , logo  $u' = 2x$ ,  $v = \frac{\sin(nx)}{n}$ 
$$\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx$$
- Tiramos a constante para fora do integral:
$$\int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx) dx$$
- Por partes ( $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$ ),  $u = x$ ,  $v' = \sin(nx)$ , logo  $u' = 1$ ,  $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$ 
$$\int x \sin(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n} dx$$
- Tiramos a constante para fora do integral:
$$\int -\frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx) dx$$
- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :  $\int \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n}$

- Para  $n$  inteiro,  $\sin n\pi = 0$ ,  $\cos n\pi = (-1)^n$

- Substituímos os limites

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_0^\pi = -$$

- Substituímos os coeficientes na série

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- A extensão periódica da função é contínua, por isso pelo teorema de Dirichlet a soma da série é  $f(x)$  para  $x \in [-\pi, \pi]$

- Substituindo  $x = 0$  obtemos a soma de uma série numérica

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Substituindo  $x = \pi$  obtemos a soma de uma série numérica

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

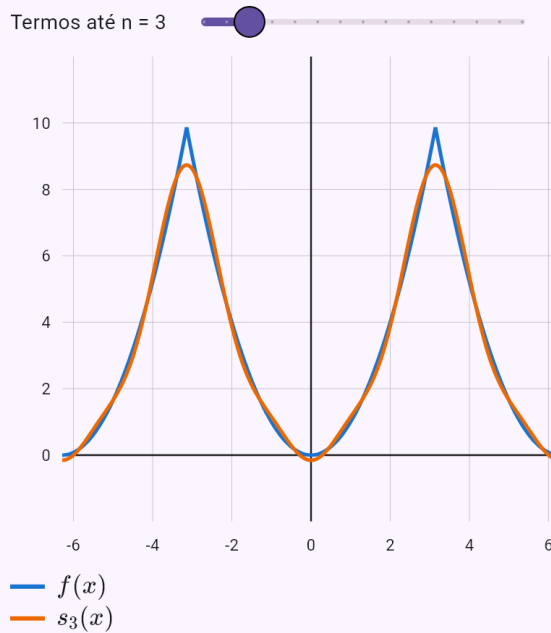
- Da identidade de Parseval obtemos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

## Gráfico

Termos até  $n = 3$



A função é estendida periodicamente. Com o cursor acrescentas termos da série – as somas parciais aproximam-se da função; num salto ultrapassam-na (fenómeno de Gibbs) e passam pela média dos dois lados, marcada com um ponto.

## Uma função definida por ramos – saltos e o fenómeno de Gibbs.

Enunciado:  $-1, -\pi < x < 0$

## Resultado

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

## Passos

- O intervalo  $[-\pi, \pi]$  é um período:  $T = 2\pi$ , meio período  $l = \pi$ . Procuramos a série com os coeficientes

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- A função é ímpar,  $f(-x) = -f(x)$ , por isso o termo constante e os coeficientes dos cossenos são nulos e basta calcular os dos senos sobre metade do intervalo

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- O coeficiente  $b_n$ :  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$

- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Para  $n$  inteiro,  $\sin n\pi = 0$ ,  $\cos n\pi = (-1)^n$

- Substituímos os limites

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi}$$

- Substituímos os coeficientes na série:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi} \sin(nx)$$

- Os termos com  $n$  par são nulos – ficam só os  $n$  ímpares,  $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

- Pelo teorema de Dirichlet a soma da série é  $f(x)$  para  $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ ; num ponto de descontinuidade é a média dos limites laterais

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

- Substituindo  $x = \frac{\pi}{2}$  obtemos a soma de uma série numérica

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Da identidade de Parseval obtemos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

## Gráfico

Termos até  $n = 5$ 

-6 -4 -2 0 2 4 6

—  $f(x)$   
—  $s_5(x)$

A função é estendida periodicamente. Com o cursor acrescentas termos da série – as somas parciais aproximam-se da função; num salto ultrapassam-na (fenómeno de Gibbs) e passam pela média dos dois lados, marcada com um ponto.

## Uma série de senos e a soma $1 - 1/3^3 + 1/5^3 - \dots = \pi^3/32$ .

Enunciado: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

### Resultado

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

### Passos

- Estendemos a função de  $[0, \pi]$  de forma ímpar e depois periódica ( $T = 2\pi$ ) – resulta a série de senos

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \text{ onde}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- O coeficiente  $b_n$ :  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx$
- Por partes ( $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$ ),  $u = x(\pi - x)$ ,  $v' = \sin(nx)$ ,  
logo  $u' = \pi - 2x$ ,  $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$\int x(\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{x(x - \pi) \cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral

$$\int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx = \frac{1}{n} \int (2x - \pi) \cos(nx) dx$$

- Por partes ( $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$ ),  $u = 2x - \pi$ ,  $v' = \cos(nx)$ ,  
logo  $u' = 2$ ,  $v = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$\int (2x - \pi) \cos(nx) dx = \frac{(2x - \pi) \sin(nx)}{n} - \int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int \sin(nx) dx$$

- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Para  $n$  inteiro,  $\sin n\pi = 0$ ,  $\cos n\pi = (-1)^n$

- Substituímos os limites

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2 \cos(nx)}{n} - \frac{\pi x \cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x) \sin(nx)}{n^2} \right]$$

- Substituímos os coeficientes na série:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \sin(nx)$$

- Os termos com  $n$  par são nulos – ficam só os  $n$  ímpares,  $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

- A extensão periódica da função é contínua, por isso pelo teorema de Dirichlet a soma da série é  $f(x)$  para  $x \in [0, \pi]$

- Substituindo  $x = \frac{\pi}{2}$  obtemos a soma de uma série numérica

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

• Da identidade de Parseval  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

obtemos

$$\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

### Gráfico

Termos até n = 5



-6 -4 -2 0 2 4 6

—  $f(x)$   
—  $s_5(x)$

A função é estendida periodicamente. Com o cursor acrescentas termos da série – as somas parciais aproximam-se da função; num salto ultrapassam-na (fenómeno de Gibbs) e passam pela média dos dois lados, marcada com um ponto.

## Limitações conhecidas

- Uma função não limitada (como  $\ln x$  em  $[0, 2\pi]$ ) não pode ser desenvolvida – a série divergiria no ponto onde a função cresce sem limite.
- Quando os coeficientes conduzem a um integral sem primitiva elementar ( $\ln x$  em  $[1, 3]$ ), são expressos com o seno e o cosseno integrais.

# Equações diferenciais

A aplicação resolve equações diferenciais ordinárias de primeira ordem: de variáveis separáveis, lineares, exatas, homogêneas ( $y' = f(y/x)$ ), de Bernoulli e equações  $y' = f(ax + by + c)$ . Reconhece o tipo sozinho e mostra o procedimento como na escola – separação de variáveis, variação da constante ou fator integrante, substituição, função potencial de uma equação exata. Os integrais do procedimento têm os seus próprios passos.

Ordens superiores: equações lineares com coeficientes constantes de qualquer ordem pela equação característica (também raízes múltiplas e complexas), uma solução particular pelo lado direito especial (também ressonância e soma de lados direitos) ou por variação das constantes, um problema de valor inicial em zero também pela transformada de Laplace (chip «Método»). Além disso a equação de Euler com  $x = e^t$ ,  $y^{(n)} = f(x)$  por integrações sucessivas e a redução da ordem – quando falta  $y$  ( $p = y'$ ) ou  $x$  ( $y' = p(y)$ ).

A equação  $y' = y \cdot (a(x) \cdot \ln y + b(x))$  torna-se linear com a substituição  $z = \ln y$ . Uma equação linear de segunda ordem com coeficientes variáveis é resolvida quando se consegue adivinhar uma solução ( $x^k$ ,  $e^{cx}$ , ...): a segunda, reduzindo a ordem (d'Alembert), e o lado direito por variação das constantes. A ordem também é reduzida em mais de um ( $p = y^{(m)}$  com uma equação de segunda ordem em  $p$ ). Com parâmetros, os casos são distinguidos: um oscilador amortecido pelo sinal de  $\delta^2 - \omega^2$  (sobre-amortecido, crítico, subamortecido), uma ressonância ( $y'' + \omega^2 y = \cos 2t$  para  $\omega = 2$ ) e o sinal de uma constante de que depende o integral ( $y'' = 2yy'$ ). A transformada de Laplace resolve também um problema de valor inicial num ponto diferente de 0 (deslocamento  $\tau = t - t_0$ ) e com parâmetros.

O resultado é a solução geral com uma constante  $C$ , nas ordens superiores com constantes  $C_1, C_2, \dots$  (explícita, ou implícita onde não pode ser explícita); com condições, a solução que as satisfaz – iniciais e de fronteira, incluindo os casos «sem solução» e «infinitas soluções». Também encontra as soluções constantes perdidas ao dividir. Cada solução é verificada substituindo-a na equação. Na primeira ordem o gráfico mostra o campo de direções e soluções para diferentes  $C$ , nas ordens superiores soluções para diferentes constantes; numa equação autónoma de segunda ordem (sem  $x$ ) um seletor mostra também o plano de fase ( $y, y'$ ).

## Como introduzir

---

$$y' = x*y$$

A derivada com linha.

---

$$dy/dx = x \cdot y^2$$

Notação de Leibniz – indica também a variável ( $dm/dt$ ,  $dT/dt$ ).

---

|                                     |                                                                             |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$   | Notação de uma foto.                                                        |
| $(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$ | A forma $M dx + N dy = 0$ (equação exata).                                  |
| $y' = y^2 + 1, y(0) = 1$            | Uma condição inicial após uma vírgula ou na linha seguinte.                 |
| $dm/dt = m + 2, m(0) = 0$           | A função e a variável podem ser quaisquer letras.                           |
| $y'' - 3y' + 2y = 3e^{(2x)}$        | Uma equação de ordem superior – as derivadas com mais plicas.               |
| $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$            | Derivadas superiores como $y^{(4)}$ (também de uma foto).                   |
| $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$  | Condições iniciais $y(0), y'(0)$ – ou de fronteira em pontos diferentes.    |
| $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$         | Os pontos de Newton (derivadas em ordem ao tempo $t$ ) e parâmetros gregos. |

# Exemplos

## Variáveis separáveis – a solução geral e o campo de direções.

Enunciado:  $y' = x \cdot y$

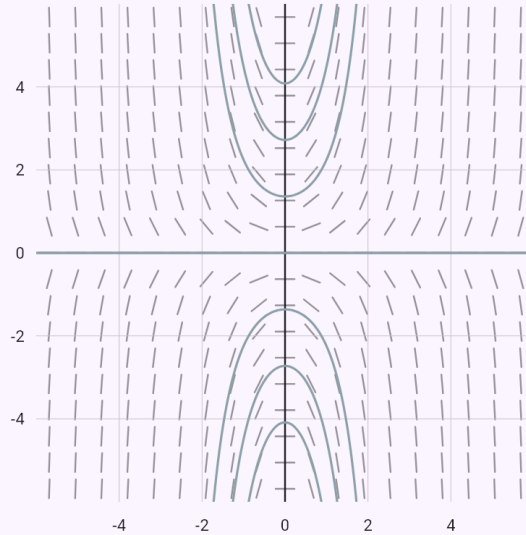
### Resultado

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

### Passos

- Uma equação de variáveis separáveis – o lado direito é o produto de uma função da variável e uma função da incógnita:  $y' = xy$
- Separamos as variáveis (dividindo, supondo  $y \neq 0$ ):  
 $\frac{dy}{y} = x dx$
- Integramos ambos os lados:  $\int \frac{dy}{y} = \int x dx$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- A solução geral na forma implícita:  $\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Aplicamos a exponencial – a constante  $\pm e^C$  chama-se de novo C:  $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- A solução constante  $y = 0$ , excluída ao dividir, está contida na solução geral para  $C = 0$
- Verificação – a derivada da solução  $y' = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$  substituída na equação dá uma igualdade.

### Gráfico



— soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

## A condição inicial determina a constante C.

Enunciado:  $y' = y^2 + 1$ ,  $y(0) = 1$

### Resultado

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

### Passos

- Uma equação de variáveis separáveis – o lado direito é o produto de uma função da variável e uma função da incógnita:  $y' = y^2 + 1$

- Separamos as variáveis (dividindo, supondo  $y^2 + 1 \neq 0$ ):  
$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx$$

- Integramos ambos os lados:  $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$

- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan y$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int 1 dx = x$

- A solução geral na forma implícita:  $\arctan y = x + C$

- Isolamos a solução:  $y = \tan(x + C)$

- Substituímos a condição inicial  $y(0) = 1$ :

$$1 = \tan C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$$

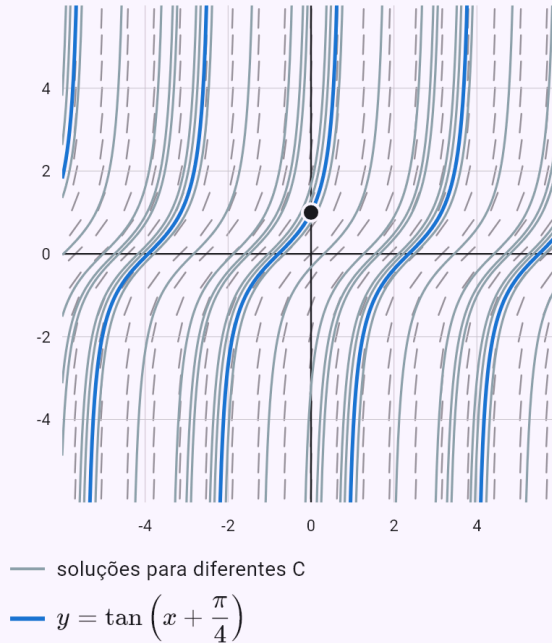
- A solução da condição inicial (solução particular):

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado. Em destaque está a solução da condição inicial; o ponto é a condição inicial.

