

MathSolver – guide d'utilisation

Ce que MathSolver sait résoudre, comment saisir un énoncé et à quoi ressemble le résultat.

MathSolver résout des exercices à partir d'une photo ou saisis à la main et, pour chaque résultat, montre la démarche telle qu'on la fait en classe – étape par étape, avec des explications et, quand c'est utile, un graphique.

Chaque chapitre traite un type d'exercices : ce qu'on peut attendre de la solution, comment saisir l'énoncé et des exemples de résultats réels de l'application. Les limitations connues, s'il y en a, figurent à la fin du chapitre.

Sommaire

1. Saisir un exercice
2. Équations et inéquations du premier degré
3. Équations du second degré
4. Équations de degré supérieur
5. Équations rationnelles
6. Équations irrationnelles
7. Équations et inéquations exponentielles et logarithmiques
8. Valeur absolue
9. Équations et inéquations trigonométriques
10. Inéquations et systèmes d'inéquations
11. Systèmes d'équations
12. Équations et inéquations avec paramètre
13. Calcul algébrique
14. Limites
15. Dérivées
16. Étude de fonction
17. Polynôme de Taylor
18. Primitives et intégrales indéfinies
 - Primitives usuelles et changement de variable
 - Intégration par parties

Fractions rationnelles

Fonctions trigonométriques

Fonctions hyperboliques

Racines

19. Intégrales et leurs applications

Intégrale

Intégrales impropres

Aire sous une courbe et entre deux courbes

Longueur d'arc

Volume d'un solide de révolution

Aire latérale d'un solide de révolution

Courbes paramétrées et en coordonnées polaires

Courbes données par une équation

20. Séries

Séries numériques

Séries entières

Série de Taylor

21. Séries de Fourier

22. Équations différentielles

23. Récurrences et fonctions génératrices

24. Applications des équations différentielles

25. Bientôt

Saisir un exercice

Vous pouvez photographier l'exercice – recadrez la photo sur l'énoncé seul avant de l'envoyer. L'application le reconnaît et en affiche un aperçu ; si la transcription est fausse, corrigez-la dans le champ sous l'aperçu. Ce même champ permet aussi de taper directement un exercice.

Si l'énoncé est une expression sans signe égal, vous choisissez avec une puce ce qu'il faut en faire : simplifier, développer, factoriser, décomposer en éléments simples, dériver, faire l'étude de fonction, calculer un polynôme de Taylor, intégrer, sommer une série ou calculer une série de Fourier. Réglez l'option « Thème » de l'écran d'accueil sur ce que vous travaillez – elle présélectionne la puce adaptée.

Les équations et inéquations sont résolues directement. Quand il existe plusieurs méthodes (la méthode pour un système, pour les valeurs absolues, la dérivée par la définition), vous la choisissez avec une puce ; le résultat est recalculé aussitôt. Les équations et inéquations sont résolues dans les réels ; la puce « Résoudre dans » choisit à la place $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}^+$. Pour une limite, une puce choisit si la forme indéterminée se lève par transformation ou directement par la règle de L'Hôpital.

Comment le saisir

$x^2 + 3x - 4$	Les puissances s'écrivent avec ^ ; la multiplication par un nombre ou une variable peut être omise (3x, 2xy).
$(x+1)/(x-2)$	Les fractions avec une barre oblique ; mettez entre parenthèses un numérateur ou un dénominateur qui n'est pas un seul nombre ou une seule lettre.
$\text{sqrt}(x+1)$, $x^{(1/3)}$	Racine carrée sqrt(...), les autres racines sous forme de puissance à exposant fractionnaire.
$ 2x - 1 $	Valeur absolue entre barres verticales. Si l'écriture peut se lire de plusieurs façons ($ x y z $), l'application propose les lectures au choix ; pour lever l'ambiguïté, mettez la valeur absolue entre parenthèses : $2x(x - 1)$.
$\ln x$, $\log x$, $\log_2 x$	ln est le logarithme népérien, log (ou lg) le logarithme décimal, log_2 celui de base 2.
$\sin x$, $\cos 2x$, $\tan x$, $\cot x$	Fonctions trigonométriques ; un argument sans parenthèses est le terme qui suit la fonction ($\cos 2x = \cos(2x)$).

$\sinh x, \cosh x, \tanh x, \operatorname{arsinh} x$	Fonctions hyperboliques $\sinh, \cosh, \tanh, \coth$ et leurs réciproques $\operatorname{arsinh}, \operatorname{arcosh}, \operatorname{artanh}, \operatorname{arcoth}$ ($\operatorname{asinh}, \operatorname{arcsinh}, \dots$ acceptés aussi).
$\sin \alpha = 1/2, \sin(x + 30^\circ)$	Un angle en degrés : une lettre grecque comme inconnue ($\alpha, \beta, \dots$ ou directement α), ou des degrés sur un nombre ; les lettres latines sont en radians.
$\sin x = 1/2, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$	Racines dans un intervalle – après une virgule ou sur la ligne suivante ($x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ou $0 \leq x < 2\pi$).
π, e, ∞	Le nombre π , le nombre e , l'infini ∞ .
$x \sin x, 2x(x+1)$	Laissez une espace entre une variable et une fonction ($x \sin x$) – $x \sin x$ est lu comme un produit de lettres.
$2x + 3y = 7$ $x - y = 1$	Écrivez un système d'équations ou d'inéquations ligne par ligne, une par ligne.
$(3+4i)/(1-2i)$	Nombres complexes : i est l'unité imaginaire (dans les expressions et les équations).
$x^2 < 10, x \in \mathbb{Z}$	L'ensemble après une virgule : $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$, « dans $\mathbb{N}$ ») ; $\mathbb{N}$ sans zéro.

Limitations connues

- Le résultat est donné sous forme exacte (fractions, racines, π) avec une valeur approchée ; il n'existe pas encore de mode purement numérique.

Équations et inéquations du premier degré

L'application transforme une équation du premier degré comme en classe – elle développe les parenthèses, regroupe l'inconnue d'un côté et divise. Pour une inéquation, elle veille au changement de sens quand on multiplie par un nombre négatif et écrit le résultat sous forme d'intervalle ; le graphique montre les deux membres comme des droites et marque la solution sur l'axe des x.

Exemples

Une équation avec parenthèses.

Énoncé: $3(x - 2) = 2x + 5$

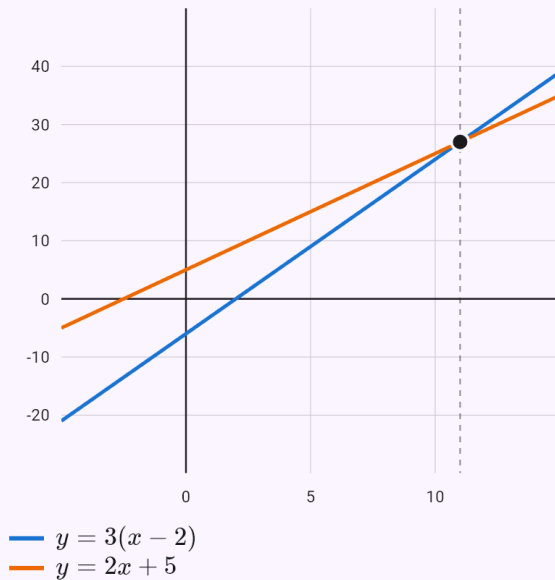
Résultat

$$x = 11$$

Étapes

- On passe tout du même côté : $x - 11 = 0$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $x = 11$

Graphique



Points d'intersection des courbes :

- $(11; 27)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x.

Une inéquation – diviser par un nombre négatif change le sens.

Énoncé: $2x - 3 < 5x + 6$

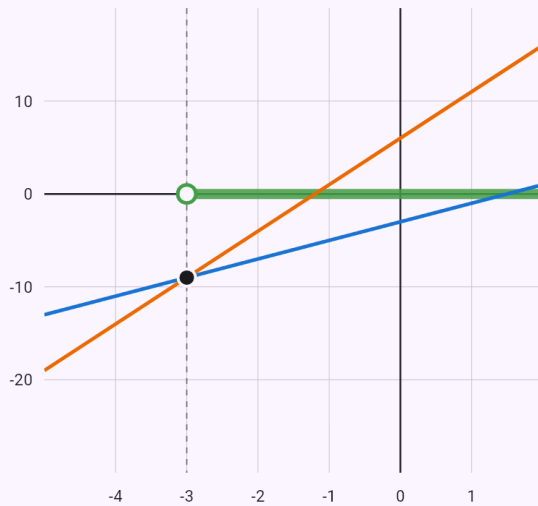
Résultat

$$x \in]-3; \infty[$$

Étapes

- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $-3x < 9$
- On divise par le nombre négatif -3 , le sens de l'inégalité change : $x > -3$

Graphique



$$y = 2x - 3$$
$$y = 5x + 6$$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

$$\bullet (-3; -9)$$

Équations du second degré

L'application met une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et la résout avec le discriminant et la formule ; elle reconnaît aussi une racine double. Si l'équation n'a pas de solution réelle, elle le dit, et le bouton « Afficher la solution complexe » montre les racines complexes.

Exemples

Deux racines réelles.

Énoncé: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Résultat

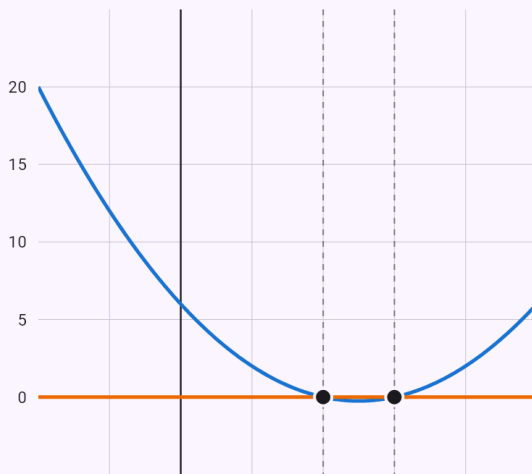
$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

Étapes

- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- On applique la formule des racines :
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graphique



-1 0 1 2 3 4

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$y = 0$$

Points d'intersection des courbes :

• (2; 0) • (3; 0)

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Discriminant négatif – racines complexes.

Énoncé: $x^2 + 2x + 5 = 0$

[Afficher la solution complexe](#)

Résultat

$$x_1 = -1 + 2i$$

$$x_2 = -1 - 2i$$

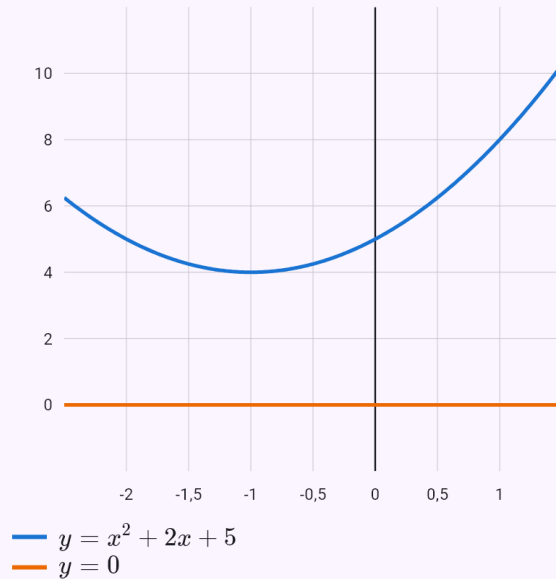
Étapes

- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$
- Le discriminant est négatif – dans les nombres complexes : $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$

- On applique la formule des racines :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

Graphique



Les courbes ne se coupent pas : l'équation n'a pas de solution réelle.

Équations de degré supérieur

L'application ramène une équation bicarrée à une équation du second degré par changement de variable. Une équation générale de degré supérieur est factorisée avec le schéma de Horner : les racines sont cherchées parmi les diviseurs du terme constant, et chaque racine trouvée est mise en facteur jusqu'à ce qu'il reste une équation du second degré.

Exemples

Une équation bicarrée avec le changement $y = x^2$.

Énoncé: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Résultat

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -1$$

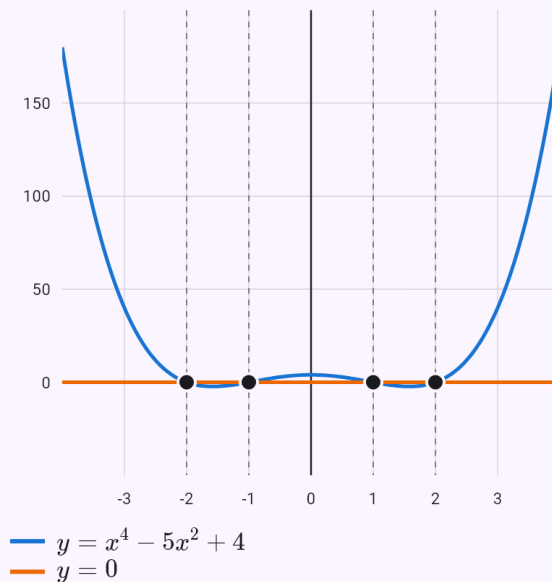
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 2$$

Étapes

- Le changement de variable $u = x^2$ donne une équation du second degré : $u^2 - 5u + 4 = 0$
- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- On applique la formule des racines :
$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$$
- On revient à l'inconnue de départ : $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- On revient à l'inconnue de départ : $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Graphique



Points d'intersection des courbes :

- $(-2; 0)$ • $(-1; 0)$ • $(1; 0)$ • $(2; 0)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Le schéma de Horner – racines parmi les diviseurs du terme constant.