- Verificação – a derivada da solução  $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$  substituída na equação dá uma igualdade.

### Gráfico



## Uma equação linear por variação da constante.

Enunciado:  $y' + 2y = e^x$

Variação da constante

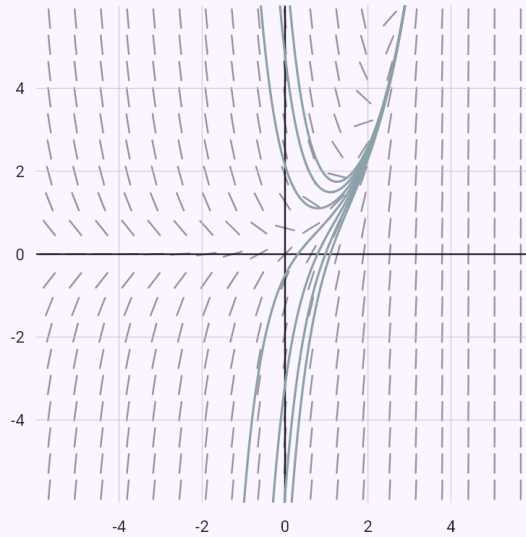
### Resultado

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

### Passos

- Uma equação linear de primeira ordem  $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ :  
 $y' + 2y = e^x$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo):  $y' + 2y = 0$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int 2 \, dx = 2x$
- Solução da equação homogénea:  $y_h = Ce^{-2x}$
- Variação da constante – procuramos a solução na forma  $y = C(x)e^{-2x}$ ; substituída na equação:  $C'(x)e^{-2x} = e^x$
- Daí  $C'(x) = e^{3x}$
- Pela tabela – a função interior é linear (ax + b), por isso dividimos o resultado por a:  $\int e^{3x} \, dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integramos:  $C(x) = \int e^{3x} \, dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- A solução geral:  $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Verificação – a derivada da solução  $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$  substituída na equação dá uma igualdade.

### Gráfico



— soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

## A mesma equação com fator integrante.

Enunciado:  $y' + 2y = e^x$

Fator integrante

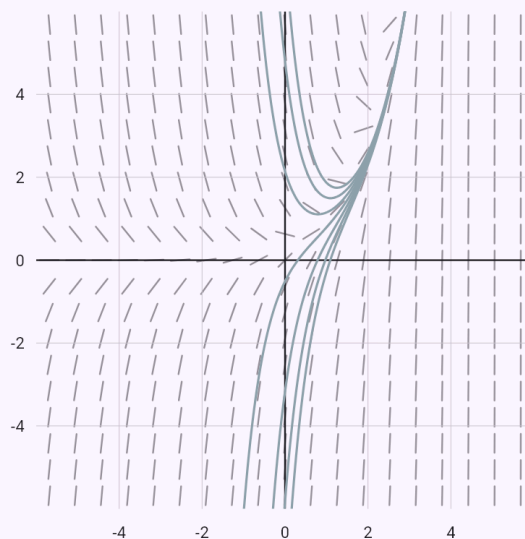
### Resultado

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

### Passos

- Uma equação linear de primeira ordem  $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ :  
 $y' + 2y = e^x$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int 2 dx = 2x$
- O fator integrante:  $\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$
- Multiplicamos pelo fator integrante – o lado esquerdo é a derivada de um produto:  $(ye^{2x})' = e^{3x}$
- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :  $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integramos ambos os lados:  $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- A solução geral:  $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Verificação – a derivada da solução  $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$  substituída na equação dá uma igualdade.

### Gráfico



— soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

## Uma equação homogénea – a substituição $u = y/x$ .

Enunciado:  $y' = (x - y)/(x + y)$

### Resultado

$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

### Passos

- Uma equação homogénea – o lado direito depende apenas do quociente  $y/x$ :  $y' = \frac{x - y}{x + y}$

- A substituição  $u = \frac{y}{x}$ ,  $y = ux$ ,  $y' = u + xu'$  transforma a equação em  $xu' = -u - 1 + \frac{2}{u+1}$

- Separamos as variáveis (dividindo, supondo  $u^2 + 2u - 1 \neq 0$ ):  $\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{x} dx$

- Integramos ambos os lados:  $\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = \int -\frac{1}{x} dx$

- Tiramos a constante para fora do integral:  $\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du$

- O numerador é a derivada do denominador (ou um múltiplo),  $f(x) = -u^2 - 2u + 1$ , pela fórmula

$$\int \frac{f'(u)}{f(u)} du = \ln |f(u)| + C$$

$$\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\frac{1}{2} \int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1} du = -\frac{\ln}{2}$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -\frac{1}{x} dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

- A solução geral na forma implícita:

$$\frac{\ln |-u^2 - 2u + 1|}{2} = C - \ln |x|$$

- Aplicamos a exponencial – a constante  $\pm e^C$  chama-se de novo C:  $-u^2 - 2u + 1 = \frac{C}{x^2}$

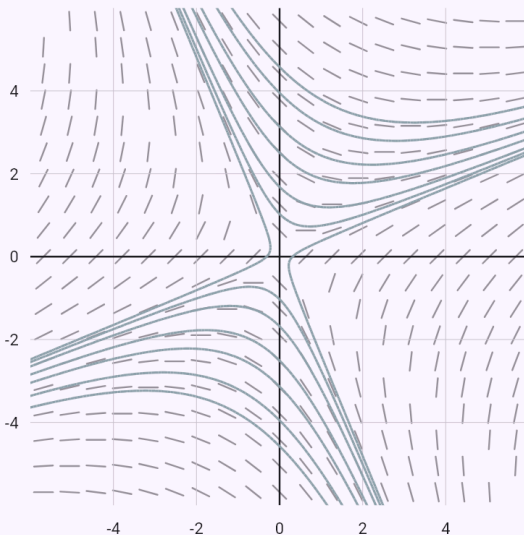
- A solução constante  $u = -1 - \sqrt{2}$ , excluída ao dividir, está contida na solução geral para  $C = 0$

- A solução constante  $u = -1 + \sqrt{2}$ , excluída ao dividir, está contida na solução geral para  $C = 0$

- Voltamos à incógnita original:  $\frac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \frac{C}{x^2}$

- A solução geral na forma implícita:  $x^2 - 2xy - y^2 = C$

### Gráfico



— soluções para diferentes C

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

## Uma equação de Bernoulli – a substituição $z = y^{1-n}$ e a solução constante $y = 0$ .

Enunciado:  $xy' - y = -xy^2$

### Resultado

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

### Passos

- Uma equação de Bernoulli  $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$ :

$$y' - \frac{y}{x} = -y^2$$

- A substituição  $z = \frac{1}{y}$ ,  $z' = -1 \frac{1}{y^2} y'$  transforma a equação em  $z' + \frac{z}{x} = 1$

- Primeiro resolvemos a equação homogênea (lado direito nulo):  $z' + \frac{z}{x} = 0$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

- Solução da equação homogênea:  $z_h = \frac{C}{x}$

- Variação da constante – procuramos a solução na forma  $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$ ; substituída na equação:  $C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$

- Daí  $C'(x) = x$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- Integramos:  $C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

- A solução geral:  $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- Voltamos à incógnita original:  $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- Isolamos a solução:  $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$

- Ao dividir excluímos a solução constante  $y = 0$  – é outra solução da equação.

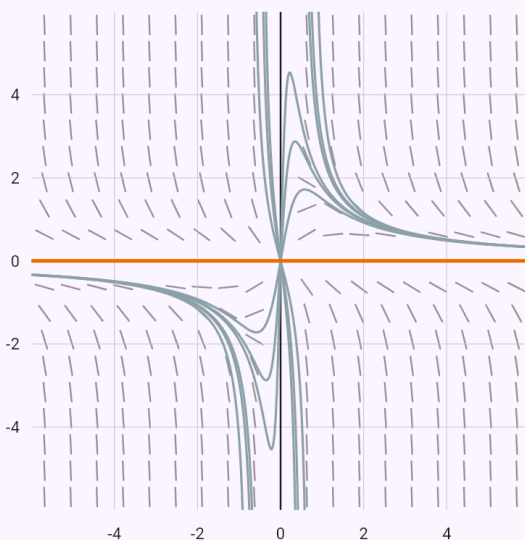
- Renomeamos a constante (um múltiplo de uma constante arbitrária é de novo uma constante arbitrária):

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}$$

- Verificação – a derivada da solução

$$y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2} \text{ substituída na equação dá uma igualdade.}$$

### Gráfico



— soluções para diferentes C

—  $y = 0$

Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzas são soluções para diferentes C – tocam os segmentos em todo o lado.

## Uma equação exata – a função potencial $F(x, y) = C$ .

Enunciado:  $(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$

### Resultado

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

### Passos

- Uma equação  $M dx + N dy = 0$  – verificamos se é exata (o lado esquerdo é uma diferencial total):  
 $(2xy + 6x)dx + (4y^3 + x^2)dy = 0$

- $M = 2xy + 6x$ ,  $N = 4y^3 + x^2$ ; a equação é exata, pois  
 $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais:  
 $\int (6x + 2yx) dx = \int 6x dx + \int 2yx dx$

- Tiramos a constante para fora do integral:  
 $\int 6x dx = 6 \int x dx$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- Tiramos a constante para fora do integral:  
 $\int 2yx dx = 2y \int x dx$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- A função potencial  $F$  integrando  $M$  em ordem a  $x$ :

$$F(x, y) = \int (2xy + 6x) dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

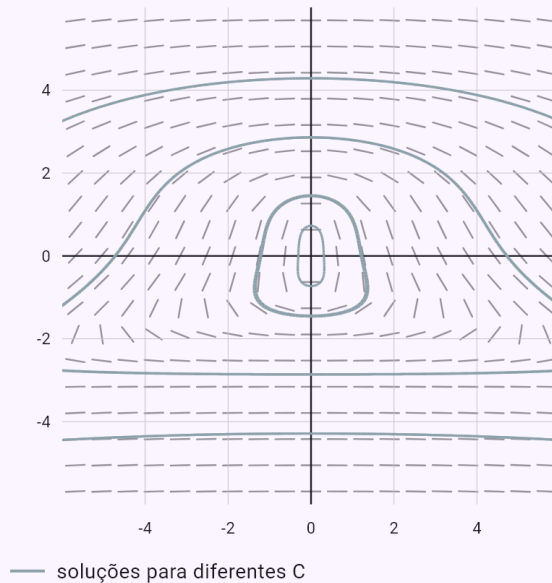
$$\int 4y^3 dy = 4 \int y^3 dy$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$

- De  $\partial F / \partial y = N$ :  $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$

- A solução geral na forma implícita:  $y^4 + x^2y + 3x^2 = C$

### Gráfico



Os segmentos curtos mostram em cada ponto a direção imposta pela equação (campo de direções). As curvas cinzentas são soluções para diferentes  $C$  – tocam os segmentos em todo o lado.

A substituição  $z = x - y$ ; o Symja perderia aqui um fator 2, a app verifica o resultado.

Enunciado:  $y' = \cos(x - y)$ ,  $y(0) = \pi/2$

### Resultado

$$y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + 1)$$

### Passos

- O lado direito é função de  $ax + by + c$  - tomamo-lo como nova incógnita:  $y' = \cos(x - y)$
- A substituição  $z = x - y$ ,  $z' = 1 - y'$  transforma a equação em  $z' = 1 - \cos z$
- Separamos as variáveis (dividindo, supondo  $1 - \cos z \neq 0$ ):  $\frac{dz}{1 - \cos z} = dx$
- Integramos ambos os lados:  $\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx$
- Nenhuma substituição mais simples serve - substituição universal  $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$   
 $\sin z = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dz = \frac{2dt}{(1+t^2)}$   
$$\int \frac{1}{1 - \cos z} dz = \int \frac{1}{t^2} dt$$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}$
- Voltamos à variável original:  
 $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$ :  $-\cot\left(\frac{z}{2}\right)$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int 1 dx = x$
- A solução geral na forma implícita:  $-\cot\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$
- Isolamos a solução:  $z = 2 \operatorname{arccot}(C - x)$
- Ao dividir excluimos a solução constante  $z = 0$  - é outra solução da equação.
- Voltamos à incógnita original:  $y = x - 2 \operatorname{arccot}(C - x)$
- Renomeamos a constante (um múltiplo de uma constante arbitrária é de novo uma constante arbitrária):  
 $y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + C)$
- Substituímos a condição inicial  $y(0) = \frac{\pi}{2}$ :  
 $\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arccot} C \Rightarrow C = 1$
- A solução da condição inicial (solução particular):  
 $y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + 1)$
- Verificação - a derivada da solução  $y' = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2}$  substituída na equação dá uma igualdade.

A equação característica com raízes complexas  $-2 \pm 3i$ .

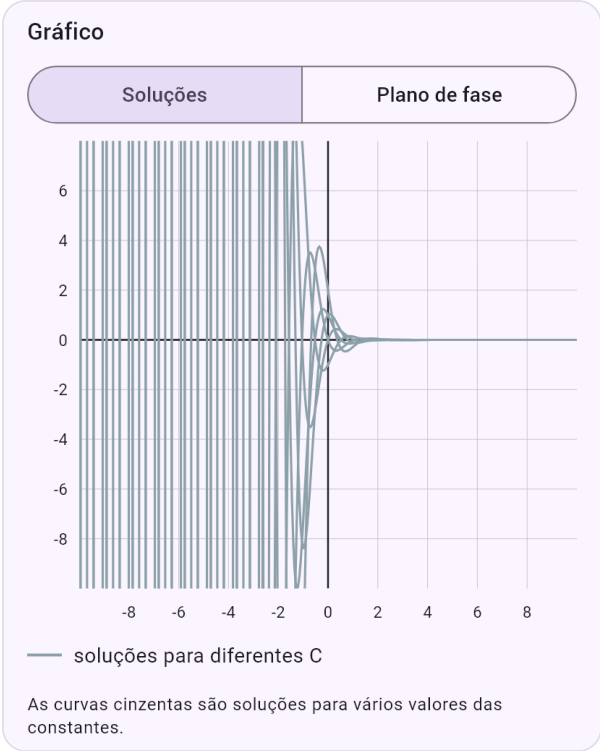
Enunciado:  $y'' + 4y' + 13y = 0$

Resultado

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes:  
 $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Procuramos soluções  $y = e^{\lambda x}$ ; substituindo e dividindo por  $e^{\lambda x}$ , obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- O discriminante  $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$ ; as raízes:  
 $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Cada raiz  $\lambda$  dá a solução  $e^{\lambda x}$ , uma raiz de multiplicidade  $k$  também  $x \cdot e^{\lambda x}$ , ...,  $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ , e um par  $\alpha \pm \beta i$  as soluções  $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$  e  $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ . O sistema fundamental:  
 $y_1 = e^{-2x} \cos(3x)$ ,  $y_2 = e^{-2x} \sin(3x)$
- A solução geral:  $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$



## Lado direito especial com ressonância – 2 é raiz da equação característica.

Enunciado:  $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

Lado direito especial

### Resultado

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

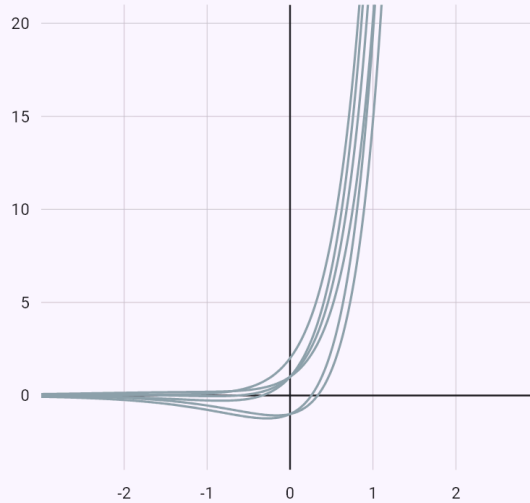
### Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes:  
 $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Primeiro resolvemos a equação homogênea (lado direito nulo):  $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Procuramos soluções  $y = e^{\lambda x}$ ; substituindo e dividindo por  $e^{\lambda x}$ , obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- O discriminante  $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$ ; as raízes:  
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
- Cada raiz  $\lambda$  dá a solução  $e^{\lambda x}$ , uma raiz de multiplicidade  $k$  também  $x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ , e um par  $\alpha \pm \beta i$  as soluções  $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$  e  $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ . O sistema fundamental:  $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$
- Solução da equação homogênea:  $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
- O lado direito  $3e^{2x}$  tem forma especial; o número 2 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por  $x$ :  $y_p = A x e^{2x}$
- As derivadas:  
 $y_p' = 2A x e^{2x} + A e^{2x}, y_p'' = 4A x e^{2x} + 4A e^{2x}$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados:  $A = 3$

- Uma solução particular:  $y_p = 3xe^{2x}$

- A solução geral:  $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

### Gráfico



— soluções para diferentes  $C$

As curvas cinzentas são soluções para vários valores das constantes.

## O lado direito $\tan x$ não é especial – variação das constantes e o wronskiano.

Enunciado:  $y'' + y = \tan x$

### Resultado

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln |\sec x|$$

### Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes:  
 $y'' + y = \tan x$
- Primeiro resolvemos a equação homogênea (lado direito nulo):  $y'' + y = 0$
- Procuramos soluções  $y = e^{\lambda x}$ ; substituindo e dividindo por  $e^{\lambda x}$ , obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 + 1 = 0$
- As raízes da equação característica:  $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Cada raiz  $\lambda$  dá a solução  $e^{\lambda x}$ , uma raiz de multiplicidade  $k$  também  $x \cdot e^{\lambda x}$ , ...,  $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ , e um par  $\alpha \pm \beta i$  as soluções  $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$  e  $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ . O sistema fundamental:  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$
- Solução da equação homogênea:  
 $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variação das constantes – procuramos a solução na forma  $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ , as derivadas das funções  $C_k$  satisfazem o sistema
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x \end{cases}$$

- O determinante do sistema (o wronskiano)

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

- Daí  $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$

- Daí  $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \sin x$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = - \int \sin x \cdot \tan x \, dx$$

- A função é ímpar em relação ao cosseno – substituição  
 $t = \sin x$

$$dt = \cos x \, dx$$

$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais

$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left( -1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) \, dt$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left( -1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) \, dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt + \int \frac{1}{2(t+1)} \, dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int -1 \, dt = -t$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -\frac{1}{2(t-1)} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{t-1} dt = \ln |t-1|$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{1}{2(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt$$

- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1|$$

- Voltamos à variável original

$$t = \sin x : \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$

- Integramos (as constantes de integração já estão na solução homogénea):

$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \tan x dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \sin x dx = -\cos x$

- Integramos (as constantes de integração já estão na solução homogénea):  $C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x$

- Uma solução particular:

$$y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- A solução geral

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| +$$

## Um problema de valor inicial – um sistema para as constantes $C_1, C_2$ .

Enunciado:  $y'' - 4y' + 3y = e^{(2x)}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

### Resultado

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

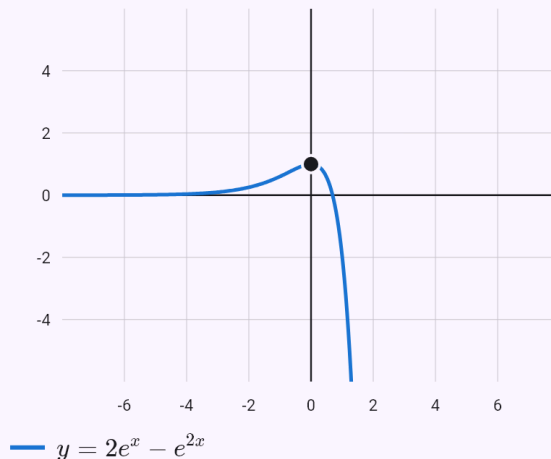
### Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes:  
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Primeiro resolvemos a equação homogênea (lado direito nulo):  $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Procuramos soluções  $y = e^{(\lambda x)}$ ; substituindo e dividindo por  $e^{(\lambda x)}$ , obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- O discriminante  $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$ ; as raízes:  
 $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$
- Cada raiz  $\lambda$  dá a solução  $e^{(\lambda x)}$ , uma raiz de multiplicidade  $k$  também  $x \cdot e^{(\lambda x)}$ , ...,  $x^{(k-1)} \cdot e^{(\lambda x)}$ , e um par  $\alpha \pm \beta i$  as soluções  $e^{(\alpha x)} \cdot \cos \beta x$  e  $e^{(\alpha x)} \cdot \sin \beta x$ . O sistema fundamental:  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{3x}$
- Solução da equação homogênea:  $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
- O lado direito  $e^{2x}$  tem forma especial; o número 2 não é raiz da equação característica, por isso procuramos uma solução particular  $y_p = A e^{2x}$
- As derivadas:  $y'_p = 2A e^{2x}$ ,  $y''_p = 4A e^{2x}$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados:  $-A = 1$

A destacada satisfaz as condições; os pontos são os valores dados.

- Onde  $A = -1$
- Uma solução particular:  $y_p = -e^{2x}$
- A solução geral:  $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- As derivadas da solução geral:  
 $y' = C_1 e^x - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$ . As condições dão o sistema donde  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 0$   
$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$
- A solução que satisfaz as condições dadas:  
 $y = 2e^x - e^{2x}$

### Gráfico



## O mesmo problema pela transformada de Laplace.

Enunciado:  $y'' - 4y' + 3y = e^{(2x)}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

Transformada de Laplace

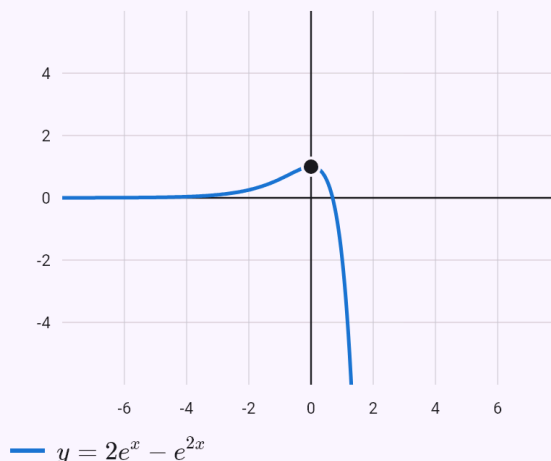
### Resultado

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

### Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes:  
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Transformada de Laplace dos dois lados:  $\mathcal{L}(y) = Y$ ,  $\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$ ,  $\mathcal{L}(y'') = s^2 Y - s \cdot y(0) - y'(0)$ ; com as condições iniciais:  $(s^2 Y - s) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Isolamos a imagem  $Y$ :  $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Frações parciais:  $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- A transformada inversa (pela tabela de imagens) dá a solução:  $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^x - e^{2x}$

### Gráfico



A destacada satisfaz as condições; os pontos são os valores dados.

## Um problema de fronteira com infinitas soluções.

Enunciado:  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$

### Resultado

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

### Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes:

$$y'' + y = 0$$

- Procuramos soluções  $y = e^{\lambda x}$ ; substituindo e dividindo por  $e^{\lambda x}$ , obtemos a equação característica:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

- As raízes da equação característica:  $\lambda_{1,2} = \pm i$

- Cada raiz  $\lambda$  dá a solução  $e^{\lambda x}$ , uma raiz de multiplicidade  $k$  também  $x \cdot e^{\lambda x}$ , ...,  $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ , e um par  $\alpha \pm \beta i$  as soluções  $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$  e  $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ . O sistema fundamental:  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$

- A solução geral:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

- Substituímos as condições na solução geral donde

$$C_1 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$

- A constante  $C_2$  fica arbitrária – o problema tem infinitas soluções.

- A solução que satisfaz as condições dadas:

$$y = C_2 \sin x$$

## Equação de Euler – a substituição $x = e^t$ .

Enunciado:  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$

### Resultado

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

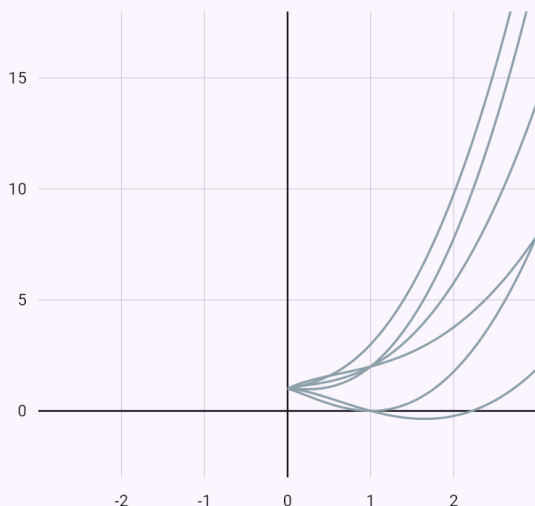
### Passos

- Equação de Euler – cada derivada  $y^{(k)}$  vem com  $x^k$ ; a substituição  $x = e^t$  transforma-a numa de coeficientes constantes:  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- A substituição  $x = e^t$ ,  $xy' = \dot{y}$ ,  $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$  transforma a equação em  $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Primeiro resolvemos a equação homogénea (lado direito nulo):  $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Procuramos soluções  $y = e^{\lambda t}$ ; substituindo e dividindo por  $e^{\lambda t}$ , obtemos a equação característica:  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- O discriminante  $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$ ; as raízes:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$
- Cada raiz  $\lambda$  dá a solução  $e^{\lambda t}$ , uma raiz de multiplicidade  $k$  também  $x \cdot e^{\lambda t}$ , ...,  $x^{k-1} \cdot e^{\lambda t}$ , e um par  $\alpha \pm \beta i$  as soluções  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  e  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ . O sistema fundamental:  $y_1 = e^t$ ,  $y_2 = e^{2t}$
- Solução da equação homogénea:  $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Dividimos o lado direito em partes de forma especial – uma solução particular para cada uma, depois somamos:  $f_1 = 2$ ,  $f_2 = e^{2t}$
- O lado direito 2 tem forma especial; o número 0 não é

raiz da equação característica, por isso procuramos uma solução particular  $y_{p_1} = A$

- As derivadas:  $y'_{p_1} = 0$ ,  $y''_{p_1} = 0$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados:  $2A = 2$
- Donde  $A = 1$
- Uma solução particular:  $y_{p_1} = 1$
- O lado direito  $e^{2t}$  tem forma especial; o número 2 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por  $x$ :  $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- As derivadas:  $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t}$ ,  $y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados:  $A = 1$
- Uma solução particular:  $y_{p_2} = te^{2t}$
- Uma solução particular:  $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- A solução geral:  $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Voltamos à variável original ( $t = \ln x$ , para  $x > 0$ ):  
 $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

### Gráfico



— soluções para diferentes C

As curvas cinzentas são soluções para vários valores das constantes.