Énoncé: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Résultat

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

Étapes

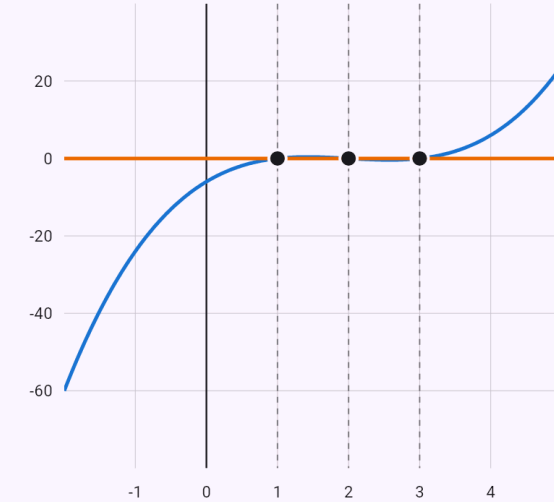
- Les racines rationnelles ne peuvent être que des diviseurs du terme constant $-6 : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
- Le schéma de Horner confirme la racine $x = 1$ et divise le polynôme :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- On applique la formule des racines :
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graphique



— $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
— $y = 0$

Points d'intersection des courbes :

• (1; 0) • (2; 0) • (3; 0)

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Équations rationnelles

Pour une équation avec l'inconnue au dénominateur, l'application pose d'abord les conditions d'existence, puis multiplie par le dénominateur commun et résout. Elle compare les racines aux conditions et écarte celles qui ne les vérifient pas.

Exemples

Conditions, dénominateur commun, équation du second degré.

Énoncé: $(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x$

Résultat

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$

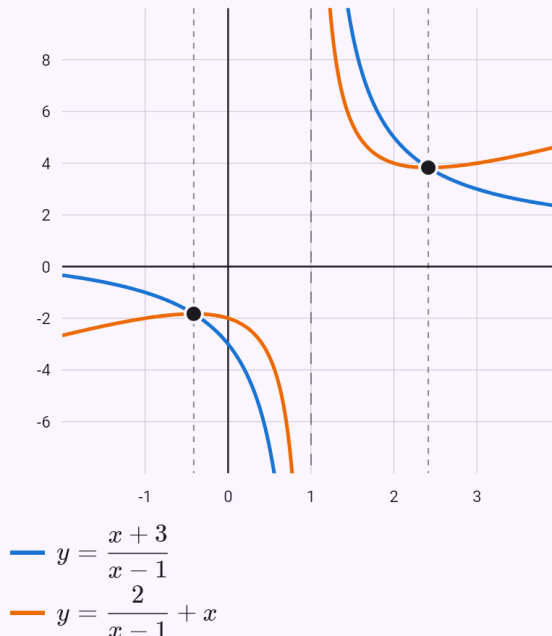
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Conditions : $x \neq 1$

Étapes

- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul : $x \neq 1$
- On multiplie les deux membres par le dénominateur
 $x - 1 : x + 3 = x^2 - x + 2$
- On passe tout du même côté : $x^2 - 2x - 1 = 0$
- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- On applique la formule des racines :
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
- La racine $x = 1 - \sqrt{2}$ vérifie les conditions.
- La racine $x = 1 + \sqrt{2}$ vérifie les conditions.

Graphique



Points d'intersection des courbes :

$$\bullet \left(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right) \quad \bullet \left(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Équations irrationnelles

Une équation avec l'inconnue sous une racine est résolue en isolant la racine et en élevant au carré. Élever au carré peut ajouter des racines qui ne vérifient pas l'équation – une vérification suit donc toujours et les racines qui échouent sont écartées.

Exemples

Élévation au carré et vérification – l'une des racines ne vérifie pas l'équation.

Énoncé: $\sqrt{x+5} = x - 1$

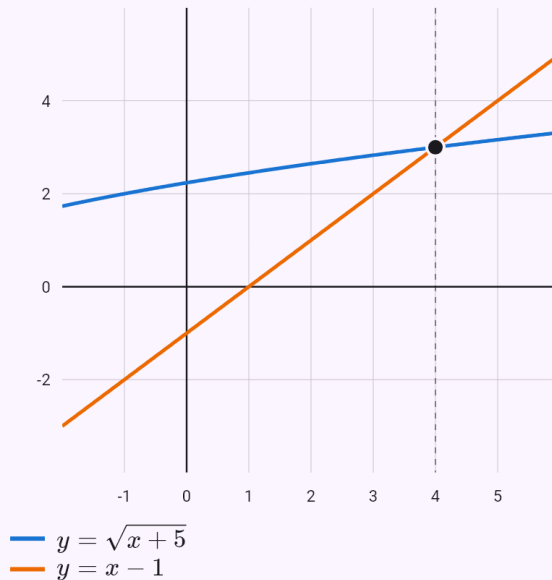
Résultat

$$x = 4$$

Étapes

- On élève les deux membres au carré (ce n'est pas une équivalence, on vérifie donc les racines) :
$$x + 5 = (x - 1)^2$$
- On passe tout du même côté : $x^2 - 3x - 4 = 0$
- On calcule le discriminant :
$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$
- On applique la formule des racines :
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- Vérification pour $x = -1$: membre gauche = 2, membre droit = -2, ils sont différents – la racine ne convient pas.
- Vérification pour $x = 4$: membre gauche = 3, membre droit = 3, ils sont égaux – la racine convient.

Graphique



Points d'intersection des courbes :

● (4; 3)

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Limitations connues

- Les inéquations irrationnelles ne sont pas encore résolues.

Équations et inéquations exponentielles et logarithmiques

L'application résout une équation exponentielle en se ramenant à la même base, en passant au logarithme ou par changement de variable ; une équation logarithmique en regroupant les logarithmes selon leurs propriétés puis en passant à l'exponentielle, toujours avec les conditions. Les inéquations sont résolues par la monotonie – pour une base inférieure à 1, le sens change.

Équations à bases différentes : $a^x + b^x = c^x$ avec des bases issues de deux nombres premiers ($25^x + 10^x = 4^x$) sont divisées par une puissance puis rendues quadratiques par $t = (5/2)^x$; les logarithmes de bases différentes sont ramenés à une seule ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Les logarithmes dont les bases sont des puissances d'un même nombre ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$) sont ramenés à une seule base ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), l'équation est multipliée et les logarithmes regroupés. Un logarithme avec l'inconnue dans la base ($\log_x 8 = 3$) est éliminé par la définition ($x^3 = 8$) avec les conditions $x > 0$, $x \neq 1$. Une équation avec l'inconnue dans la base et dans l'exposant ($x^{(\log x)} = 100$) est résolue en prenant le logarithme et par la substitution $t = \log x$. Les inéquations avec la substitution $t = \log(x + 1)$ et les systèmes d'inéquations logarithmiques et exponentielles sont résolus comme des inéquations isolées – par la monotonie.

Les équations et inéquations avec des fonctions hyperboliques sont réécrites par la définition ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, ...) en équations exponentielles et résolues par la substitution $t = e^x$; $\operatorname{arsinh} x = c$ par la fonction réciproque ($x = \sinh c$).

Exemples

Le changement de variable $t = 2^x$.

Énoncé: $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

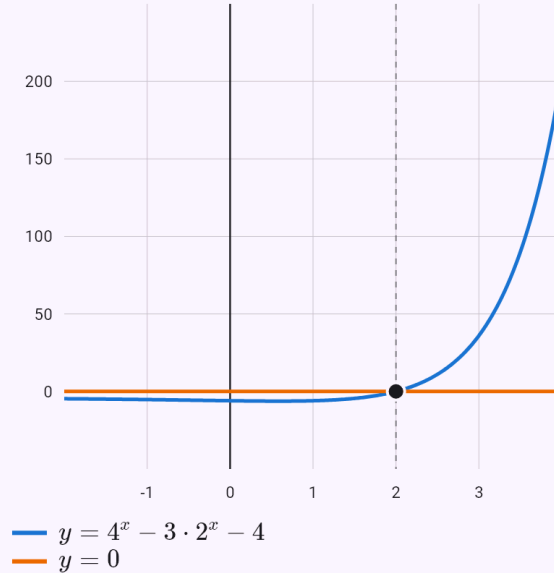
Résultat

$$x = 2$$

Étapes

- On pose $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- On applique la formule des racines :
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- L'équation $2^x = -1$ n'a pas de solution réelle.
- On revient à l'inconnue de départ : $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Graphique



Points d'intersection des courbes :

- $(2; 0)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Regrouper les logarithmes, conditions.

Énoncé: $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

Résultat

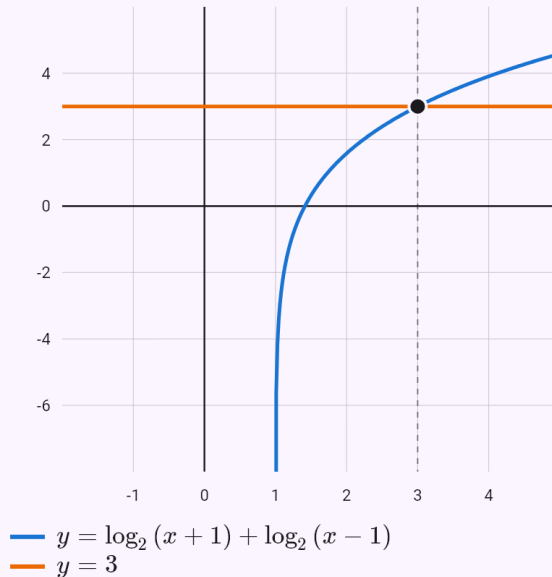
$$x = 3$$

Conditions : $x > 1$

Étapes

- Domaine de définition – conditions :
 $x > -1, x > 1 \Rightarrow x > 1$
- On regroupe les logarithmes grâce à leurs propriétés :
 $\log_2((x-1)(x+1)) = 3$
- On supprime le logarithme : $(x-1)(x+1) = 2^3$
- On passe tout du même côté : $x^2 - 9 = 0$
- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- On applique la formule des racines :
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 6}{2}$$
- La racine $x = -3$ ne vérifie pas la condition $x > 1$, ce n'est donc pas une solution.
- La racine $x = 3$ vérifie les conditions.

Graphique



Points d'intersection des courbes :

• (3; 3)

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Bases différentes : on divise par 4^d , puis $t = (5/2)^d$.

Énoncé: $25^d + 10^d = 4^d$

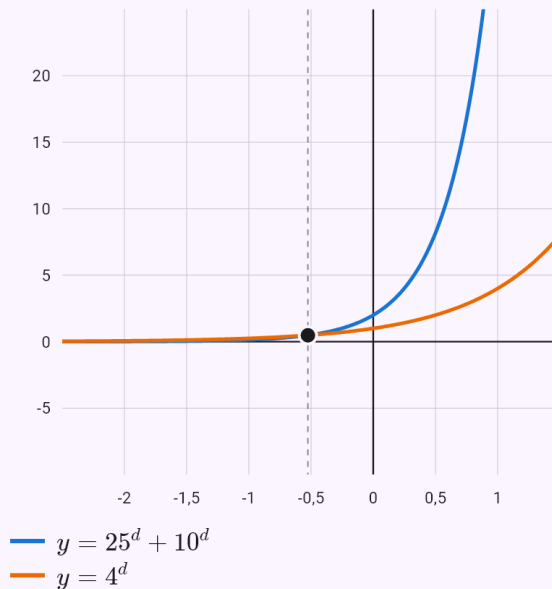
Résultat

$$d = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Étapes

- On divise l'équation par l'expression positive 4^d :
 $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^d = 1$
- On pose $t = \left(\frac{5}{2}\right)^d$: $t^2 + t - 1 = 0$
- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- On applique la formule des racines :
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
- L'équation $\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ n'a pas de solution réelle.
- On revient à l'inconnue de départ
$$\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Graphique



Points d'intersection des courbes :

• $\left(\log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right); 0,4829 \right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de d .

Base inférieure à 1 – le sens de l'inégalité change.

Énoncé: $(1/2)^x > 8$

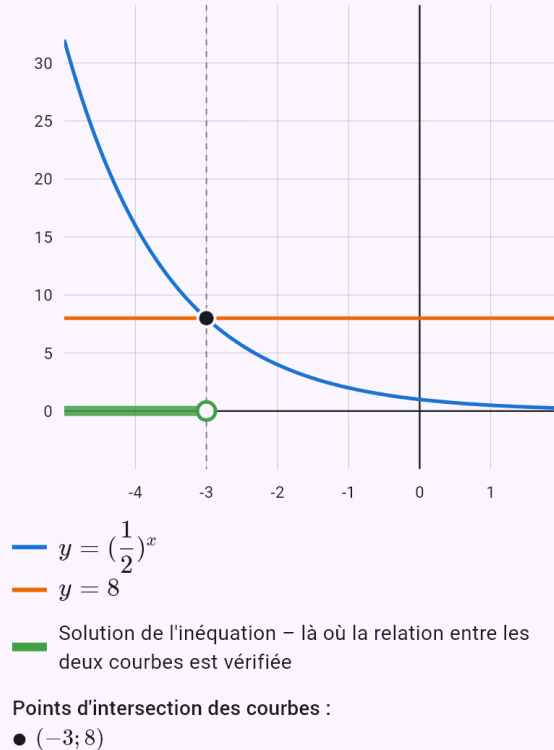
Résultat

$$x \in]-\infty; -3[$$

Étapes

- On écrit les deux membres comme des puissances de même base : $2^{-x} > 2^3$
- La fonction exponentielle de base 2 est croissante : les exposants vérifient l'inégalité de même sens : $-x > 3$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $-x > 3$
- On divise par le nombre négatif -1 , le sens de l'inégalité change : $x < -3$
- La solution de cette inéquation est $x \in]-\infty; -3[$

Graphique



Tangente hyperbolique par la définition – substitution $t = e^{2x}$.

Énoncé: $\tanh x = 1/2$

Résultat

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Étapes

- On remplace par les définitions

$$\tanh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- On pose $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- On résout : $t = 3$
- On revient à l'inconnue de départ : $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

L'inconnue dans la base – par la définition ; la racine -1 ne vérifie pas les conditions.