## A redução $y' = p(y)$ , as constantes das condições iniciais passo a passo.

Enunciado:  $y'' = e^{2y}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

### Resultado

$$y = -\ln(1 - x)$$

### Passos

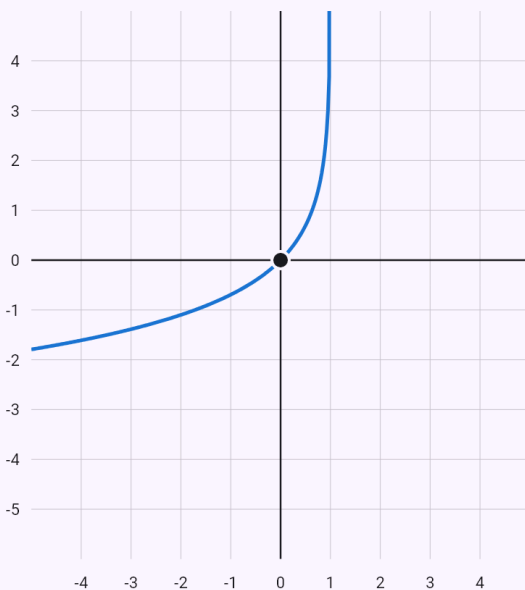
- Falta a variável independente – tomamos  $y'$  como função de  $y$ :  $y'' = e^{2y}$
- A substituição  $y' = p(y)$ ,  $y'' = p \frac{dp}{dy}$  transforma a equação em  $p \frac{dp}{dy} = e^{2y}$ ; das condições iniciais resulta  $p(0) = 1$
- Uma equação de variáveis separáveis – o lado direito é o produto de uma função da variável e uma função da incógnita:  $\frac{dp}{dy} = \frac{e^{2y}}{p}$
- Separamos as variáveis:  $p dp = e^{2y} dy$
- Integramos ambos os lados:  $\int p dp = \int e^{2y} dy$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int p dp = \frac{p^2}{2}$
- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :  $\int e^{2y} dy = \frac{e^{2y}}{2}$
- A solução geral na forma implícita:  $\frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Isolamos a solução:  $p^2 = e^{2y} + C_1$

- Substituímos a condição inicial  $p(0) = 1$ :  
 $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- A solução da condição inicial (solução particular):  
 $p = e^y$
- Voltamos à incógnita original:  $y' = e^y$
- Uma equação de variáveis separáveis – o lado direito é o produto de uma função da variável e uma função da incógnita:  $y' = e^y$
- Separamos as variáveis (dividindo, supondo  $e^y \neq 0$ ):  
 $\frac{dy}{e^y} = dx$
- Integramos ambos os lados:  $\int \frac{dy}{e^y} = \int dx$
- Pela tabela – a função interior é linear ( $ax + b$ ), por isso dividimos o resultado por  $a$ :  $\int e^{-y} dy = -e^{-y}$
- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int 1 dx = x$
- A solução geral na forma implícita:  $-e^{-y} = x + C_2$
- Isolamos a solução:  $y = -\ln(C_2 - x)$
- Substituímos a condição inicial  $y(0) = 0$ :  
 $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- A solução da condição inicial (solução particular):  
 $y = -\ln(1 - x)$

### Gráfico

Soluções

Plano de fase



—  $y = -\ln(1 - x)$

A destacada satisfaz as condições; os pontos são os valores dados.

## Um oscilador amortecido: três casos segundo $\delta$ e $\omega$ .

Enunciado:  $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$

### Resultado

$$\delta > \omega : y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

$$\delta = \omega : y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega : y = e^{-\delta x} \left( C_1 \cos \left( \sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left( \sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

### Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes:

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

- Procuramos soluções  $y = e^{\lambda x}$ ; substituindo e dividindo por  $e^{\lambda x}$ , obtemos a equação característica:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

- As raízes da equação característica:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

- Para  $\delta > \omega$  logo

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$$y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

- Para  $\delta = \omega$ :  $\lambda_{1,2} = -\delta$ , logo  $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$

- Para  $\delta < \omega$ :  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}i$ , logo

$$y = e^{-\delta x} \left( C_1 \cos \left( \sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left( \sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

**Ressonância: para  $\omega = 2$  a solução tem outra forma.**

Enunciado:  $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$

### Resultado

$$\omega \neq 2 : y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2 : y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

### Passos

- Uma equação linear com coeficientes constantes:  
 $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Primeiro resolvemos a equação homogênea (lado direito nulo):  $y'' + \omega^2 y = 0$
- Procuramos soluções  $y = e^{\lambda t}$ ; substituindo e dividindo por  $e^{\lambda t}$ , obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- As raízes da equação característica:  $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Cada raiz  $\lambda$  dá a solução  $e^{\lambda x}$ , uma raiz de multiplicidade  $k$  também  $x \cdot e^{\lambda x}$ , ...,  $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ , e um par  $\alpha \pm \beta i$  as soluções  $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$  e  $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ . O sistema fundamental:  $y_1 = \cos(\omega t)$ ,  $y_2 = \sin(\omega t)$
- Solução da equação homogênea:  
 $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- O lado direito  $\cos(2t)$  tem forma especial; o número  $2i$  não é raiz da equação característica, por isso

procuramos uma solução particular

$$y_p = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

- As derivadas  
 $y'_p = 2B \cos(2t) - 2A \sin(2t)$ ,  $y''_p = -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t)$
- Substituído na equação (dividido pela exponencial), termos semelhantes agrupados  
 $(A\omega^2 - 4A) \cos(2t) + (B\omega^2 - 4B) \sin(2t) = \cos(2t)$
- Comparamos os coeficientes dos termos semelhantes dos dois lados donde  $A = \frac{1}{\omega^2 - 4}$ ,  $B = 0$   
$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$
- Uma solução particular:  $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- A solução geral  
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$
- Para  $\omega = 2$  o número do lado direito é raiz da equação característica (ressonância): a solução tem outra forma:  
$$y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$$

## Uma solução adivinhada $y_1 = x$ e a redução da ordem (d'Alembert).

Enunciado:  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

### Resultado

$$y = C_1x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1|)$$

### Passos

- Uma equação linear de segunda ordem com coeficientes variáveis:  $y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$
- Adivinhamos uma solução e verificamo-la por substituição:  $y_1 = x$ . A segunda, reduzindo a ordem (d'Alembert,  $y = y_1 \cdot u$ )

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = x \ln|x-1|$$

- Decompomos a função racional num polinómio e frações parciais

$$\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = \int \left( \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

- O integral de uma soma é a soma dos integrais

$$\int \left( \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)} dx$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int \frac{1}{2(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1|$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

$$\int -\frac{1}{2(x+1)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1|$$

- Tiramos a constante para fora do integral:

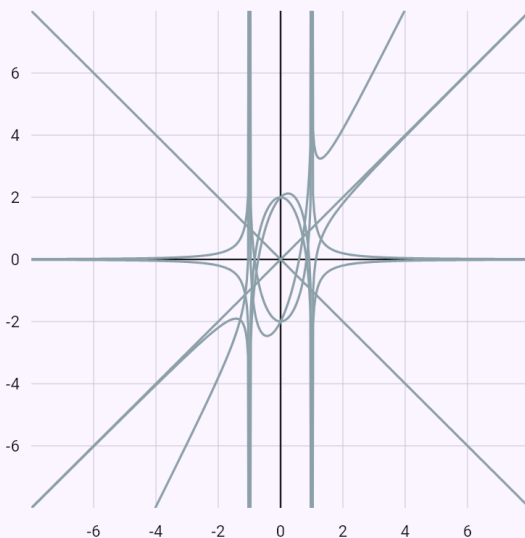
$$\int -\frac{1}{x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

- Pela tabela de integrais imediatos:  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$

- A solução geral:

$$y = C_1x + C_2(x \ln|x-1| - x \ln|x+1| + 2)$$

### Gráfico



— soluções para diferentes C

As curvas cinzentas são soluções para vários valores das constantes.

## Limitações conhecidas

---

- Uma equação que precisa de uma indicação do enunciado (diferente de  $z = \ln y$ ) ainda não é resolvida.
- Numa equação com parâmetro  $(k, \lambda, \omega)$  a aplicação não desenha gráfico e considera os parâmetros positivos.
- Quando a solução não se pode exprimir explicitamente, fica na forma implícita.
- A transformada de Laplace ainda não conhece a função de Heaviside, os deslocamentos nem os lados direitos periódicos.

# Recorrências e funções geradoras

A aplicação resolve recorrências lineares com coeficientes constantes de qualquer ordem pela equação característica – também raízes múltiplas e complexas (a forma complexa da solução e a sua passagem à forma real pelo teorema de De Moivre) – e com lado direito da forma  $P(n) \cdot q^n$  (também  $\cos n\varphi$ ,  $\sin n\varphi$ , ressonância e soma de lados direitos). As condições iniciais determinam as constantes; como verificação, a aplicação calcula mais termos pela recorrência e compara-os com a fórmula.

O chip «Método» oferece também a função geradora ( $A(x) = \sum a_n x^n$ , frações parciais, séries geométricas), as potências de uma matriz (diagonalização) ou, na primeira ordem, o somatório. Uma recorrência de primeira ordem com coeficiente variável ( $a_{n+1} = (n + 1)a_n$ ) resolve-se por um produto (fatoriais), as recorrências não lineares convertíveis pela substituição  $b_n = 1/a_n$  ou  $b_n = \ln a_n$ . Um sistema de duas recorrências resolve-se eliminando uma sucessão ou pela matriz, e uma recorrência de dividir para conquistar  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$  por  $n = b^k$  – com a estimativa do teorema mestre.

Com a operação «Função geradora», a aplicação encontra a função geradora de uma sucessão dada por uma fórmula ( $n^2 + 2^n$ ) ou pelos primeiros termos (1, 0, 1, 0, ...) e, ao contrário, a fórmula de  $a_n$  a partir de uma função  $A(x)$ . O número de soluções inteiras não negativas de  $x_1 + x_2 + \dots = N$  (também com limites ou coeficientes – pagar com moedas) é um coeficiente de uma função geradora.

O gráfico mostra os termos da sucessão como pontos (num sistema, as duas sucessões).

## Como introduzir

|                                                                                |                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4$                                 | Com parênteses, as condições após uma vírgula.                                                  |
| $a_{\{n+2\}} = 5a_{\{n+1\}} - 6a_n$                                            | Com índices (também de uma foto). Sem condições: a solução geral com as constantes $C_1, C_2$ . |
| $F_n = F_{\{n-1\}} + F_{\{n-2\}}, F_1 = F_2 = 1$                               | O índice pode descer ( $a_{n-1}, a_{n-2}$ ); o mesmo valor pode ser dado a vários termos.       |
| $a_{\{n+1\}} = a_n + 2b_n$<br>$b_{\{n+1\}} = 3a_n + b_n$<br>$a_0 = 1, b_0 = 0$ | Um sistema – as equações em linhas, as condições na última.                                     |
| $T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1$                                                 | Dividir para conquistar – um termo em $n/b$ .                                                   |

|                                                       |                                                                                     |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $n^2 + 2^n$                                           | A fórmula de uma sucessão com a operação «Função geradora» (também $a_n = \dots$ ). |
| 1, 0, 1, 0, ...                                       | Os primeiros termos separados por vírgulas.                                         |
| $1/(1 - x - x^2)$                                     | Uma função geradora em $x$ (também $A(x) = \dots$ ) – a fórmula de $a_n$ .          |
| número de soluções $x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 \leq 3$ | O número de soluções inteiras não negativas com limites.                            |

## Exemplos

### Duas raízes reais distintas, a verificação com mais termos.

Enunciado:  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4$

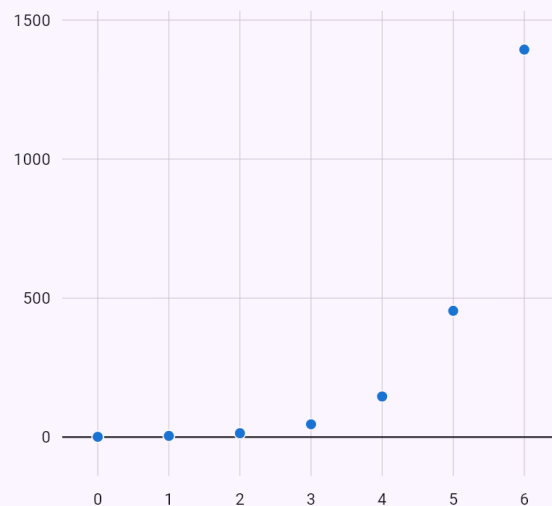
#### Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

#### Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes:  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Procuramos soluções  $a_n = \lambda^n$ ; substituindo e dividindo por  $\lambda^n$  obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- O discriminante  $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$ ; as raízes:  
 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
- A solução geral:  $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Substituímos as condições na solução geral donde  
 $C_1 + C_2 = 1$   
 $2C_1 + 3C_2 = 4$
- A solução que satisfaz as condições dadas:  
 $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Verificação: a recorrência dá  
 $a_2 = 14, a_3 = 46, a_4 = 146$  – o mesmo que a fórmula.

#### Gráfico



•  $a_n$

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## A sucessão de Fibonacci – a fórmula de Binet.

Enunciado:  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$

### Resultado

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

### Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes:  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Procuramos soluções  $F_n = \lambda^n$ ; substituindo e dividindo por  $\lambda^{n-2}$  obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- O discriminante  $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$ ; as raízes:  
 $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- A solução geral

$$F_n = C_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Substituímos as condições na solução geral donde

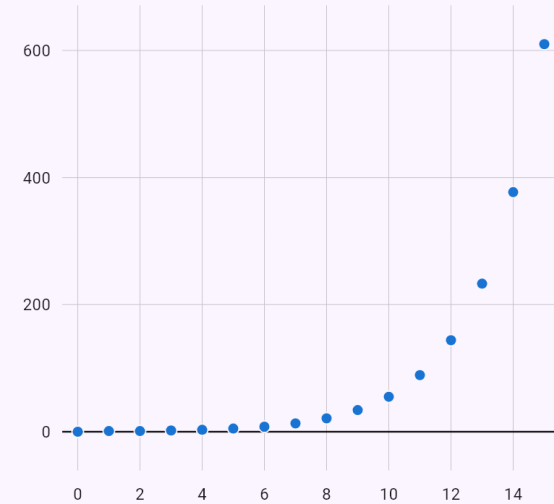
$$C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} C_2 = 1$$

- A solução que satisfaz as condições dadas

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Verificação: a recorrência dá  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$  – o mesmo que a fórmula.

### Gráfico



●  $F_n$

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## Raízes complexas $1 \pm i$ – a forma complexa e o teorema de De Moivre.

Enunciado:  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$

### Resultado

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

### Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes:  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Procuramos soluções  $a_n = \lambda^n$ ; substituindo e dividindo por  $\lambda^n$  obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- O discriminante  $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$ ; as raízes:  
 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Escrevemos as raízes complexas  $1 \pm i$  na forma trigonométrica:  $|\lambda| = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , ou seja  $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ . Pelo teorema de De Moivre  $\lambda^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- A solução geral na forma complexa (constantes complexas):  $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$ . Somando os termos conjugados, com novas constantes reais obtemos a forma real  
$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$
- Substituímos as condições na solução geral donde  
 $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 1$

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

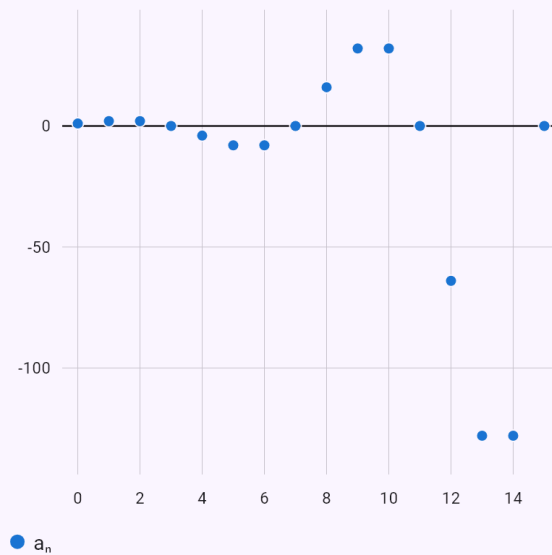
$$C_1 = 1$$
$$C_1 + C_2 = 2$$

- A solução que satisfaz as condições dadas

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

- Verificação: a recorrência dá  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = -4$  – o mesmo que a fórmula.

### Gráfico



## O lado direito n, uma raiz dupla 2.

Enunciado:  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$

### Resultado

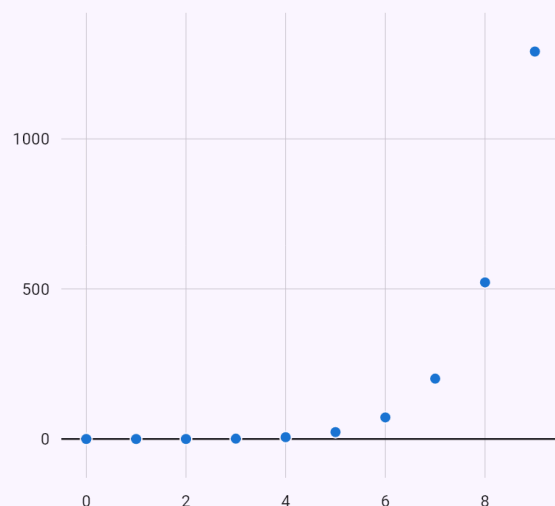
$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

### Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes:  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Primeiro resolvemos a recorrência homogênea (lado direito 0):  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Procuramos soluções  $a_n = \lambda^n$ ; substituindo e dividindo por  $\lambda^n$  obtemos a equação característica:  
 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- O discriminante  $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$ ; as raízes:  
 $\lambda_{1,2} = 2$
- A solução geral da recorrência homogênea:  
 $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- O lado direito  $n$  tem forma especial; o número 1 não é raiz da equação característica, por isso procuramos uma solução particular  $a_n^{(p)} = An + B$
- Substituímos na recorrência e agrupamos os termos:  
 $An + B - 2A = n$
- Comparamos os coeficientes dos termos semelhantes dos dois lados donde  $A = 1$ ,  $B = 2$   
 $A = 1$   
 $B - 2A = 0$

- Uma solução particular:  $a_n^{(p)} = n + 2$
- A solução geral:  
 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Substituímos as condições na solução geral donde  
 $C_1 = -2$ ,  $C_2 = \frac{1}{2}$   
 $C_1 + 2 = 0$   
 $2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$
- A solução que satisfaz as condições dadas:  
 $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Verificação: a recorrência dá  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 1$ ,  $a_4 = 6$  – o mesmo que a fórmula.

### Gráfico



•  $a_n$

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## A mesma recorrência pela função geradora.

Enunciado:  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 4$

Função geradora

### Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

### Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes:  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

- Introduzimos a função geradora  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

- Multiplicamos a recorrência por  $x^{n+2}$  e somamos para todo  $n \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Expressamos as somas pela função geradora e pelos valores iniciais:

$$A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$$

- Isolamos a função geradora e fatorizamos o denominador:  $A(x) = \frac{1-x}{(1-2x)(1-3x)}$

- Decomposição em frações parciais:

$$A(x) = -\frac{1}{1-2x} + \frac{2}{1-3x}$$

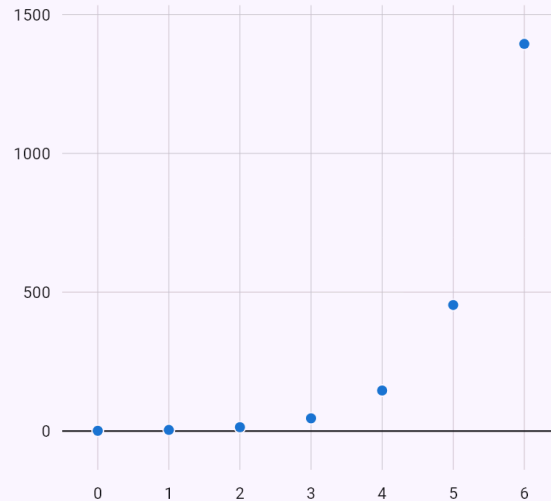
- Desenvolvemos as frações em séries geométricas

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- O coeficiente de  $x^n$  é o termo procurado:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

### Gráfico



•  $a_n$

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## A mesma recorrência pelas potências de uma matriz.

Enunciado:  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 4$

Potências de uma matriz

### Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

### Passos

- Recorrência linear de ordem 2 com coeficientes constantes:  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

- A recorrência na forma matricial ou seja  $v_{n+1} = M \cdot v_n$  com

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Substituindo repetidamente,  $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Os valores próprios da matriz:

$$\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \text{ logo } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

- Os vetores próprios – soluções de  $(M - \lambda E)u = 0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Diagonalizamos a matriz,  $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- A potência da matriz os coeficientes portanto  $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1}v_0)$ .

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

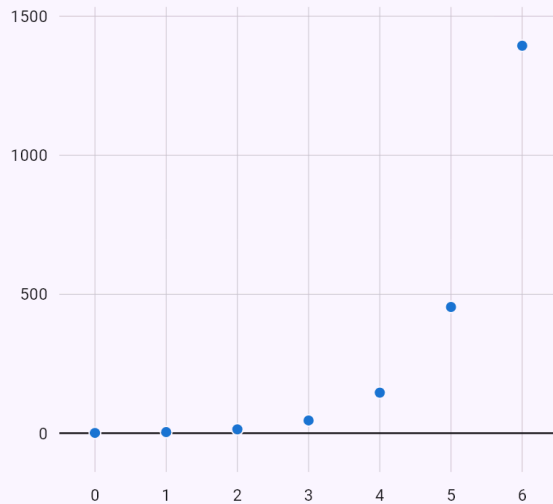
- A solução que satisfaz as condições dadas:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

- Verificação: a recorrência dá

$$a_2 = 14, \quad a_3 = 46, \quad a_4 = 146 - \text{o mesmo que a fórmula.}$$

### Gráfico



●  $a_n$

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## Uma recorrência de primeira ordem por somatório.

Enunciado:  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ,  $a_0 = 0$

Somatório

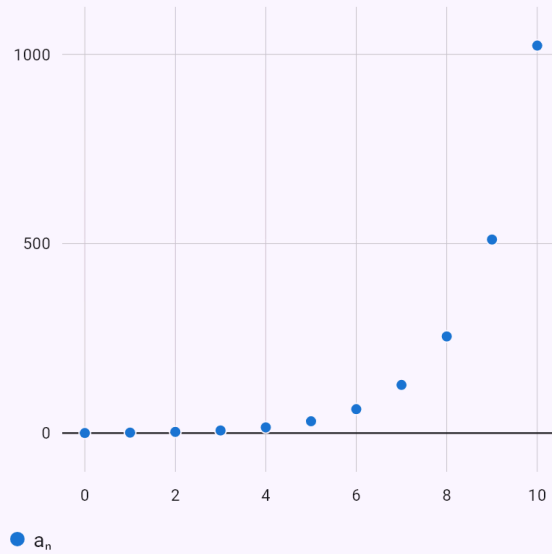
### Resultado

$$a_n = 2^n - 1$$

### Passos

- Recorrência linear de ordem 1 com coeficientes constantes:  $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Substituímos a recorrência em si mesma repetidamente:  
 $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \dots$ ; em geral  
$$a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$$
- Calculamos a soma:  $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- A solução que satisfaz as condições dadas:  $a_n = 2^n - 1$
- Verificação: a recorrência dá  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 7$  – o mesmo que a fórmula.

### Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## Um coeficiente variável – o produto dá um fatorial.

Enunciado:  $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ,  $a_0 = 1$

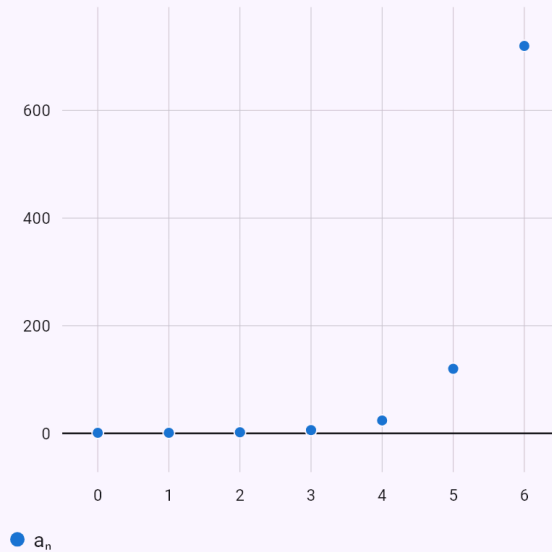
### Resultado

$$a_n = n!$$

### Passos

- Recorrência linear de primeira ordem com coeficiente variável:  $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Substituindo a recorrência em si mesma, o termo é um produto  
$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \dots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1)$$
- Simplificamos o produto (os fatoriais cancelam-se):  
$$\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$$
- A solução que satisfaz as condições dadas:  $a_n = n!$
- Verificação: a recorrência dá  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 6$  – o mesmo que a fórmula.