Énoncé: $\log_x (2x+3) = 2$

Résultat

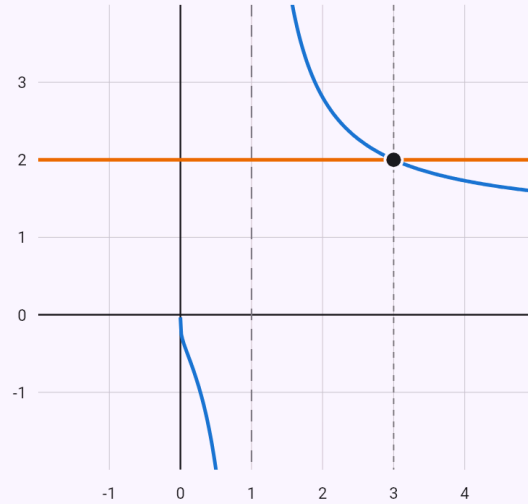
$$x = 3$$

Conditions : $x > 0$, $x \neq 1$

Étapes

- Domaine de définition – conditions : $x > 0$, $x \neq 1$
- On supprime le logarithme : $x^2 = 2x + 3$
- On passe tout du même côté : $x^2 - 2x - 3 = 0$
- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- On applique la formule des racines :
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
- La racine $x = -1$ ne vérifie pas la condition $x > 0$, $x \neq 1$, ce n'est donc pas une solution.
- La racine $x = 3$ vérifie les conditions.

Graphique



Points d'intersection des courbes :

- (3; 2)

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

L'inconnue dans la base et l'exposant – on prend le logarithme, substitution $t = \log x$.

Énoncé: $x^{(\log x)} = 100$

Résultat

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

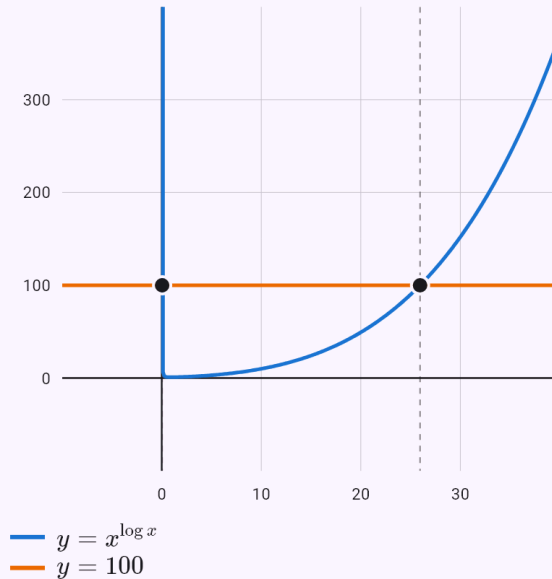
$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Conditions : $x > 0$

Étapes

- On prend le logarithme des deux membres :
 $\log(x^{\log x}) = 2 \Rightarrow \log x \cdot \log x = 2$
- Domaine de définition – conditions : $x > 0$
- On pose $t = \log x : t^2 - 2 = 0$
- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- On applique la formule des racines :
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- On revient à l'inconnue de départ :
 $\log x = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{-\sqrt{2}}$
- On revient à l'inconnue de départ :
 $\log x = \sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{\sqrt{2}}$
- La racine $x = 10^{-\sqrt{2}}$ vérifie les conditions.
- La racine $x = 10^{\sqrt{2}}$ vérifie les conditions.

Graphique



Points d'intersection des courbes :

$$\bullet \left(10^{-\sqrt{2}}; 100\right) \quad \bullet \left(10^{\sqrt{2}}; 100\right)$$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Limitations connues

- Les logarithmes de bases différentes qui ne sont pas des puissances d'un même nombre ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$) ne sont résolus que numériquement.
- Les équations hyperboliques qui mènent à une équation de degré 4 en e^x ($\cosh^2 x - 3 \sinh x = 3$) ne sont résolues que numériquement ; les inéquations avec des fonctions hyperboliques réciproques ne sont pas encore prises en charge.

Valeur absolue

L'application résout les équations et inéquations avec valeurs absolues de deux façons, à choisir avec une puce : « Par définition » – un raccourci qui développe $|a| = b$ ou $|a| < b$ – et « Méthode des zéros » – en découpant la droite numérique en intervalles sur lesquels chaque valeur absolue a un signe fixe. Sans choix, elle prend elle-même la méthode la plus adaptée.

Les valeurs absolues imbriquées ($||x| - 2| = 1$) se résolvent de la même façon : par définition pas à pas de l'extérieur vers l'intérieur, par la méthode des zéros de l'intérieur vers l'extérieur – d'abord les zéros des valeurs absolues intérieures, puis sur chaque intervalle la valeur absolue restante.

Une inéquation $|f| < |g|$ (une seule valeur absolue de chaque côté) peut aussi être résolue avec la puce « Par élévation au carré » : les deux côtés sont positifs ou nuls, on l'élève donc au carré et on la résout comme une inéquation du second degré. Une expression avec des valeurs absolues seule ($|x - 1| + |x + 2|$) est simplifiée par morceaux – zéros, tableau de signes et, sur chaque intervalle, l'expression sans valeurs absolues.

Exemples

Une valeur absolue – développée par définition.

Énoncé: $|2x - 1| = 5$

Résultat

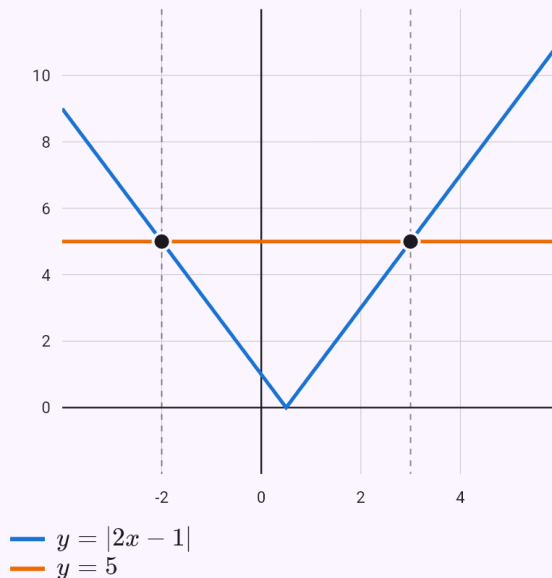
$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3$$

Étapes

- Il n'y a qu'une seule valeur absolue et un nombre de l'autre côté : il suffit d'appliquer la définition.
- Par définition, $|2x - 1| = 5$ équivaut à $2x - 1 = 5$ ou $2x - 1 = -5$
- On résout : $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- On résout : $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Graphique



Points d'intersection des courbes :

• $(-2; 5)$ • $(3; 5)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Deux valeurs absolues – la méthode des zéros.

Énoncé: $|x - 1| + |x + 2| < 5$

Résultat

$$x \in]-3; 2[$$

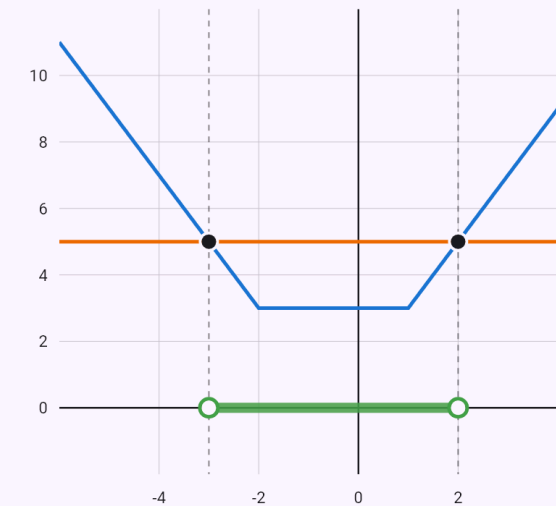
Étapes

- On supprime les valeurs absolues par la méthode des zéros : ils découpent la droite numérique en intervalles, sur chacun les expressions à l'intérieur gardent leur signe.
- Zéros des expressions dans les valeurs absolues :
 $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
- Signes sur chaque intervalle :

	$] -\infty; -2[$	$[-2; 1[$	$[1; \infty[$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
- Sur l'intervalle $] -\infty; -2[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- On résout : $-2x - 1 < 5$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $-2x < 6$
- On divise par le nombre négatif -2 , le sens de l'inégalité change : $x > -3$
- La solution de cette inéquation est $x \in]-3; \infty[$
- Intersection avec l'intervalle $] -\infty; -2[: x \in]-3; -2[$

- Sur l'intervalle $[-2; 1[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- L'inconnue a disparu et il reste l'affirmation vraie $3 < 5$: tout l'intervalle $[-2; 1[$ est solution.
- Sur l'intervalle $[1; \infty[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- On résout : $2x + 1 < 5$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $2x < 4$
- On divise par le nombre positif 2 , le sens de l'inégalité ne change pas : $x < 2$
- La solution de cette inéquation est $x \in]- \infty; 2[$
- Intersection avec l'intervalle $[1; \infty[: x \in [1; 2[$
- La solution est la réunion des résultats : $x \in]-3; 2[$

Graphique



$$\text{—} y = |x - 1| + |x + 2|$$

$$\text{—} y = 5$$

 Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

● $(-3; 5)$ ● $(2; 5)$

Valeur absolue imbriquée – par définition, de l'extérieur vers l'intérieur.

Énoncé: $||x| - 2| = 1$

Résultat

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -1$$

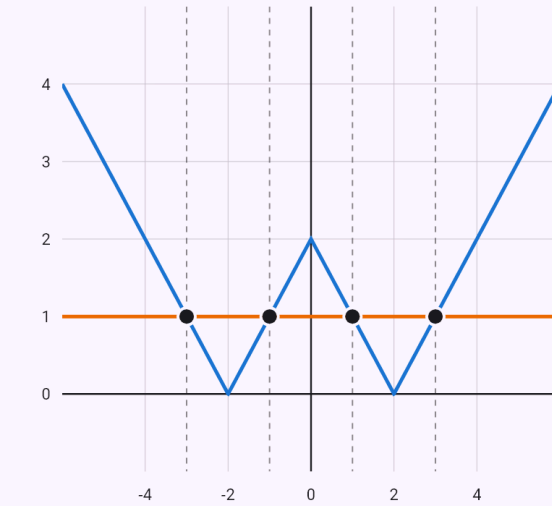
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 3$$

Étapes

- Il n'y a qu'une seule valeur absolue et un nombre de l'autre côté : il suffit d'appliquer la définition.
- Par définition, $||x| - 2| = 1$ équivaut à $|x| - 2 = 1$ ou $|x| - 2 = -1$
- On isole la valeur absolue : $|x| = 3$
- Par définition, $|x| = 3$ équivaut à $x = 3$ ou $x = -3$
- On isole la valeur absolue : $|x| = 1$
- Par définition, $|x| = 1$ équivaut à $x = 1$ ou $x = -1$

Graphique



$y = ||x| - 2|$
 $y = 1$

Points d'intersection des courbes :

$\bullet (-3; 1)$ $\bullet (-1; 1)$ $\bullet (1; 1)$ $\bullet (3; 1)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Valeurs absolues des deux côtés – élévation au carré.

Énoncé: $|x - 1| < |2x + 3|$ Par élévation au carré

Résultat

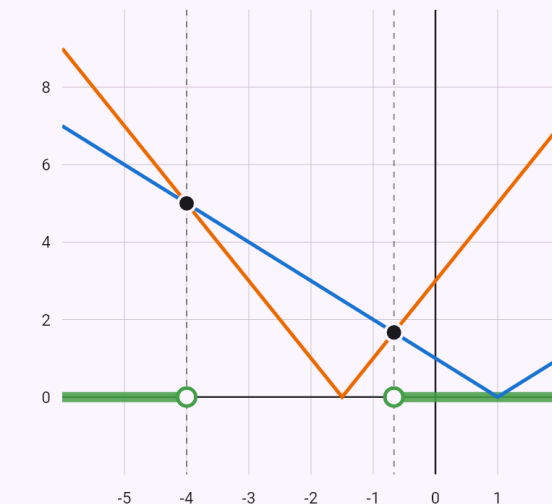
$$x \in]-\infty; -4[\cup]-\frac{2}{3}; \infty[$$

Étapes

- Des deux côtés il n'y a qu'une valeur absolue : les deux côtés sont positifs ou nuls, on peut donc élever l'inéquation au carré (transformation équivalente).
- On élève les deux côtés au carré : $(x - 1)^2 < (2x + 3)^2$
- On passe tout du même côté : $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- On factorise : $-(x + 4)(3x + 2) < 0$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{2}{3}$
- Signes sur chaque intervalle :

	$] -\infty; -4[$	$-4; -\frac{2}{3}[$	$-\frac{2}{3}; \infty[$
$x + 4$	-	-	+
$3x + 2$	-	-	+
$-(x + 4)(3x + 2)$	-	+	-

Graphique



$y = |x - 1|$
 $y = |2x + 3|$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

$\bullet (-4; 5)$ $\bullet \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Expression avec valeurs absolues – par morceaux sur les intervalles.

Énoncé: $|x - 1| + |x + 2|$

Résultat

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in]-\infty; -2[\\ 3, & x \in [-2; 1[\\ 2x + 1, & x \in [1; \infty[\end{cases}$$

Étapes

- On supprime les valeurs absolues par la méthode des zéros : ils découpent la droite numérique en intervalles, sur chacun les expressions à l'intérieur gardent leur signe.

- Zéros des expressions dans les valeurs absolues :
 $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

- Signes sur chaque intervalle :

	$] -\infty; -2[$	$[-2; 1[$	$[1; \infty[$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

- Sur l'intervalle $] -\infty; -2[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes :
 $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- Sur l'intervalle $[-2; 1[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Sur l'intervalle $[1; \infty[$, on supprime les valeurs absolues selon les signes : $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Limitations connues

- Une expression avec des valeurs absolues n'est simplifiée que sur toute la droite numérique, pas sur un intervalle donné ; l'élévation au carré n'est proposée que pour une inéquation avec une seule valeur absolue de chaque côté.

Équations et inéquations trigonométriques

L'application ramène l'équation à des équations de base comme $\sin x = a$ et les résout sur le cercle trigonométrique : elle trouve les angles d'un tour et leur ajoute des multiples de la période ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Le cercle est dessiné directement dans la résolution.

Elle privilégie les formules connues – angle double et moitié, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, somme en produit –, puis la factorisation, le changement $t = \sin x$, la division d'une équation homogène par $\cos^n x$ et l'angle auxiliaire pour $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Le résultat est aussi vérifié numériquement sur toute une période.

Une inconnue écrite avec une lettre latine (x, t) est en radians, avec une lettre grecque ($\alpha, \beta, \dots$) en degrés – tout comme une saisie avec le signe $^\circ$ ($\sin(x + 30^\circ)$). Pour obtenir les racines dans un intervalle, ajoutez-le après une virgule ou sur la ligne suivante.

Une inéquation est résolue par un arc du cercle trigonométrique, une plus complexe par les zéros sur une période ; le résultat est formé d'intervalles avec la période.

Exemples

Deux familles de solutions, les angles sur le cercle trigonométrique.

Énoncé: $\sin x = 1/2$

Résultat

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

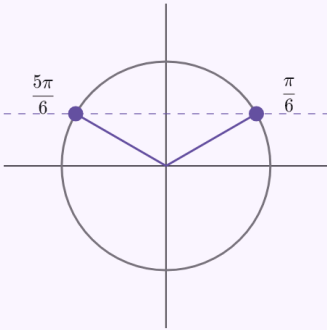
$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

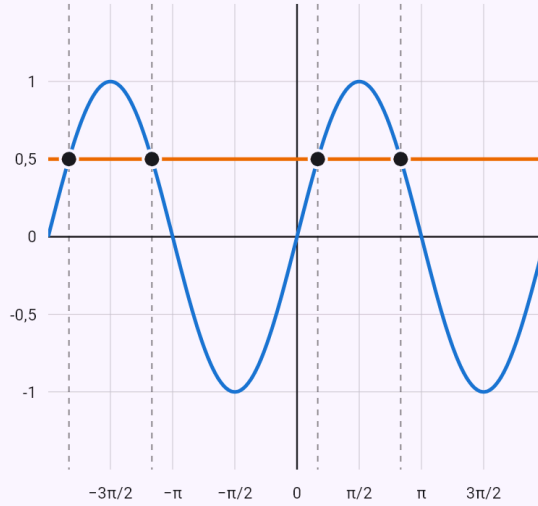
Étapes

- Équation de base $\sin x = \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



Graphique



$$\begin{aligned} \text{---} y &= \sin x \\ \text{---} y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Points d'intersection des courbes :

$$\begin{aligned} &\bullet \left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \quad \bullet \left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \quad \bullet \left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \\ &\bullet \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Le changement $t = \sin x$ et une équation du second degré.

Énoncé: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

Résultat

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

• On pose $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$

• On calcule le discriminant :

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

• On applique la formule des racines :

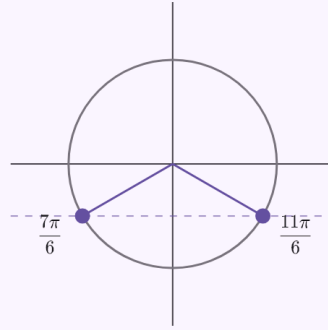
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

• Équation de base $\sin x = -\frac{1}{2}$: sur le cercle

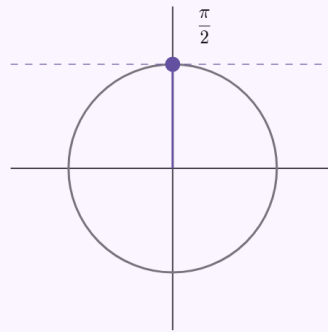
trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on

obtient toutes les solutions :

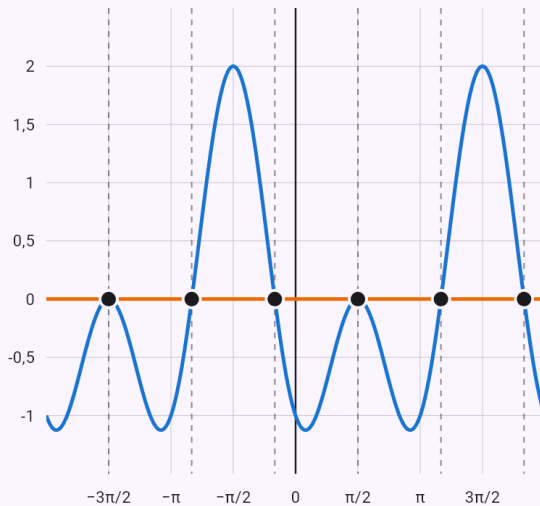
$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$



- Équation de base $\sin x = 1$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{2}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Graphique



— $y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$

— $y = 0$

Points d'intersection des courbes :

$$\bullet \left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right) \bullet \left(-\frac{5\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(-\frac{\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

$$\bullet \left(\frac{7\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(\frac{11\pi}{6}; 0\right)$$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

La formule de $\sin 2x$ et la factorisation.

Énoncé: $\sin 2x = \cos x$

Résultat

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

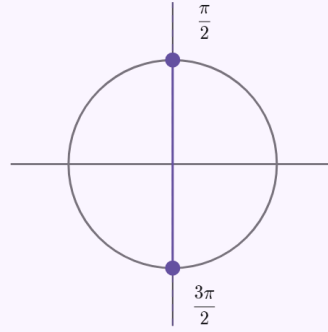
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

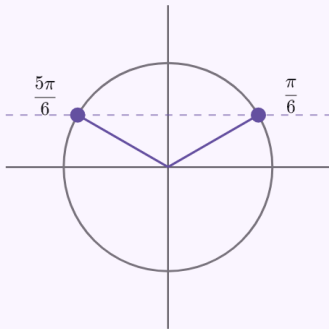
$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

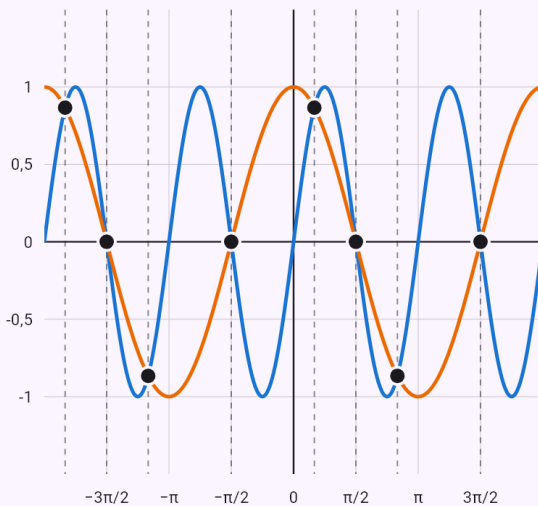
- On passe tout du même côté : $\sin(2x) - \cos x = 0$
- On applique la formule $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:
 $2 \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- On factorise : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $(2 \sin x - 1) \cos x = 0$
- On résout l'équation $\cos x = 0$
- Équation de base $\cos x = 0$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- On résout l'équation $2 \sin x - 1 = 0$
- On isole la fonction trigonométrique : $\sin x = \frac{1}{2}$
- Équation de base $\sin x = \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions :
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graphique



— $y = \sin 2x$
 — $y = \cos x$

Points d'intersection des courbes :

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ • $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ • $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ • $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ • $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ • $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

L'angle auxiliaire : $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \pi/4)$.

Énoncé: $\sin x + \cos x = 1$

Résultat

$$x_1 = 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

- On passe tout du même côté : $\cos x + \sin x - 1 = 0$

- On introduit un angle auxiliaire φ :
 $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, où

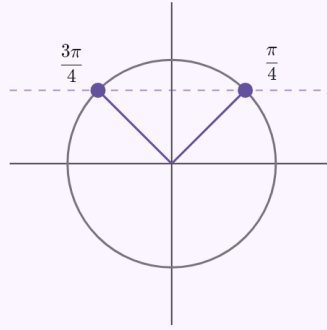
$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

- On isole la fonction trigonométrique :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Équation de base $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions :

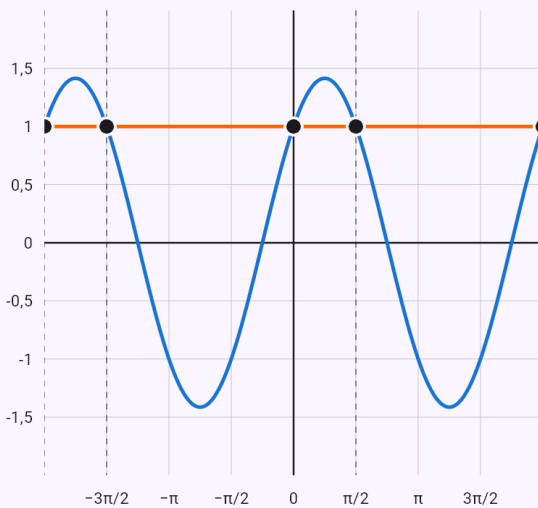
$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$



- On exprime l'inconnue

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Graphique



— $y = \sin x + \cos x$

— $y = 1$

Points d'intersection des courbes :

- $(-2\pi; 1)$ $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$ $(0; 1)$ $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
- $(2\pi; 1)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Une lettre grecque – le résultat en degrés.

Énoncé: $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$

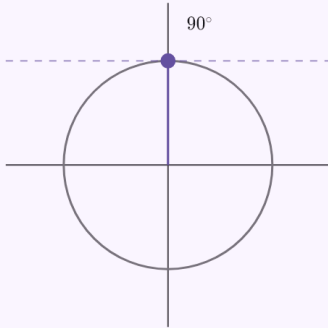
Résultat

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

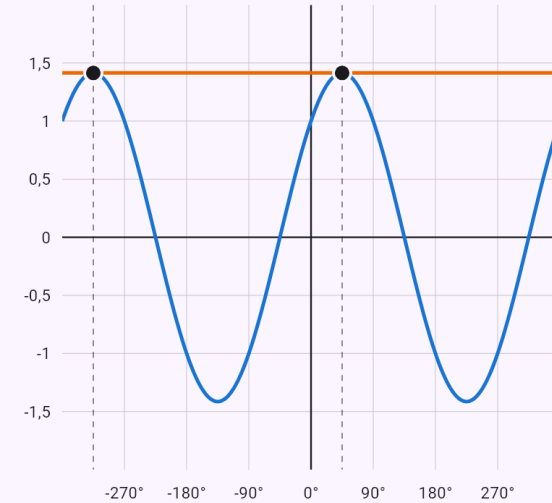
- On passe tout du même côté : $\cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{2} = 0$
- On introduit un angle auxiliaire φ :
 $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$, où
 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- On isole la fonction trigonométrique : $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Équation de base $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont 90° ; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- On exprime l'inconnue

$$\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Graphique



$$y = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{2}$$

Points d'intersection des courbes :

$$\bullet (-315^\circ; \sqrt{2}) \quad \bullet (45^\circ; \sqrt{2})$$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Seulement les racines dans l'intervalle donné.

Énoncé: $\sin x = 1/2$, $x \in]0; 4\pi[$

Résultat

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

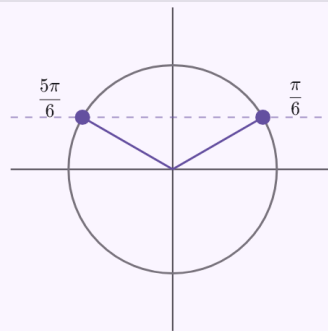
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$

$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

Étapes

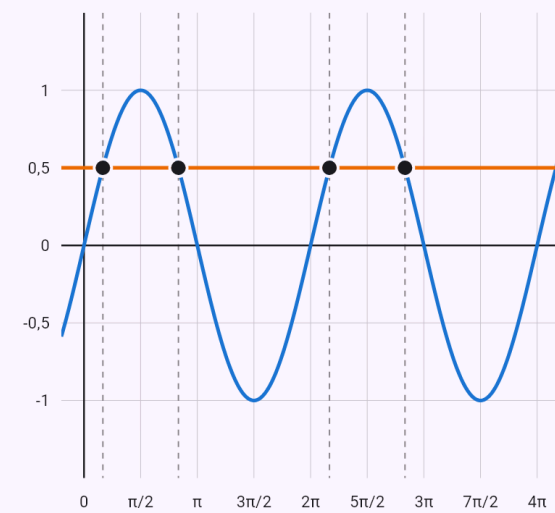
- Équation de base $\sin x = \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions :
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- Les solutions dans l'intervalle $x \in [0; 4\pi[$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{13\pi}{6}, x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

Graphique



— $y = \sin x$

— $y = \frac{1}{2}$

Points d'intersection des courbes :

• $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ • $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ • $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ • $\left(\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Chaque point d'intersection correspond à une solution de l'équation : son abscisse est la valeur de x .

Un arc du cercle trigonométrique, un intervalle autour de zéro.

Énoncé: $\cos x > \frac{1}{2}$

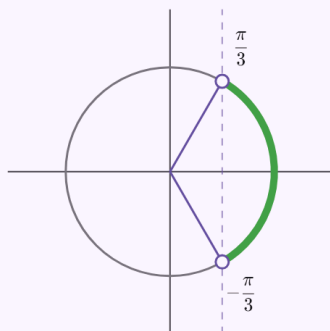
Résultat

$$x \in \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[$$

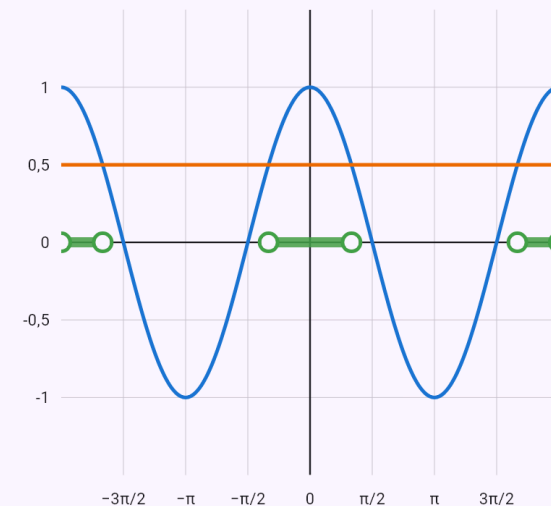
$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

- Inéquation de base $\cos x > \frac{1}{2}$: sur le cercle trigonométrique, elle est vérifiée sur l'arc mis en évidence ; avec la période : $x \in \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[$



Graphique



— $y = \cos x$

— $y = \frac{1}{2}$

— Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Les zéros sur une période et le signe entre eux.