### Gráfico



Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## Uma recorrência não linear – a substituição $b_n = 1/a_n$ .

Enunciado:  $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$ ,  $a_0 = 1$

### Resultado

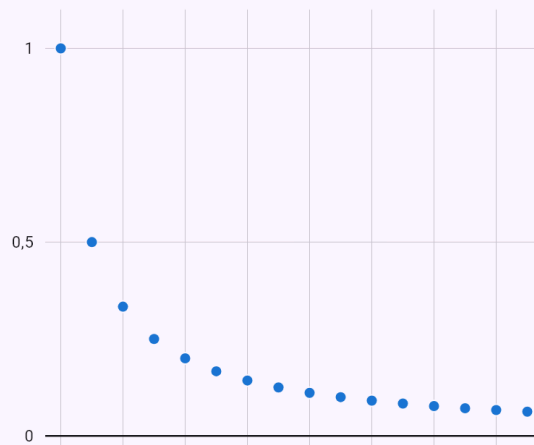
$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

### Passos

- Uma recorrência não linear – os inversos dos termos tornam-na linear:  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Invertamos ambos os lados:  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$ ; a substituição  $b_n = \frac{1}{a_n}$  torna assim a recorrência linear:  $b_{n+1} = b_n + 1$
- As condições iniciais da nova sucessão:  $b_0 = 1$
- Primeiro resolvemos a recorrência homogênea (lado direito 0):  $b_{n+1} - b_n = 0$
- Procuramos soluções  $b_n = \lambda^n$ ; substituindo e dividindo por  $\lambda^n$  obtemos a equação característica:  $\lambda - 1 = 0$
- As raízes da equação característica:  $\lambda_1 = 1$
- A solução geral da recorrência homogênea:  $b_n^{(h)} = C_1$
- O lado direito 1 tem forma especial; o número 1 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por n:  $b_n^{(p)} = An$
- Substituímos na recorrência e agrupamos os termos:  $A = 1$

- Uma solução particular:  $b_n^{(p)} = n$
- A solução geral:  $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Substituímos as condições na solução geral donde  $C_1 = 1$   
 $C_1 = 1$
- A solução que satisfaz as condições dadas:  $b_n = 1 + n$
- Verificação: a recorrência dá  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 3$ ,  $b_3 = 4$  – o mesmo que a fórmula.
- Voltamos à sucessão original:  $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

### Gráfico



0 2 4 6 8 10 12 14

•  $a_n$

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## Um sistema de duas recorrências eliminando a sucessão $b_n$ .

Enunciado:  $a_{n+1} = a_n + 2b_n$

$b_{n+1} = 3a_n + b_n$

$$a_0 = 1, b_0 = 0$$

### Resultado

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

### Passos

- Um sistema de duas recorrências lineares

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$b_{n+1} = 3a_n + b_n$$

- Da primeira equação  $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$ , logo

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}; \text{ substituindo na segunda obtemos}$$

uma recorrência para uma só sucessão:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$$

- A segunda condição inicial obtém-se da primeira equação:  $a_1 = 1 + 0 = 1$

- Procuramos soluções  $a_n = \lambda^n$ ; substituindo e dividindo por  $\lambda^n$  obtemos a equação característica:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$$

- O discriminante  $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$ ; as raízes:

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{6}, \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$$

- A solução geral:  $a_n = C_1 (1 - \sqrt{6})^n + C_2 (1 + \sqrt{6})^n$

- Substituímos as condições na solução geral donde

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$(1 - \sqrt{6})C_1 + (1 + \sqrt{6})C_2 = 1$$

- A solução que satisfaz as condições dadas:

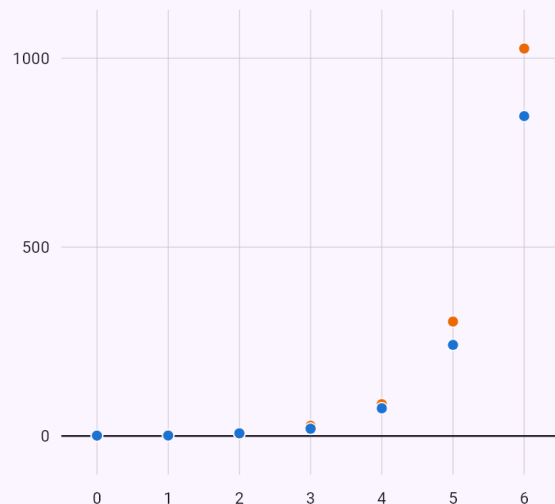
$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

- Verificação: a recorrência dá  $a_2 = 7$ ,  $a_3 = 19$ ,  $a_4 = 73$  – o mesmo que a fórmula.

- A outra sucessão a partir da expressão

$$b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

### Gráfico



● a\_n ● b\_n

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## Dividir para conquistar (merge sort) – $n = 2^k$ e o teorema mestre.

Enunciado:  $T(n) = 2T(n/2) + n$ ,  $T(1) = 1$

### Resultado

$$T(n) = n + n \log_2 n$$

Condições:  $n = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$

### Passos

- Uma recorrência do tipo dividir para conquistar:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

- Para  $n$  potência da base: a substituição  $n = 2^k$ ,  $S_k = T(2^k)$  dá uma recorrência linear de primeira ordem:  $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- As condições iniciais da nova sucessão:  $S_0 = 1$
- Primeiro resolvemos a recorrência homogênea (lado direito 0):  $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Procuramos soluções  $S_k = \lambda^k$ ; substituindo e dividindo por  $\lambda^k$  obtemos a equação característica:  $\lambda - 2 = 0$
- As raízes da equação característica:  $\lambda_1 = 2$
- A solução geral da recorrência homogênea:  $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- O lado direito  $2^{k+1}$  tem forma especial; o número 2 é raiz da equação característica (multiplicidade 1), por isso a forma é multiplicada por  $k$ :  $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Substituímos na recorrência, dividimos por  $2^k$  e agrupamos os termos:  $2A = 2$

- Onde  $A = 1$

- Uma solução particular:  $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$

- A solução geral:  $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$

- Substituímos as condições na solução geral donde  $C_1 = 1$

$$C_1 = 1$$

- A solução que satisfaz as condições dadas:

$$S_k = 2^k + k \cdot 2^k$$

- Verificação: a recorrência dá  $S_1 = 4$ ,  $S_2 = 12$ ,  $S_3 = 32$  – o mesmo que a fórmula.

- Voltamos a  $n$  ( $k = \log_2 n$ ):  $T(n) = n + n \log_2 n$

- O teorema mestre ( $a = 2$ ,  $b = 2$ ,  $f(n) = \Theta(n)$ ):  $2 = 2^1$ , logo  $T(n) = \Theta(n \log n)$

## A função geradora da sucessão $n^2 + 2^n$ .

Enunciado:  $n^2 + 2^n$

Função geradora

### Resultado

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

### Passos

- Introduzimos a função geradora

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n) x^n$$

- Separamos a série por linearidade:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

- Uma série conhecida:  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$

- Uma série conhecida:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

- Multiplicar os termos por n equivale a derivar e multiplicar por x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- Multiplicar os termos por n equivale a derivar e multiplicar por x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

- A função geradora:  $A(x) = \frac{1-2x+2x^2-3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Verificação – o desenvolvimento começa pelos termos da sucessão:  $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \dots$

## A fórmula de $a_n$ a partir de uma função geradora – frações parciais com raízes irracionais.

Enunciado:  $1/(1 - x - x^2)$

Função geradora

### Resultado

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

### Passos

- Isolamos a função geradora e fatorizamos o denominador

$$A(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Decomposição em frações parciais

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Desenvolvemos as frações em séries geométricas

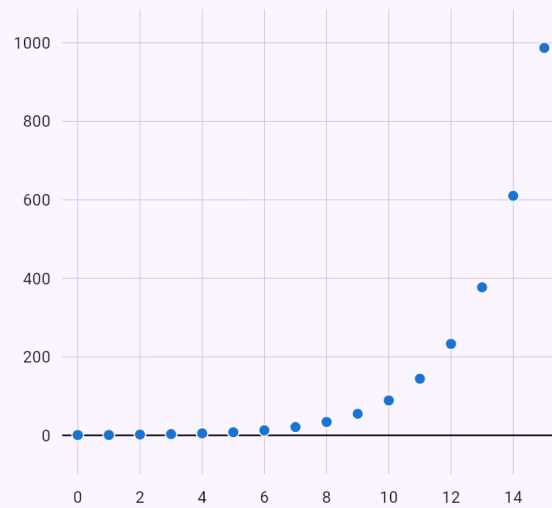
$$\frac{1}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n, \quad \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n$$

- O coeficiente de  $x^n$  é o termo procurado

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Verificação – o desenvolvimento começa pelos termos da sucessão:  $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

### Gráfico



•  $a_n$

Os pontos são os termos calculados pela fórmula – a própria recorrência dá os mesmos valores.

## O número de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ com $x_1 \leq 3$ .

Enunciado: número de soluções  $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ ,  $x_1 \leq 3$

### Resultado

38

### Passos

- A incógnita  $x_1$  ( $0 \leq x_1 \leq 3$ ) contribui com a série

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

- A incógnita  $x_2$  ( $x_2 \geq 0$ ) contribui com a série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- A incógnita  $x_3$  ( $x_3 \geq 0$ ) contribui com a série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- A função geradora é o seu produto – o coeficiente de

$$x^N \text{ conta as soluções: } G(x) = \frac{1 - x^4}{(1 - x)^3}$$

- O número de soluções é o coeficiente de  $x^{10}$ : 38

## Limitações conhecidas

---

- Ainda não: recorrências lineares de ordem superior com coeficientes variáveis, sistemas de três ou mais recorrências, dividir para conquistar com vários termos ( $T(n/2)$  e  $T(n/3)$ ) e recorrências não lineares que estas substituições não tornam lineares.

# Aplicações de equações diferenciais

O botão «Aplicações de equações diferenciais» na tela inicial abre um formulário com 23 modelos: radiocarbono, decaimento e meia-vida, crescimento exponencial, cadeia de decaimento, resfriamento de Newton (também a hora da morte a partir de duas medições), cinética química de ordem 0–2, medicamento no sangue, álcool no sangue, poupança e empréstimo, circuitos RC, RL e RLC, mola, queda com resistência do ar, esvaziamento de um tanque, mistura, crescimento logístico e de Gompertz, população com captura, epidemia SIR, predador e presa, competição de duas espécies e quimiostato.

Escolhe o modelo, a variante e o que procura; as constantes vêm preenchidas e podem ser alteradas. Cada grandeza e o resultado têm a unidade à escolha: a aplicação converte os valores (a conversão é um passo). O «?» junto ao modelo explica de onde vem a sua equação.

Os passos montam o modelo, resolvem a equação (separação de variáveis, fator integrante, equação característica), aplicam as condições, isolam a grandeza procurada e substituem os números. Os sistemas resolvem-se numericamente por Runge–Kutta; os equilíbrios e a estabilidade, exatamente. O gráfico mostra as grandezas no tempo e, nos sistemas, o plano de fase.

# Exemplos

## Idade de um achado com 35 % de $^{14}\text{C}$ restante.

Enunciado: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

### Resultado

$$t \approx 8700 \text{ anos}$$

### Passos

- Procuramos  $t$ ; dados:  $T_{1/2} = 5730$  anos,  $\frac{N}{N_0} = 35\%$
- Convertemos as unidades:  $\frac{N}{N_0} = 35\% = 0,35$
- Os seres vivos absorvem carbono do ar e por isso contêm a mesma proporção do isótopo radioativo  $^{14}\text{C}$  que a atmosfera. Após a morte a absorção cessa e o  $^{14}\text{C}$  decai. O número de decaimentos por unidade de tempo é proporcional ao número de núcleos restantes:  $dN/dt = -\lambda N$ , sendo  $\lambda$  a constante de decaimento. A solução é  $N = N_0 \cdot e^{(-\lambda t)}$ ; após a meia-vida  $T_{1/2} = 5730$  anos resta metade, logo  $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ . Da proporção de  $^{14}\text{C}$  restante (ou da atividade medida comparada à de uma amostra viva) obtém-se a idade. Equação do modelo:  
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$
- Separamos as variáveis:  $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$
- Integramos ambos os lados:  $\ln |N| = -\lambda t + C$
- Aplicamos a exponencial – a constante  $\pm e^C$  chama-se de novo  $C$ :  $N = C e^{-\lambda t}$
- Substituímos a condição inicial  $N(0) = N_0$ :  $N_0 = C$

- A solução da condição inicial (solução particular):  
$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

- Numa meia-vida a quantidade cai para metade – constante de decaimento

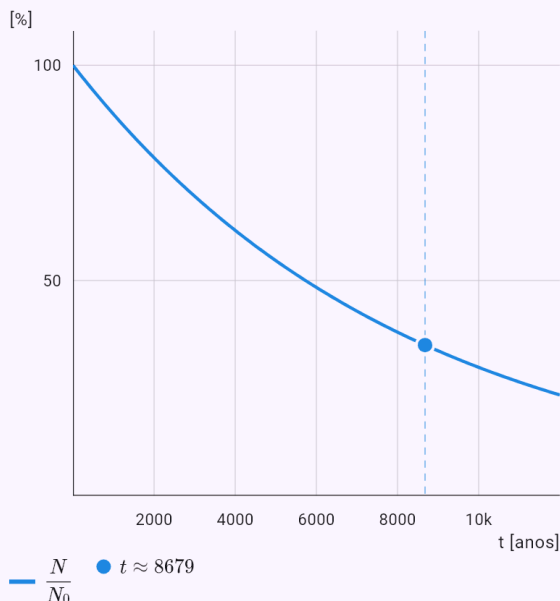
$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ ano}^{-1}$$

- Isolamos a grandeza procurada:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}$$

- Substituímos:  $t = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{1}{0,35} \approx 8679$  anos
- Os laboratórios indicam a «idade radiocarbono» com a meia-vida de Libby de 5568 anos e convertem-na com uma curva de calibração (o  $^{14}\text{C}$  da atmosfera nem sempre foi o mesmo); a idade real pode diferir um pouco.