Énoncé: $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$

Résultat

$$x \in \left] \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right[$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Étapes

• On résout d'abord l'équation $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$

• On pose $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$

• On calcule le discriminant :

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

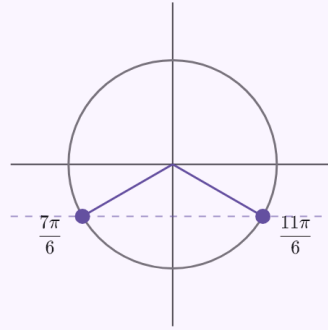
• On applique la formule des racines :

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

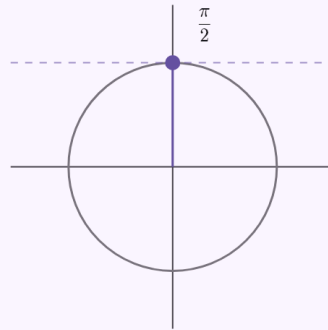
• Équation de base $\sin x = -\frac{1}{2}$: sur le cercle

trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions :

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

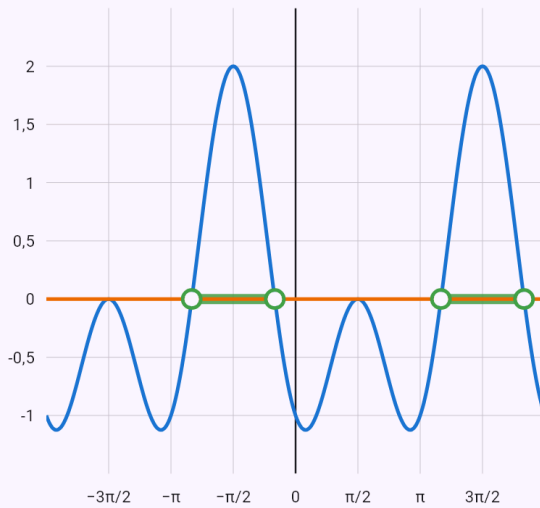


• Équation de base $\sin x = 1$: sur le cercle trigonométrique, les angles d'un tour qui la vérifient sont $\frac{\pi}{2}$; en ajoutant des multiples de la période, on obtient toutes les solutions : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



• La fonction a pour période 2π . Ses zéros (et les points où elle n'est pas définie) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ découpent une période en intervalles ; selon le signe, l'inéquation est vérifiée pour : $x \in \left] \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right[$

Graphique



— $y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
— $y = 0$

■ Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Limitations connues

- Les équations où l'inconnue apparaît aussi hors d'une fonction trigonométrique ($x = \cos x$) ne sont résolues que numériquement, sans la période.
- Les doubles inéquations trigonométriques ($-1/2 < \sin x < 1/2$) et les fonctions trigonométriques dans une valeur absolue ne sont pas encore prises en charge.

Inéquations et systèmes d'inéquations

L'application résout les inéquations du second degré et rationnelles avec les valeurs qui annulent et un tableau de signes. Une double inéquation et un système d'inéquations sont résolus comme l'intersection des solutions de chaque inéquation, montrée sur la droite numérique. Un système d'inéquations à deux inconnues est résolu comme une région du plan, coloriée sur le graphique.

Dans un système d'inéquations à deux inconnues, l'application indique aussi les sommets de la région – les intersections des frontières avec leurs coordonnées exactes. Un système d'une équation et d'inéquations à une inconnue est résolu en résolvant l'équation puis en remplaçant ses racines dans les inéquations ; à deux inconnues, la solution est la partie de la courbe de l'équation située dans la région des inéquations – surlignée dans le graphique, ses extrémités calculées exactement. Un système peut aussi s'écrire sur une ligne, séparé par des points-virgules ($2^x > 4; 3^x < 81$).

Exemples

Une inéquation du second degré – valeurs qui annulent et signes.

Énoncé: $x^2 - x - 6 > 0$

Résultat

$$x \in]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$$

Étapes

- On factorise : $(x - 3)(x + 2) > 0$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
- Signes sur chaque intervalle :

	$] -\infty; -2[$	$] -2; 3[$	$] 3; \infty[$
$x - 3$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$(x - 3)(x + 2)$	+	-	+

Graphique



$$y = x^2 - x - 6$$

$$y = 0$$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

• $(-2; 0)$ • $(3; 0)$

Une inéquation rationnelle – le dénominateur ne doit pas s'annuler.

Énoncé: $(x+1)/(x-3) \leq 0$

Résultat

$$x \in [-1; 3[$$

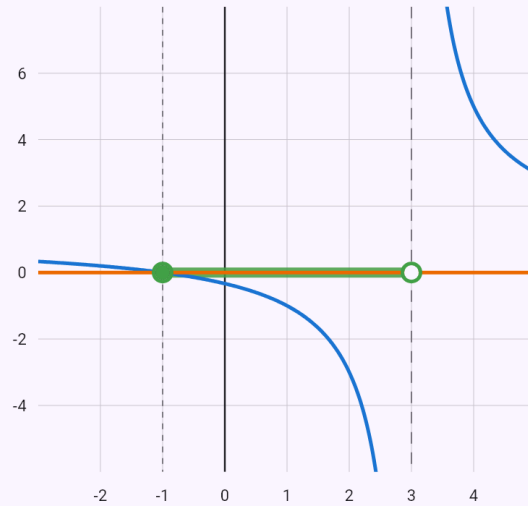
Conditions : $x \neq 3$

Étapes

- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul : $x \neq 3$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -1$, $x_2 = 3$
- Signes sur chaque intervalle :

	$] -\infty; -1[$	$] -1; 3[$	$] 3; \infty[$
$x - 3$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$\frac{x+1}{x-3}$	+	-	+

Graphique



$$y = \frac{x+1}{x-3}$$

$$y = 0$$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

● $(-1; 0)$

Une double inéquation.

Énoncé: $-1 \leq 2x + 1 < 5$

Résultat

$$x \in [-1 ; 2[$$

Étapes

- Inéquation 1 : $-1 \leq 2x + 1$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $-2x \leq 2$
- On divise par le nombre négatif -2 , le sens de l'inégalité change : $x \geq -1$
- La solution de cette inéquation est $x \in [-1 ; \infty[$
- Inéquation 2 : $2x + 1 < 5$
- On garde les termes en inconnue à gauche et on passe le reste à droite : $2x < 4$
- On divise par le nombre positif 2, le sens de l'inégalité ne change pas : $x < 2$
- La solution de cette inéquation est $x \in]-\infty ; 2[$
- La solution du système est l'intersection des solutions des inéquations : $x \in [-1 ; 2[$

Graphique



Solution du système (intersection)



Chaque inéquation a sa propre ligne sur la droite numérique, leur intersection est en vert. Un point plein appartient à la solution, un point vide non.

Système d'inéquations à deux inconnues – une région du plan et ses sommets.

Énoncé: $x + y \leq 4$

$x - y \geq 0$

$$y \geq 0$$

Résultat

$$y \leq 4 - x$$

$$y \leq x$$

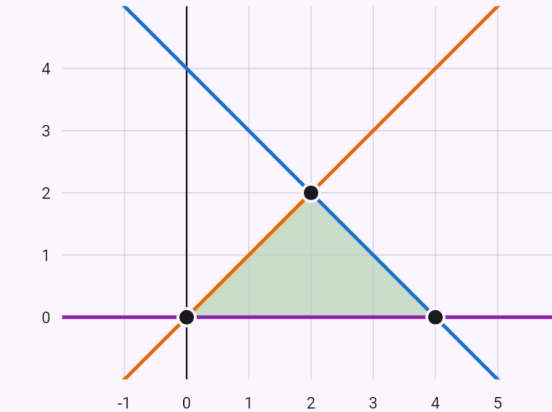
$$y \in [0; \infty[$$

Étapes

- Inéquation 1 : $x + y \leq 4$
- La frontière est la courbe $x + y = 4$ – tracée en trait plein, ses points font partie de la solution.
- On substitue le point $[0; 0]$: $0 \leq 4$ est vrai – la solution est la partie du plan contenant le point.
- Inéquation 2 : $x - y \geq 0$
- La frontière est la courbe $x - y = 0$ – tracée en trait plein, ses points font partie de la solution.
- On substitue le point $[1; 0]$: $1 \geq 0$ est vrai – la solution est la partie du plan contenant le point.
- Inéquation 3 : $y \geq 0$
- La frontière est la courbe $y = 0$ – tracée en trait plein, ses points font partie de la solution.
- On substitue le point $[0; 1]$: $1 \geq 0$ est vrai – la solution est la partie du plan contenant le point.
- La solution du système est la partie commune de ces régions – colorée sur le graphique.

- Sommets de la région (intersections des frontières) : $[0; 0]$, $[2; 2]$, $[4; 0]$

Graphique



$$\text{bleu } x + y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 4 - x$$

$$\text{orange } x - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x$$

$$\text{violet } y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0; \infty[$$

La solution est la région colorée. Une frontière en trait plein en fait partie, une en pointillés non.

Sommets de la région :

$$\bullet (0; 0) \quad \bullet (2; 2) \quad \bullet (4; 0)$$

Une inéquation dans les entiers – les entiers de l'intervalle sont énumérés.

Énoncé: $x^2 < 10$

Résultat

$$x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

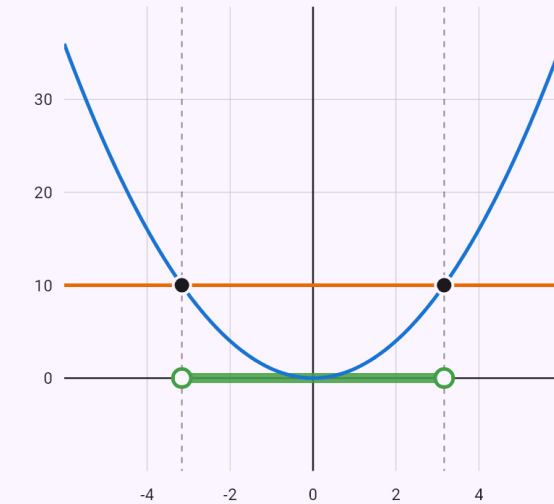
Étapes

- On passe tout du même côté : $x^2 - 10 < 0$
- Les valeurs critiques partagent la droite réelle en intervalles : $x_1 = -\sqrt{10}$, $x_2 = \sqrt{10}$
- Signes sur chaque intervalle :

$$\begin{array}{c|ccccccc} x^2 - 10 &]-\infty; -\sqrt{10}[&]-\sqrt{10}; \sqrt{10}[&]\sqrt{10}; \infty[\\ \hline & + & - & + \end{array}$$

- Dans les réels $x \in]-\sqrt{10}; \sqrt{10}[$; dans $\mathbb{Z}$:
 $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

Graphique



$y = x^2$
 $y = 10$

Solution de l'inéquation – là où la relation entre les deux courbes est vérifiée

Points d'intersection des courbes :

• $(-\sqrt{10}; 10)$ • $(\sqrt{10}; 10)$

Équation et inéquation – les racines de l'équation remplacées dans l'inéquation.

Énoncé: $x^2 - x - 6 = 0$

$x > 0$

Résultat

$$x = 3$$

Étapes

- Résolvons d'abord l'équation $x^2 - x - 6 = 0$, puis remplaçons ses racines dans les inéquations.
- On calcule le discriminant :
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- On applique la formule des racines :
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
- La racine $x = -2$ ne vérifie pas la condition $x > 0$, ce n'est donc pas une solution.
- La racine $x = 3$ vérifie les conditions.

Cercle et demi-plan – la solution est un arc, ses extrémités n'en font pas partie.

Énoncé: $x^2 + y^2 = 4$

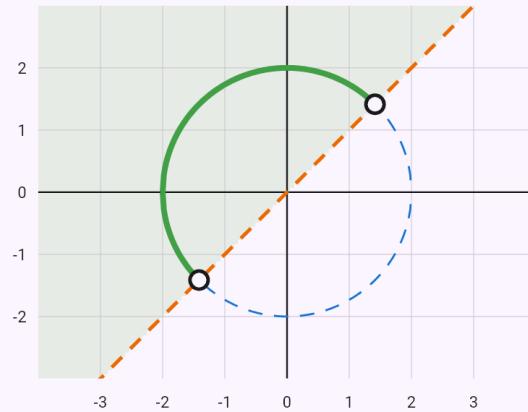
Résultat

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y > x$$

Étapes

- La solution est formée des points de la courbe $x^2 + y^2 = 4$ situés dans la région donnée par les inéquations. Cherchons d'abord cette région :
- La frontière est la courbe $y = x$ – tracée en pointillés, ses points ne font pas partie de la solution.
- On substitue le point $[1; 0]$: $0 > 1$ est faux – la solution est la partie du plan ne contenant pas le point.
- Extrémités de la partie de la courbe : $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ – sur une frontière en pointillés, elles n'appartiennent pas à la solution.

Graphique

— $x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
 - - - $y > x$

La solution est la partie de la courbe surlignée en vert – celle qui se trouve dans la région colorée. Une extrémité pleine appartient à la solution, une extrémité vide non.

Extrémités :

$\circ (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \quad \circ (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Limitations connues

- Un système avec deux équations ou plus et des inéquations n'est pas encore résolu ; écrivez les décimaux avec un point ($x > 2.5$).

Systèmes d'équations

L'application résout un système linéaire à deux inconnues par combinaison ou par substitution, les systèmes plus grands par le pivot de Gauss – aussi sous forme matricielle. La méthode se choisit avec une puce. Un système de deux équations à deux inconnues a aussi un graphique où les solutions sont les points d'intersection des droites ou des courbes.

Un système non linéaire (par exemple un cercle et une droite) est résolu et tracé, pour l'instant sans démarche.

Exemples

La méthode par combinaison.

Énoncé: $2x + 3y = 7$

$x - y = 1$

Combinaison

Résultat

$$x = 2$$

$$y = 1$$

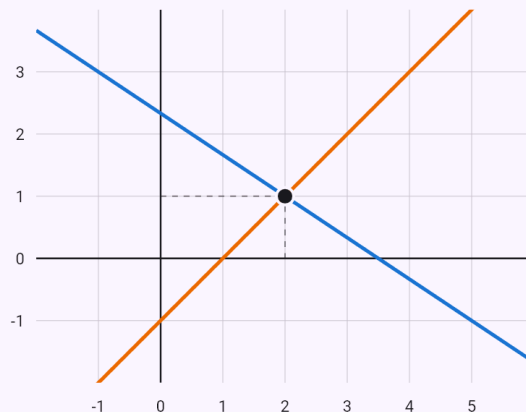
Étapes

- On multiplie la première équation par 1 et la seconde par -2 pour que x s'élimine en les additionnant

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- On additionne les équations, x s'élimine : $5y = 5$
- On résout : $5y = 5 \Rightarrow y = 1$
- On remplace dans l'équation 2 : $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Graphique



$$\text{— } 2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$\text{— } x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$$

Points d'intersection des courbes :

● (2; 1)

Chaque point d'intersection correspond à une solution du système : ses coordonnées sont les valeurs de x et y .

Trois équations – le pivot de Gauss.

Énoncé: $x + y + z = 6$

$2x - y + z = 3$

$$x + 2y - z = 2$$

Pivot de Gauss

Résultat

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

Étapes

- On élimine x des équations suivantes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- On élimine y des équations suivantes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- On résout : $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- On remplace dans l'équation 2 :
 $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- On remplace dans l'équation 1 : $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Un cercle et une droite.

Énoncé: $x^2 + y^2 = 25$

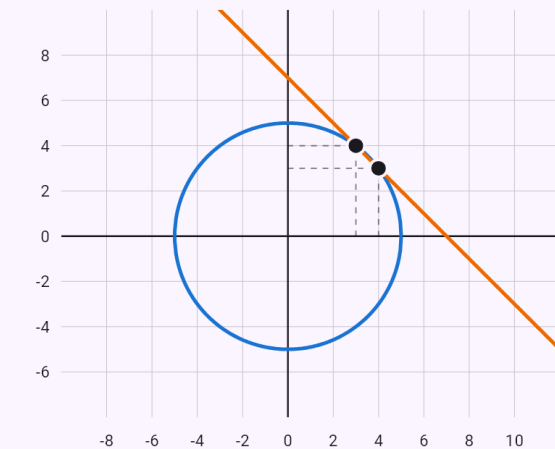
$$x + y = 7$$

Résultat

$$x_1 = 3, y_1 = 4$$

$$x_2 = 4, y_2 = 3$$

Graphique



$$\text{— } x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{— } x + y = 7 \Leftrightarrow y = 7 - x$$

Points d'intersection des courbes :

$$\bullet (3; 4) \quad \bullet (4; 3)$$

Chaque point d'intersection correspond à une solution du système : ses coordonnées sont les valeurs de x et y .

Limitations connues

- Les systèmes non linéaires sont pour l'instant sans démarche.

Équations et inéquations avec paramètre

Une lettre de l'équation autre que l'inconnue est un paramètre : un réel quelconque dont dépend la solution. L'application ramène l'équation à la forme $A \cdot x = B$ (une équation du second degré à $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$) et discute la solution selon les valeurs du paramètre : où le coefficient de l'inconnue est nul, où le discriminant est positif, nul ou négatif, où les conditions excluent une racine et pour quelles valeurs le problème n'a pas de sens. Le résultat résume les cas.

L'application choisit l'inconnue dans l'ordre x, y, z, u, v, w, t ; les autres lettres sont des paramètres. Choisis une autre inconnue avec la puce « Inconnue » ou écris-la après une virgule. Le graphique montre toutes les solutions comme une courbe (une région pour une inéquation) dans le plan paramètre–inconnue ; choisis la valeur du paramètre avec le curseur et lis les solutions sur la droite verticale.

Dans une intégrale indéfinie, les autres lettres sont des constantes ; l'application indique lesquelles ne doivent pas être nulles ($\int dx/(a - bx)^3$ pour $b \neq 0$).

Comment le saisir

$$2ax + a = 4x$$

Toute autre lettre est un paramètre ; l'inconnue est x (ou $y, z, \dots$).

$$(q+3)x = 2x + q, \text{ inconnue } q$$

Tu peux indiquer l'inconnue ou le paramètre après une virgule (« a est un paramètre », « inconnue q »).

Exemples

Équation linéaire – pas de solution pour $a = 2$.

Énoncé: $2ax + a = 4x$

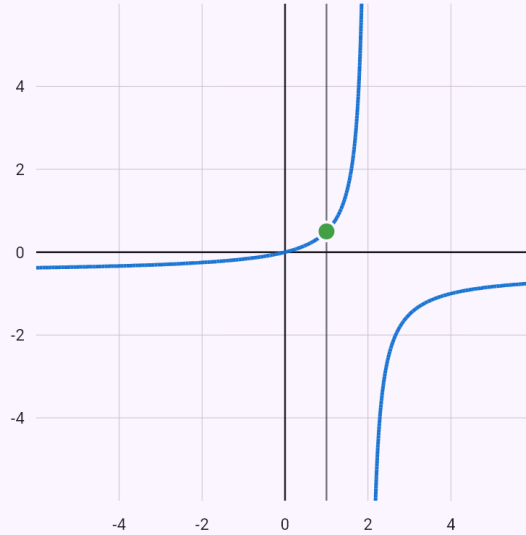
Résultat

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Étapes

- L'inconnue est x , le paramètre a est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, nous examinons donc les différents cas (discussion).
- On se ramène à la forme de base : $2(a-2)x = -a$
- Pour $a \neq 2$, $2(a-2)$ est non nul, on peut diviser :
$$x = \frac{a}{2(2-a)}$$
- Pour $a = 2$, le coefficient de l'inconnue est nul :
$$0 \cdot x = -2, \text{ donc } x \in \emptyset$$

Graphique



— $2xa + a = 4x$

Chaque point $[a ; x]$ de la courbe est une solution. Pour une valeur choisie de a , les solutions sont sur la droite verticale – déplace-la avec le curseur.



$a = 1 : x \approx 0,5$

Équation du second degré – discussion selon le discriminant.

Énoncé: $x^2 + 6x + p = 0$

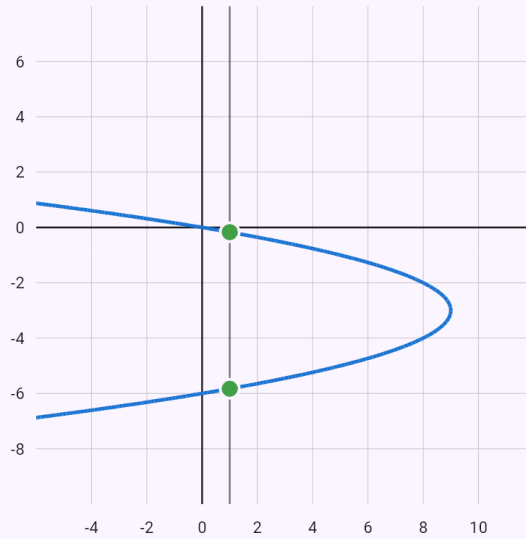
Résultat

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Étapes

- L'inconnue est x , le paramètre p est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, nous examinons donc les différents cas (discussion).
- On se ramène à la forme de base : $x^2 + 6x + p = 0$
- Le discriminant en fonction du paramètre :
 $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9 - p)$
- Pour $p < 9$, $D > 0$ et l'équation a deux racines distinctes :
 $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - p}$
- Pour $p > 9$, $D < 0$ et l'équation n'a pas de solution réelle.
- Pour $p = 9$, $D = 0$ et l'équation a une racine double :
 $x = -3$

Graphique



— $x^2 + 6x + p = 0$

Chaque point $[p ; x]$ de la courbe est une solution. Pour une valeur choisie de p , les solutions sont sur la droite verticale – déplace-la avec le curseur.

$p = 1 : \quad x \approx -5,83; -0,17$

Inéquation – le signe du coefficient décide du sens.

Énoncé: $2x + 2p - 5 < 2px + 7$

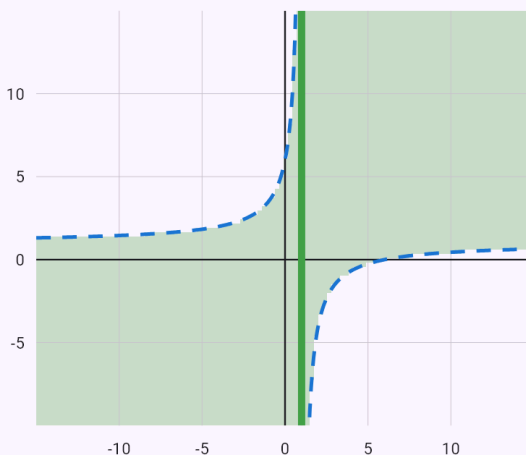
Résultat

$$\begin{cases} x < \frac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \frac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Étapes

- L'inconnue est x , le paramètre p est un réel quelconque. La solution dépend de sa valeur, nous examinons donc les différents cas (discussion).
- On se ramène à la forme de base : $2(1 - p)x < 2(6 - p)$
- Pour $p < 1$, $2(1 - p)$ est positif : en divisant, le sens de l'inégalité est conservé : $x < \frac{p-6}{p-1}$
- Pour $p > 1$, $2(1 - p)$ est négatif : en divisant, le sens de l'inégalité change : $x > \frac{p-6}{p-1}$
- Pour $p = 1$, le coefficient de l'inconnue est nul :
 $0 \cdot x < 10$, donc $x \in \mathbb{R}$

Graphique



--- $2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \frac{p-6}{p-1}$

La région colorée contient toutes les solutions $[p ; x]$. Pour une valeur choisie de p , la solution est la partie mise en évidence de la droite verticale – déplace-la avec le curseur.

$p = 1$

Limitations connues

- Pour l'instant équations linéaires et du second degré et inéquations linéaires ; la discussion complète par intervalles avec un seul paramètre, avec plusieurs les cas généraux.
- Les questions du type « pour quels p l'équation a-t-elle une racine positive » et les systèmes avec paramètre ne sont pas encore pris en charge.

Calcul algébrique

L'application transforme une expression sans signe égal selon la puce choisie : elle la simplifie (une fraction rationnelle mise au même dénominateur et simplifiée, avec conditions), la développe, la factorise (par mise en facteur, identités remarquables et schéma de Horner) ou la décompose en éléments simples – comme sur papier, avec des équations pour les coefficients inconnus. La factorisation se fait dans les entiers ; si l'expression se factorise encore dans les réels (par des racines irrationnelles), l'étape suivante le montre. La racine d'un monôme est simplifiée en partie – pour une racine paire en valeur absolue là où la base peut être négative. Les nombres complexes marchent aussi – la division en multipliant par le conjugué.

Exemples

Simplifier une fraction rationnelle.

Énoncé: $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)$ [Simplifier](#)

Résultat

$$\frac{x - 1}{x + 1}$$

Conditions : $x \neq -1$

Étapes

- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul :
 $x \neq -1$

- On factorise le numérateur et le dénominateur :
$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2}$$

- On simplifie par le facteur commun $x + 1$: $\frac{x - 1}{x + 1}$

Développer.

Énoncé: $(x + 2)^3$ [Développer](#)

Résultat

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Étapes

- On développe et on regroupe les termes semblables :
 $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Factoriser avec le schéma de Horner.

Énoncé: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Factoriser

Résultat

$$(x - 3)(x - 2)(x - 1)$$

Étapes

- Les racines rationnelles ne peuvent être que des diviseurs du terme constant -6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
- Le schéma de Horner confirme la racine $x = 1$ et divise le polynôme :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

- En substituant, on voit que ces candidats ne sont pas des racines : $P(-1) = -24 \neq 0$
- Le schéma de Horner confirme la racine $x = 2$ et divise le polynôme :

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Décomposition en éléments simples.

Énoncé: $(3x + 5)/(x^2 + x - 2)$

Éléments simples

Résultat

$$\frac{8}{3(x - 1)} + \frac{1}{3(x + 2)}$$

Conditions : $x \neq -2, x \neq 1$

Étapes

- Conditions – le dénominateur ne doit pas être nul :
 $x \neq -2, x \neq 1$
- On factorise le dénominateur : $(x - 1)(x + 2)$
- On cherche une décomposition de la forme :
$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$
- On multiplie les deux membres par le dénominateur
 $(x - 1)(x + 2) : 3x + 5 = A(x + 2) + B(x - 1)$
- On substitue $x = 1 : 8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$
- On substitue $x = -2 : -1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

Simplification partielle d'une racine, avec valeur absolue.

Énoncé: $\sqrt{8a^5 b^2}$

Simplifier

Résultat

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Étapes

- On sort de la racine ce qui peut l'être – les puissances passent devant (pour une racine paire en valeur absolue là où la base peut être négative) : $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Division de nombres complexes.

Énoncé: $(3+4i)/(1-2i)$

Simplifier

Résultat

$$-1 + 2i$$

Étapes

- On multiplie la fraction par le conjugué du dénominateur, $1 + 2i$

$$\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

Limites

MathSolver calcule la limite d'une fonction d'une variable en un point, en l'infini et les limites à gauche et à droite, et procède comme en classe : il essaie d'abord de remplacer dans la fonction. La limite d'une suite ($n \rightarrow \infty$) se calcule de même – aussi la forme 1^∞ ou une somme de puissances dont on met en facteur le terme qui croît le plus vite.