### Gráfico



As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

**Hora da morte: 30 °C ao ser encontrado, 28 °C uma hora depois, sala a 20 °C.**

Enunciado: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC]; Tt=37[degC]; k=measured)`

### Resultado

$$t \approx -2,38 \text{ h}$$

### Passos

- Procuramos  $t$ ; dados

$$T_0 = 30^\circ\text{C}, \quad T_a = 20^\circ\text{C}, \quad t_1 = 1 \text{ h}, \quad T_1 = 28^\circ\text{C},$$

- Um corpo perde calor tanto mais depressa quanto maior a diferença de temperaturas:  $dT/dt = -k(T - T_a)$ , sendo  $T_a$  a temperatura ambiente e  $k$  dependente do corpo. A solução é  $T = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{(-kt)}$ .  $k$  obtém-se de duas medições. É assim que a medicina legal estima a hora da morte: mede a temperatura do corpo ao encontrá-lo e um pouco depois e calcula quando estava a  $37^\circ\text{C}$ .

$$\text{Equação do modelo: } \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

- Separamos as variáveis:  $\frac{dT}{T - T_a} = -k dt$
- Integramos ambos os lados:  $\ln |T - T_a| = -kt + C$
- Aplicamos a exponencial – a constante  $\pm e^C$  chama-se de novo  $C$ :  $T = T_a + C e^{-kt}$
- Substituímos a condição inicial  $T(0) = T_0$ :  
 $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- A solução da condição inicial (solução particular):  
 $T = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt}$
- $k$  a partir da segunda medição

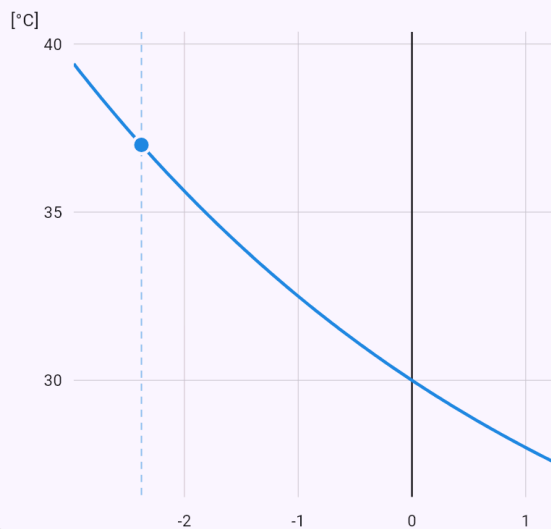
$$T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1} \ln \frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$$

- Isolamos a grandeza procurada

$$T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$$

- Substituímos:  $t = -\frac{1}{0,2231} \ln \frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2,378 \text{ h}$
- Um tempo negativo significa antes da primeira medição (na hora da morte, tantas horas antes do achado).

### Gráfico



—  $T$     •  $t \approx -2,378$

$t$  [h]

As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

**500 mg a cada 8 horas: o nível estacionário.**

Enunciado: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

### Resultado

$$c_{max} \approx 20,7 \text{ mg/l}$$

$$c_{min} \approx 8,22 \text{ mg/l}$$

### Passos

- Procuramos  $c_{max}$ ; dados

$$D = 500 \text{ mg}, \quad V = 40 \text{ l}, \quad T_{1/2} = 6 \text{ h}, \quad \tau = 8 \text{ h}$$

- Um medicamento distribui-se no volume de distribuição  $V$ ; rins e fígado eliminam-no a uma velocidade proporcional à concentração:  $dc/dt = -kc$ , com  $k = \ln 2 / T_{1/2}$ . Após uma dose  $D$ ,  $c = (D/V) \cdot e^{-(k)t}$ . Com doses repetidas a cada  $\tau$ , os restos somam-se (série geométrica) e o nível estabiliza entre  $c_{min}$  e  $c_{max}$ . Com uma infusão de taxa  $R$ ,  $dc/dt = R/V - kc$  e a concentração tende a  $R/(kV)$ . Equação do modelo:

$$\frac{dc}{dt} = -kc$$

- Concentração inicial após a dose:

$$c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12,5 \text{ mg/l}$$

- Constante de eliminação a partir da meia-vida biológica:

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0,1155 \text{ h}^{-1}$$

- Separamos as variáveis:  $\frac{dc}{c} = -k dt$

- Integramos ambos os lados:  $\ln |c| = -kt + C$

- Aplicamos a exponencial – a constante  $\pm e^C$  chama-se de novo  $C$ :  $c = C e^{-kt}$

- Substituímos a condição inicial  $c(0) = c_0$ :  $c_0 = C$

- A solução da condição inicial (solução particular):  
 $c = c_0 e^{-kt}$

- Parte do medicamento que resta até à dose seguinte:

$$q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0,1155 \cdot 8} \approx 0,3969$$

- Isolamos a grandeza procurada

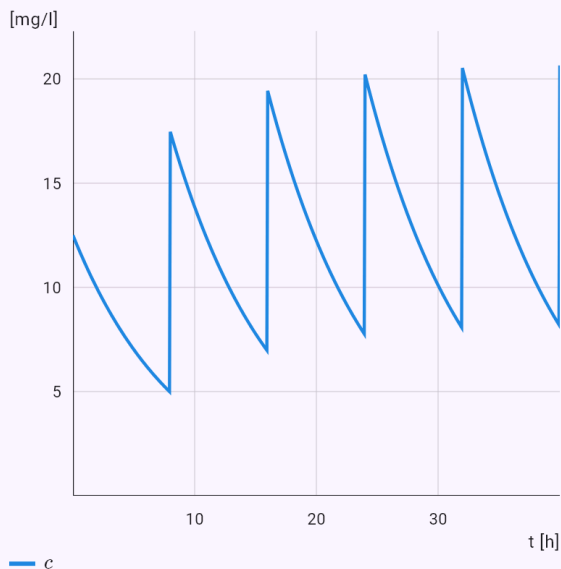
$$c_{max} = c_0 (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{c_0}{1 - q}, \quad c_{min} = q c_{max}$$

- Substituímos:  $c_{max} = \frac{12,5}{1 - 0,3969} \approx 20,72 \text{ mg/l}$

- Substituímos:  $c_{min} = 0,3969 \cdot 20,72 \approx 8,225 \text{ mg/l}$

- Fator de acumulação (quantas vezes o nível estacionário supera o de uma dose):  $R = \frac{1}{1 - q} \approx 1,658$

### Gráfico



As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

**Prestação mensal de um empréstimo de 1 000 000 CZK por 20 anos a 5 %.**

Enunciado: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr];`

B=0[CZK]; kind=loan)

## Resultado

$$a \approx 6592 \text{ CZK/mês}$$

## Passos

- Procuramos  $a$ ; dados

$$D_0 = 1\,000\,000 \text{ CZK}, \quad r = 5\% \text{ ao ano}, \quad t = 20 \text{ anos},$$

- Convertemos as unidades:

$$r = 5\% \text{ ao ano} = 0,05 \text{ ano}^{-1}$$

- Com juros contínuos, os juros acumulam-se a cada instante em proporção ao saldo:  $dB/dt = rB$ , sendo  $r$  a taxa anual. Depósitos regulares aumentam o saldo ( $dB/dt = rB + a$ ), as prestações de um empréstimo reduzem a dívida ( $dB/dt = rB - a$ ). Resolve-se separando variáveis; a solução dá o saldo, o prazo ou a prestação (anuidade contínua). Equação do modelo:

$$\frac{dB}{dt} = rB - a$$

- Separamos as variáveis:  $\frac{dB}{B - \frac{a}{r}} = r dt$

- Integramos ambos os lados:  $\ln \left| B - \frac{a}{r} \right| = rt + C$

- Aplicamos a exponencial – a constante  $\pm e^A C$  chama-se de novo  $C$ :  $B = \frac{a}{r} + C e^{rt}$

- Substituímos a condição inicial  $B(0) = B_0$ :

$$C = B_0 - \frac{a}{r}$$

- A solução da condição inicial (solução particular):

$$B = \frac{a}{r} + \left( B_0 - \frac{a}{r} \right) e^{rt}$$

- Os juros contínuos são um modelo: os bancos capitalizam mensal ou anualmente e a diferença é pequena.

- Isolamos a grandeza procurada:  $a = \frac{r(B_0 e^{rt} - B)}{e^{rt} - 1}$

- Substituímos

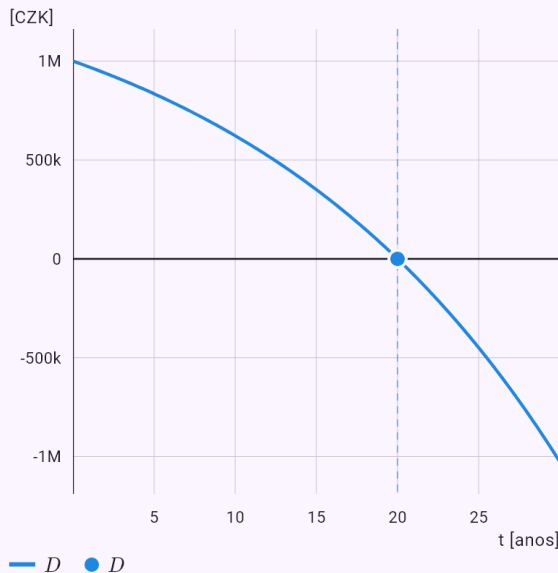
$$a = \frac{0,05(1\,000\,000 e^{0,05 \cdot 20} - 0)}{e^{0,05 \cdot 20} - 1} \approx 79\,100 \text{ CZK/ano}$$

- Total pago:  $a t = 1\,582\,000 \text{ CZK}$

- Convertemos as unidades:

$$a \approx 79\,100 \text{ CZK/ano} = 6592 \text{ CZK/mês}$$

## Gráfico



As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Quanto tempo um capacitor leva a carregar até metade da tensão.

Enunciado: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

### Resultado

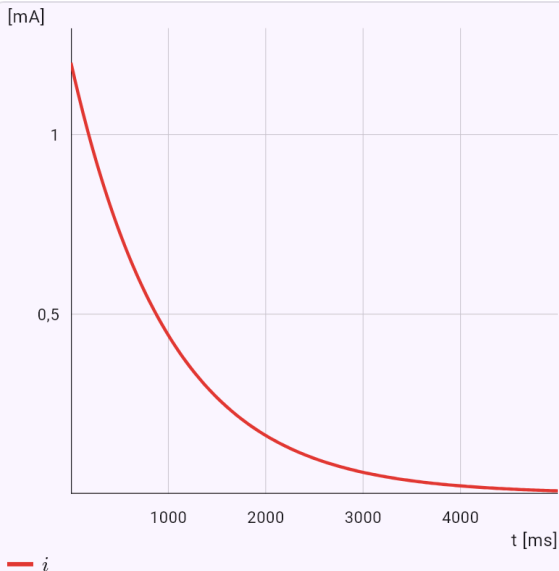
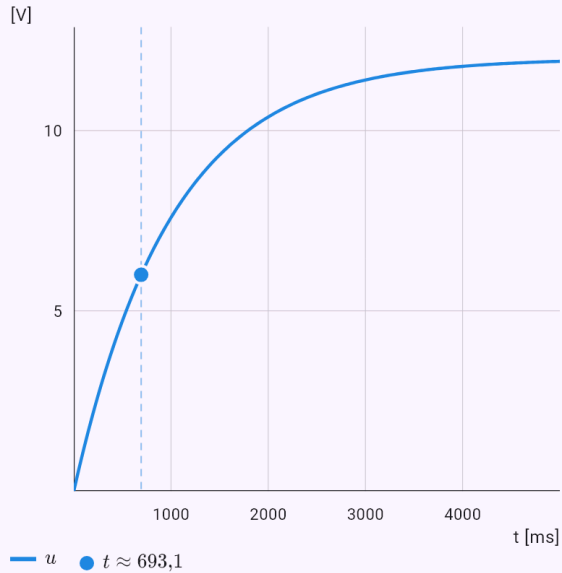
$$t \approx 693 \text{ ms}$$

### Passos

- Procuramos  $t$ ; dados  
 $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $U = 12 \text{ V}$ ,  $u = 6 \text{ V}$
- Ao carregar um capacitor através de um resistor, a lei de Kirchhoff dá  $U = Ri + u$  e a corrente carrega o capacitor:  $i = C \cdot du/dt$ . Juntas,  $RC \cdot du/dt + u = U$ . A tensão aproxima-se da da fonte:  $u = U(1 - e^{-(t/\tau)})$ , sendo  $\tau = RC$  a constante de tempo; a corrente  $i = (U/R) \cdot e^{-(t/\tau)}$  diminui. Na descarga,  $u = U_0 \cdot e^{-(t/\tau)}$ . Equação do modelo:  $RC \frac{du}{dt} + u = U$
- Constante de tempo:  $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000 \text{ ms}$
- Separamos as variáveis:  $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Integramos ambos os lados:  $\ln |u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Aplicamos a exponencial – a constante  $\pm e^C$  chama-se de novo  $C$ :  $u = U + C e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Substituímos a condição inicial  $u(0) = 0$ :  
 $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- A solução da condição inicial (solução particular):  
 $u = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

- Isolamos a grandeza procurada:  $t = -\tau \ln \left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Substituímos:  $t = -1000 \ln \left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693,1 \text{ ms}$

### Gráfico



As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Mola amortecida: deslocamento em 1 s.