Si le remplacement donne une forme indéterminée ($0/0$, ∞/∞ , ...), il choisit une transformation selon la forme de la fonction – factoriser et simplifier, multiplier par la quantité conjuguée, diviser par la plus haute puissance, une limite usuelle ($\sin x / x$) ou la règle de L'Hôpital, éventuellement plusieurs fois.

Une limite infinie, ou une limite qui n'existe pas (limites à gauche et à droite différentes), n'est jamais donnée comme un nombre – il le dit en toutes lettres et montre les limites à gauche et à droite. Le résultat s'accompagne d'un graphique de la fonction près du point avec la valeur de la limite marquée.

Pour la limite d'une suite, le graphe montre les points $a_1, a_2, a_3, \dots$ au lieu d'une courbe continue.

Comment le saisir

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) / (x - 2)$	Une limite saisie : après le mot <code>lim</code> , entre parenthèses la variable, la flèche <code>-></code> et le point, puis la fonction.
$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) / (x^2 - 5)$	Une limite en l'infini : l'infini s'écrit <code>oo</code> (moins l'infini - <code>oo</code>).
$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x$	Une limite à droite ou à gauche : <code>+</code> (à droite) ou <code>-</code> (à gauche) après le point.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	Depuis une photo, ou en LaTeX tel que l'appareil le reconnaît.
$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+2)/(n+1))^{(2n+3)}$	La limite d'une suite à l'infini.

Exemples

La forme indéterminée 0/0 – on factorise le numérateur et on simplifie.

Énoncé: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$

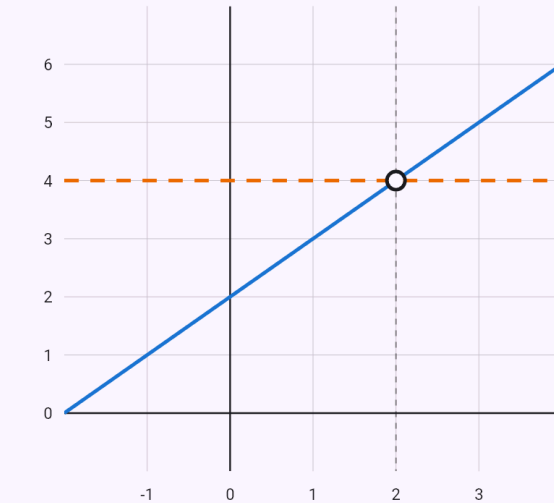
Résultat

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Étapes

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- On transforme et on simplifie
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$
- On remplace : $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Graphique



$$\text{— } y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$
$$\text{--- } y = 4$$

Limite :

● (2; 4)

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

Une limite en l'infini – numérateur et dénominateur divisés par la plus haute puissance.

Énoncé: $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) / (x^2 - 5)$

Résultat

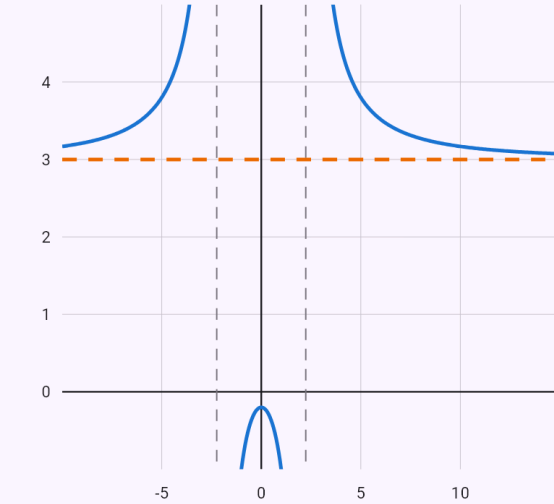
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = 3$$

Étapes

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$: il faut transformer l'expression.
- On divise numérateur et dénominateur par x^2 – les termes c/x^n tendent vers zéro

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{5}{x^2}} = 3$$

Graphique



$$\begin{aligned} \text{— } y &= \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} \\ \text{--- } y &= 3 \end{aligned}$$

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

La limite usuelle $\sin x / x$.

Énoncé: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x) / x$

Résultat

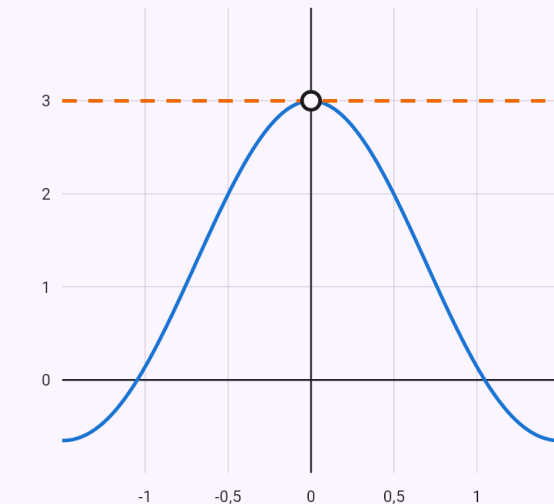
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Étapes

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- On utilise la limite connue $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Graphique



$$\begin{aligned} \text{— } y &= \frac{\sin(3x)}{x} \\ \text{--- } y &= 3 \end{aligned}$$

Limite :

● (0; 3)

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

La règle de L'Hôpital, appliquée deux fois de suite.

Énoncé: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x) / x^2$

Résultat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Étapes

- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.

- Règle de L'Hôpital – on dérive le numérateur et le dénominateur

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x + e^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

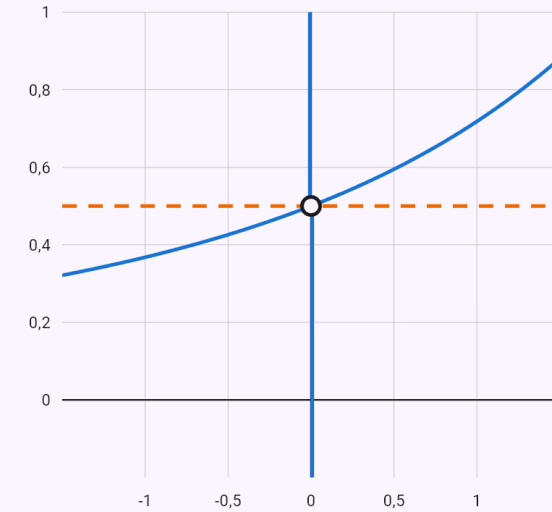
- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.

- Règle de L'Hôpital – on dérive le numérateur et le dénominateur

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2}$$

- On remplace : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$

Graphique



$$y = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Limite :

$$\bullet \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Cercle vide – la valeur dont la fonction s'approche (elle peut ne pas être définie au point même) ; en pointillés – la limite.

Les limites à gauche et à droite différent – la limite n'existe pas.

Énoncé: $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$

Résultat

La limite n'existe pas – les limites à gauche et à droite diffèrent.

Étapes

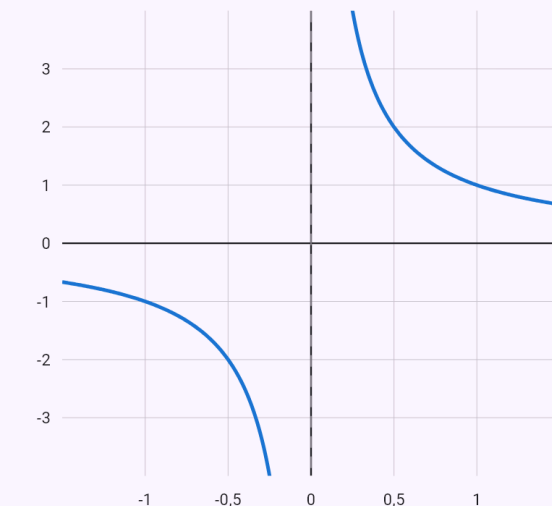
- La substitution donne un nombre non nul sur zéro – la limite est infinie, son signe à gauche et à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{0}$$

- Limites à gauche et à droite : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Graphique



$$y = \frac{1}{x}$$

Limite d'une suite – on met en facteur le terme qui croît le plus vite, 9^n.

Énoncé: $\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}}$

Résultat

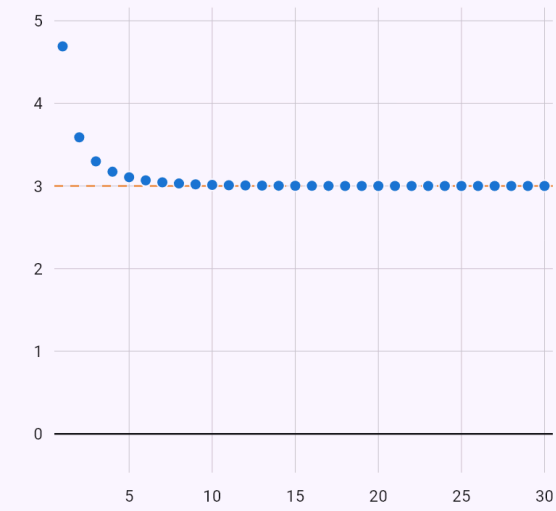
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Étapes

- On met en facteur le terme qui croît le plus vite, 9^n – les autres divisés par lui tendent vers zéro

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{9^n \left(\frac{6^n}{9^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1 \right)} =$$

Graphique



● termes a_n — limite de la suite

Les points sont les termes a_n pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Si la suite a une limite, les termes s'en approchent (en pointillés).

Dérivées

L'application dérive selon les règles – somme, produit par une constante, produit, quotient et composée – et indique à chaque étape la règle utilisée. Elle calcule aussi les dérivées successives et le nombre dérivé en un point. Les fonctions de référence (x^2 , $\sin x$, e^x , ...) peuvent aussi être dérivées par la définition, comme limite du taux d'accroissement. Le résultat s'accompagne d'un graphique de la fonction et de sa dérivée.

Pour une fonction définie implicitement par une équation en x et y ($x^3 + y^3 = 3xy$), elle dérive les deux membres par rapport à x (y étant une fonction de x) et isole y' , ou utilise la formule $y' = -F_x / F_y$; elle calcule aussi y'' et, en un point donné, la tangente et la normale, et trace la courbe.

En un point singulier (la courbe s'y recoupe ou y a un point de rebroussement), elle trouve les tangentes à partir des termes de plus bas degré – pour le folium à l'origine, $x = 0$ et $y = 0$.

Comment le saisir

$(x^2 \sin x)'$	La dérivée avec un prime après la parenthèse.
$d/dx (e^x / x)$	La notation d/dx , aussi depuis une photo ($\frac{d}{dx}$).
$(x^3 \ln x)''$	Les dérivées successives avec plusieurs primes, ou avec l'ordre dans la puce « Dériver ».
$(x^2 + 1)' _{x=2}$	Le nombre dérivé en un point, ou indiquez le point dans la puce.
$x^2 \sin x$	Une expression avec la puce « Dériver » – vous y choisissez aussi l'ordre, le point et la méthode (par les règles / par la définition).
$x^3 + y^3 = 3xy$	Une équation en x et y – la puce « Dérivée implicite » (ordre 1 ou 2, la méthode, un point $[x_0 ; y_0]$) ou « Tracé de la courbe » ; écrit $\text{diff}(x^3+y^3=3xy, x)$.

Exemples

La dérivée d'un produit.

Énoncé: $(x^2 \sin x)'$

Résultat

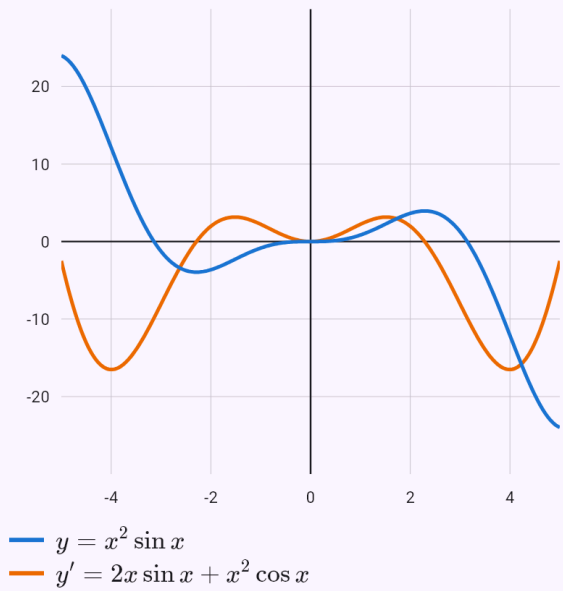
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Étapes

- Dérivée d'un produit $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Graphique



Là où la dérivée est positive, la fonction croît ; là où elle est négative, elle décroît. Aux zéros de la dérivée la fonction a une tangente horizontale.

La dérivée d'un quotient.

Énoncé: $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{x} \right)$

Résultat

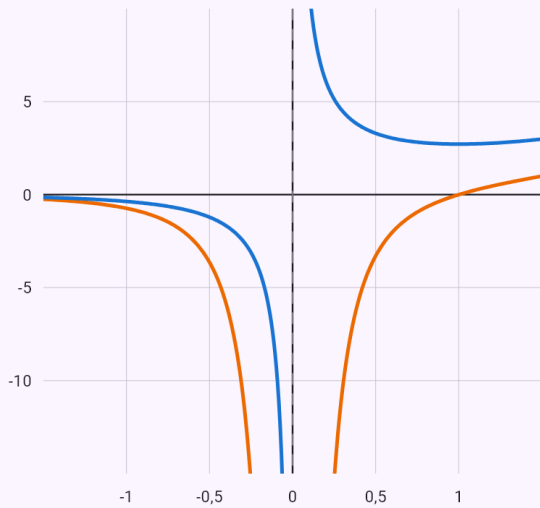
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Étapes

- Dérivée d'un quotient $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2$

$$\left(\frac{e^x}{x} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Graphique



$$y = \frac{e^x}{x}$$
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Là où la dérivée est positive, la fonction croît ; là où elle est négative, elle décroît. Aux zéros de la dérivée la fonction a une tangente horizontale.

La dérivée seconde.