Enunciado: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

$$t=1[s])$$

## Resultado

$$x \approx 1,827 \text{ cm}$$

## Passos

- Procuramos  $x$ ; dados

$$m = 0,5 \text{ kg}, \quad k = 20 \text{ N/m}, \quad b = 1 \text{ kg/s}, \quad x_0 = 5 \text{ cm},$$

- Convertemos as unidades:  $x_0 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$
- Sobre um corpo preso a uma mola atuam a força elástica  $-kx$  (Hooke), o amortecimento  $-b \cdot v$  e eventualmente uma força externa  $F_0 \cdot \cos \omega t$ . Pela 2.ª lei de Newton  $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$ , uma equação linear de 2.ª ordem com coeficientes constantes. As raízes da equação característica indicam se o corpo oscila ou apenas volta ao equilíbrio. Uma excitação perto da frequência natural  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  provoca ressonância. Equação do modelo:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- Frequência angular natural (sem amortecimento):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} \approx 6,325 \text{ s}^{-1}$$

- Coeficiente de amortecimento  $\delta$ :

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0,5} \approx 1 \text{ s}^{-1}$$

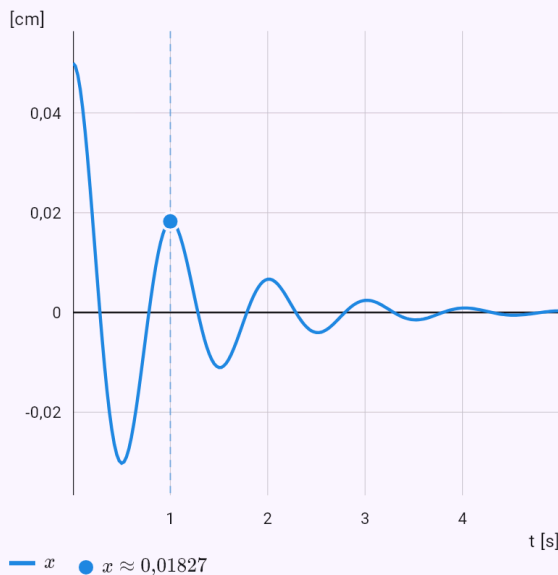
- Procuramos soluções  $x = e^{\lambda t}$ ; substituindo e dividindo

por  $e^{\lambda t}$ , obtemos a equação característica:

$$0,5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$$

- As raízes da equação característica:  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6,245i$
- Amortecimento subcrítico ( $\delta < \omega_0$ ;  $\delta = 1$ ,  $\omega_0 = 6,325$ ): raízes complexas, oscilações amortecidas.
- Solução da equação homogênea:  
 $x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6,245t + C_2 \sin 6,245t)$
- Substituímos as condições na solução geral:  
 $x(0) = 0,05$ ,  $x'(0) = 0$ , donde  
 $C_1 \approx 0,05$ ,  $C_2 \approx 0,008006$
- A solução da condição inicial (solução particular):  
 $x = e^{-t}(0,05 \cos 6,245t + 0,008006 \sin 6,245t)$
- Substituímos:  $x(1) \approx 0,01827 \text{ m}$
- Convertemos as unidades:  $x \approx 0,01827 \text{ m} = 1,827 \text{ cm}$

## Gráfico



As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Epidemia com $R_0 = 2,5$ : pico e total de infectados.

Enunciado: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

### Resultado

$$I_{max} \approx 2340 \text{ ind.}$$

$$t_{max} \approx 34,1 \text{ d}$$

$$R_{\infty} \approx 8930 \text{ ind.}$$

### Passos

- Procuramos  $t_{max}$ ; dados

$$N = 10\,000 \text{ ind.}, \quad I_0 = 10 \text{ ind.}, \quad R_0 = 2,5, \quad D = 7 \text{ d}$$

- A população  $N$  divide-se em suscetíveis  $S$ , infectados  $I$  e recuperados  $R$ . As infecções são proporcionais aos encontros:  $\beta \cdot S \cdot I/N$ ; os infectados recuperam com taxa  $\gamma = 1/D$  ( $D$ , a duração da doença). O sistema  $S' = -\beta SI/N$ ,  $I' = \beta SI/N - \gamma I$ ,  $R' = \gamma I$  não tem solução elementar e é resolvido numericamente. Exatamente obtêm-se o número básico de reprodução  $R_0 = \beta/\gamma$ , o pico, o total de infectados e o limiar de imunidade de grupo  $1 - 1/R_0$ .

Equação do modelo

$$S' = -\frac{\beta SI}{N}$$

$$I' = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

- Taxa de recuperação:  $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0,1429 \text{ d}^{-1}$
- Taxa de transmissão:  $\beta = R_0 \gamma \approx 0,3571 \text{ d}^{-1}$

- A soma  $S + I + R = N$  é constante (as equações somam zero).

- Limiar de imunidade de grupo (proporção de imunes com a qual a doença deixa de se propagar):

$$1 - \frac{1}{R_0} \approx 60 \%$$

- A epidemia arranca porque no início vale

$$I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$$

- O pico ocorre com  $S = N/R_0$ ; da equação para  $dI/dS$

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0} \ln S = C \Rightarrow I_{max} = I$$

- Resolvemos a equação numericamente (bissecção)

$$\ln \frac{S_{\infty}}{S_0} = \frac{R_0(S_{\infty} - N)}{N} \Rightarrow S_{\infty} \approx 1072 \text{ ind.}$$

- No total adoecem:  $R_{\infty} = N - S_{\infty} \approx 8928 \text{ ind.}$  (89,3%)

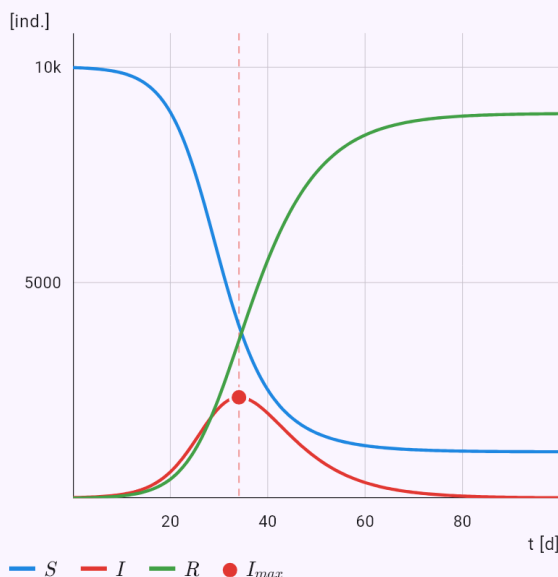
- O sistema não tem solução em funções elementares: resolvemos numericamente pelo método de Runge-Kutta de ordem 4, passo 0,05, em  $[0, 100]$

- Da solução numérica:  $t_{max} \approx 34,1 \text{ d}$

### Gráfico

No tempo

Plano de fase



As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

## Predador e presa: equilíbrio, estabilidade e período.

Enunciado: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo]; c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

### Resultado

$$[x^*, y^*] \approx [80, 50]$$

$$T \approx 14,9 \text{ meses}$$

### Passos

- Procuramos  $T$ ; dados

$$a = 0,5 \text{ mês}^{-1}, \quad b = 0,01 \text{ (ind.} \cdot \text{mês)}^{-1}, \quad c = 0,4 \text{ mês}$$

- As presas  $x$  multiplicam-se sem predadores ( $ax$ ) e os predadores  $y$  morrem sem presas ( $-cy$ ). Os encontros, proporcionais a  $xy$ , reduzem as presas ( $-bxy$ ) e alimentam os predadores ( $+dxy$ ). O sistema  $x' = ax - bxy$ ,  $y' = -cy + dxy$  (Lotka, Volterra) tem o equilíbrio  $[c/d; a/b]$ , com autovalores imaginários puros: as populações oscilam periodicamente, os predadores com atraso. Resolve-se numericamente; equilíbrios e integral primeira, exatamente. Equação do modelo

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$

- Equilíbrios – todas as derivadas são nulas

$$x(a - by) = 0, \quad y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0, 0], \quad \left[ \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right] \approx [80, 50]$$

- Estabilidade por linearização – matriz jacobiana do sistema

$$J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$$

- Em  $[0, 0]$  autovalores  $\lambda_1 = -0,4$ ,  $\lambda_2 = 0,5$  – sela (instável).

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}$$

- Em  $[80, 50]$  autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm 0,4472i$  – centro (oscilações em torno do equilíbrio).

$$\begin{pmatrix} 0 & -0,8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dividindo as equações e separando obtém-se uma integral primeira, constante ao longo da trajetória:

$$V = dx - c \ln x + by - a \ln y = C$$

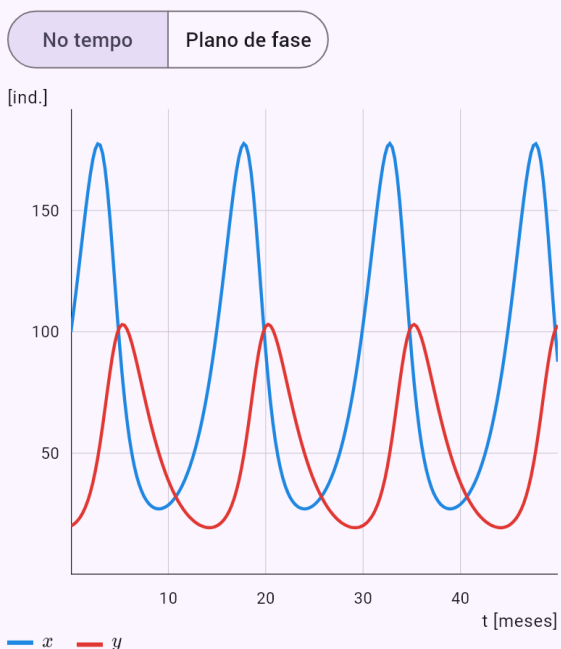
- Como  $V$  não muda ao longo de uma trajetória, as trajetórias são curvas fechadas: as populações oscilam periodicamente.

- Período das pequenas oscilações em torno do equilíbrio (dos autovalores):  $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14,05 \text{ meses}$

- O sistema não tem solução em funções elementares: resolvemos numericamente pelo método de Runge-Kutta de ordem 4, passo 0,0125, em  $[0, 50]$

- Da solução numérica:  $T \approx 14,95 \text{ meses}$

### Gráfico



As grandezas do modelo no tempo, calculadas a partir da solução; a resposta está marcada.

# Em breve

Estamos a trabalhar nestes tipos de exercícios ou temos-os planeados. A ordem pode mudar conforme aquilo de que mais precisar.

## Equações e inequações

---

- Equações do 2.º grau incompletas pondo em evidência ou extraíndo a raiz ( $x^2 = 9$ ) em vez do discriminante.

## Funções, derivadas e integrais

---

- Aplicações do integral com parâmetros – fórmulas gerais (esfera de raio  $r$ , elipse, cone).
- Área colorida e sólido em 3D para curvas paramétricas e polares.
- Aplicações físicas de derivadas e integrais (velocidade, aceleração, trabalho, centro de massa).
- A forma complexa da série de Fourier e o espetro.
- Os integrais de Riemann e de Lebesgue de funções especiais (funções de Dirichlet e de Riemann).

## Equações diferenciais

---

- Sistemas de equações diferenciais escritos como equações (as aplicações já os têm) e o seu retrato de fase.
- Transformada de Laplace com a função de Heaviside, deslocamentos e lados direitos periódicos.

## Outras áreas

---

- Vetores – norma, produto escalar, vetorial e misto, ângulos, áreas e volumes.
- Matrizes – operações, determinante, característica, matriz inversa, valores e vetores próprios.
- Problemas de construção – triângulos, quadriláteros e circunferências a partir de elementos dados, os passos da construção e o número de soluções.
- Números complexos na forma trigonométrica e exponencial, o teorema de De Moivre, raízes de índice  $n$ .
- A regra de Cramer para sistemas de equações lineares.
- Funções de várias variáveis, integrais múltiplos, de linha e de superfície.

- Modo exato e modo numérico (decimais em vez de frações e raízes).
- Problemas de palavras – equacionar o enunciado e resolver.