Énoncé: $(x^3 \ln x)''$

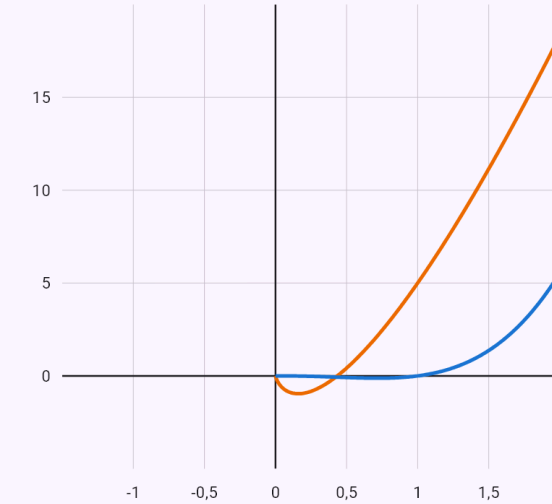
Résultat

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

Étapes

- Dérivée d'ordre 1 : $y' = (x^3 \ln x)'$
- Dérivée d'un produit $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $(x^3 \ln x)' = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- Dérivée d'ordre 2 : $y'' = (x^2 + 3x^2 \ln x)'$
- La dérivée d'une somme est la somme des dérivées :
 $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = (x^2)' + (3x^2 \ln x)'$
- On sort la constante de la dérivée :
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x^2 \ln x)'$
- Dérivée d'un produit $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $(x^2 \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- On remplace :
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- On remplace : $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- On simplifie : $y'' = 5x + 6x \ln x$

Graphique



$y = x^3 \ln x$
 $y'' = 5x + 6x \ln x$

Là où la dérivée seconde est positive, la fonction est convexe (tournée vers le haut) ; là où elle est négative, elle est concave.

La dérivée par la définition, comme limite.

Énoncé: x^2 [Dériver → Par la définition](#)

Résultat

$$y' = 2x$$

Étapes

- Dérivée par la définition
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
- La substitution donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'expression.
- On transforme et on simplifie
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)$$
- On remplace : $\lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$

Graphique



$y = x^2$
 $y' = 2x$

Là où la dérivée est positive, la fonction croît ; là où elle est négative, elle décroît. Aux zéros de la dérivée la fonction a une tangente horizontale.

Dérivée implicite – le folium de Descartes, la tangente et la normale en $[\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}]$, la dérivée seconde.

Énoncé: $x^3 + y^3 = 3xy$

Dérivée implicite, ordre 2, point $[\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}]$

Résultat

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

$$t: y = 3 - x$$

$$n: y = x$$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Conditions : $y^2 - x \neq 0$

Étapes

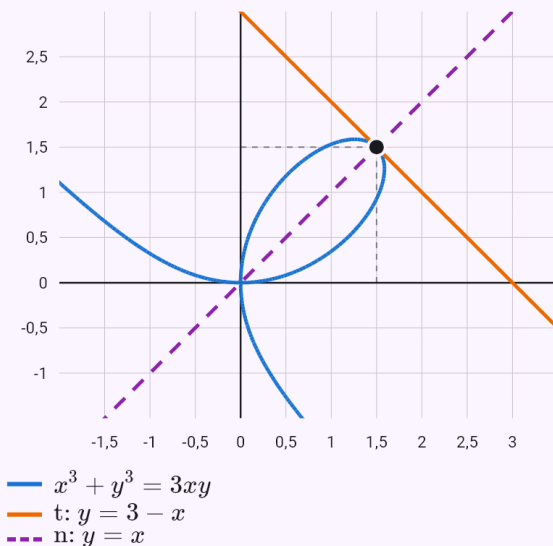
- La fonction $y = y(x)$ est donnée par l'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ – on dérive les deux membres par rapport à x , y étant une fonction de x (dérivée d'une composée : par ex. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- On dérive les deux membres :
 $(x^3 + y^3)' = (3xy)' \Rightarrow 3y^2 y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Les termes en y' à gauche, le reste à droite, y' mis en facteur : $y'(3y^2 - 3x) = -3x^2 + 3y$

- On isole y' : $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$
- La dérivée seconde – on dérive à nouveau y' par rapport à x (y et y' sont des fonctions de x)

$$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x} \right)' = \frac{2x^2 y y' - 2xy^2 - y^2 y' + x^2 - xy y'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$
- On remplace y'

$$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{(-y^2 + x)^3}$$
- Sur la courbe, $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – ce qui simplifie l'expression : $y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$
- Le point $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ est sur la courbe :
 $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}} = 0$
- Le nombre dérivé au point $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ – la pente de la tangente : $y'(\frac{3}{2}) = -1$
- La tangente : $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$
- La normale est perpendiculaire à la tangente, de pente 1 : $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$
- La dérivée seconde au point : $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Graphique



La courbe donnée par l'équation. Au point donné, la tangente (trait plein) et la normale (pointillés).

Étude de fonction

L'application étudie une fonction dans l'ordre habituel : ensemble de définition, parité, intersections avec les axes, signe de la fonction, limites aux bornes de l'ensemble de définition et asymptotes, dérivée première – variations et extremums (aussi par les dérivées d'ordre supérieur), dérivée seconde – convexité et points d'inflexion, et enfin l'ensemble image. Elle résume le tout et trace un graphique avec les points marqués.

Pour une fonction trigonométrique, l'application trouve la période, étudie la fonction sur une période et écrit les résultats avec la période (un maximum en $x = \pi/2 + 2k\pi$) ; si seule la dérivée est périodique ($x + 2 \sin x$), les extremums et la monotonie se répètent avec la période. Les valeurs absolues sont supprimées selon les signes sur les intervalles et les dérivées à gauche et à droite comparées aux points anguleux ; là où la dérivée est infinie, une tangente verticale est indiquée. Les valeurs absolues imbriquées et les sommes de valeurs absolues sont étudiées par morceaux ; là où la fonction est constante sur un intervalle, c'est indiqué avec sa valeur (un minimum en chaque point de l'intervalle).

Comment le saisir

étude $y = x^3 - 3x$

Avec le mot « étude » devant la fonction.

$x^3 - 3x$

Une fonction avec la puce « Étude de fonction ».

Exemples

Un polynôme – extremums et un point d'inflexion.

Énoncé: $x^3 - 3x$ Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Parité: impaire

Zéros: $[-\sqrt{3}; 0]$, $[0; 0]$, $[\sqrt{3}; 0]$

Croissante: $]-\infty; -1]$, $[1; \infty[$

Décroissante: $[-1; 1]$

Maximum local: $[-1; 2]$

Minimum local: $[1; -2]$

Convexe: $[0; \infty[$

Concave: $]-\infty; 0]$

Points d'inflexion: $[0; 0]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ - la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- Intersections avec l'axe des abscisses :
 $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$, soit
 $[-\sqrt{3}; 0]$, $[0; 0]$, $[\sqrt{3}; 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit
 $[0; 0]$

- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

$f(x)$	$]-\infty; -\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3}; 0[$	$]0; \sqrt{3}[$	$]\sqrt{3}; \infty[$
	-	+	-	+

La fonction est positive pour

$x \in]-\sqrt{3}; 0[\cup]\sqrt{3}; \infty[$ et négative pour

$x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]0; \sqrt{3}[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.

- Pas d'asymptote en $\pm\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

- Dérivée première : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

- Points stationnaires : $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

- Signe de la dérivée première - là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$]-\infty; -1[$	$]-1; 1[$	$]1; \infty[$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

La fonction est croissante sur $]-\infty; -1]$, $[1; \infty[$ et décroissante sur $[-1; 1]$

- En $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ - maximum local.

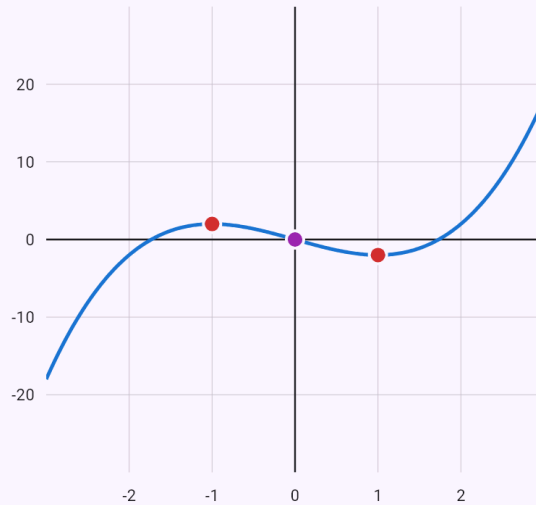
- En $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – minimum local.
- Maximum local $[-1; 2]$, minimum local $[1; -2]$
- Dérivée seconde : $f''(x) = 6x$
- Points d'inflexion possibles : $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$] -\infty; 0[$	$] 0; \infty[$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

La fonction est convexe sur $]0; \infty[$ et concave sur $] -\infty; 0[$

- En $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – la première dérivée non nulle (à partir de la troisième) est d'ordre impair : point d'inflexion.
- Points d'inflexion : $[0; 0]$
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Graphique



$$y = x^3 - 3x$$

Points remarquables :

- maximum $(-1; 2)$
- inflexion $(0; 0)$
- minimum $(1; -2)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Une fonction rationnelle – asymptotes.

Énoncé: $x^2/(x - 1)$ Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 Ensemble image: $\text{Im}(f) =]-\infty; 0] \cup [4; \infty[$
 Parité: ni paire ni impaire
 Zéros: $[0; 0]$
 Croissante: $] -\infty; 0]$, $[2; \infty[$
 Décroissante: $[0; 1[$, $] 1; 2]$
 Maximum local: $[0; 0]$
 Minimum local: $[2; 4]$
 Convexe: $]1; \infty[$
 Concave: $] -\infty; 1[$
 Asymptotes: $x = 1$, $y = x + 1$

Étapes

- Ensemble de définition – conditions $x \neq 1$:
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- L'ensemble de définition $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro – la fonction n'est ni paire ni impaire.
- Intersections avec l'axe des abscisses :
 $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, soit $[0; 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0; 0]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$] -\infty; 0[$	$] 0; 1[$	$] 1; \infty[$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

La fonction est positive pour $x \in]1; \infty[$ et négative pour $x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Asymptotes verticales (la limite y est infinie) : $x = 1$

- Asymptote en $\pm\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – la droite $y = x + 1$

- Dérivée première

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

- Points stationnaires : $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$] -\infty; 0[$	$] 0; 1[$	$] 1; 2[$	$] 2; \infty[$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

La fonction est croissante sur $]-\infty; 0]$, $[2; \infty[$ et décroissante sur $[0; 1[$, $]1; 2]$

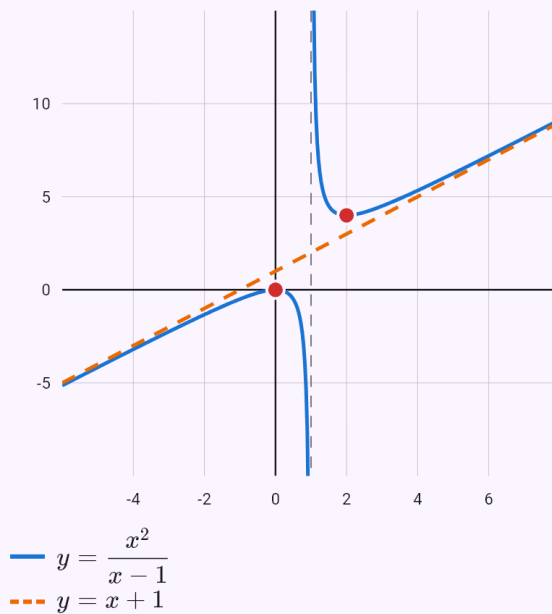
- En $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – maximum local.
- En $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – minimum local.
- Maximum local $[0; 0]$, minimum local $[2; 4]$
- Dérivée seconde : $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
- L'équation $f''(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]-\infty; 1[$	$]1; \infty[$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	∩	∪

La fonction est convexe sur $]1; \infty[$ et concave sur $]-\infty; 1[$

- La fonction n'a pas de point d'inflexion.
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\text{Im}(f) =]-\infty; 0] \cup [4; \infty[$

Graphique



Points remarquables :

- maximum (0; 0)
- minimum (2; 4)

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Fonction périodique – tout sur une période, les résultats avec la période.

Énoncé: $\sin 2x + 2\cos x$ Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\text{Im}(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Parité: ni paire ni impaire

Période: $p = 2\pi$

Zéros: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$

Croissante: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Décroissante: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Maximum local: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Minimum local: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Convexe:

$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi;$

Concave:

$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $\left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;$

Points d'inflexion:

$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$, $\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$,

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$

- La fonction est périodique de période 2π : on l'étudie sur une période (de 0 à 2π) et on répète les résultats avec la période, $k \in \mathbb{Z}$.

- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x) \neq f(x)$ ni $-f(x)$: la fonction n'est ni paire ni impaire.

- Intersections avec l'axe des abscisses :
 $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$

- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 2$, soit $[0; 2]$

- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$]0; \frac{\pi}{2}[$	$[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$	$[\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$
$f(x)$	+	-	+

La fonction est positive pour

$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ et négative pour

$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$

- Une fonction périodique (non constante) n'a pas de limite en $\pm\infty$.
- Dérivée première : $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Points stationnaires

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2}$$

- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

$f'(x)$	$ $	$0; \frac{\pi}{6}$	$]$	$\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$	$]$	$\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$	$]$	$\frac{3\pi}{2}; 2\pi$	$]$
$f(x)$	$ $	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

La fonction est croissante sur $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

- Maximum local $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$, minimum local $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

- Dérivée seconde : $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$

- Points d'inflexion possibles

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$$

- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

$f''(x)$	$ $	$0; \frac{\pi}{2}$	$]$	$\frac{\pi}{2}; \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$	$]$	$\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{3\pi}{2}$	$]$	$\frac{3\pi}{2}; 2\pi$	$]$
$f(x)$	$ $	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

La fonction est convexe sur et concave sur

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi; 2\pi\right]$$

$$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{\pi}{2}\right]$$

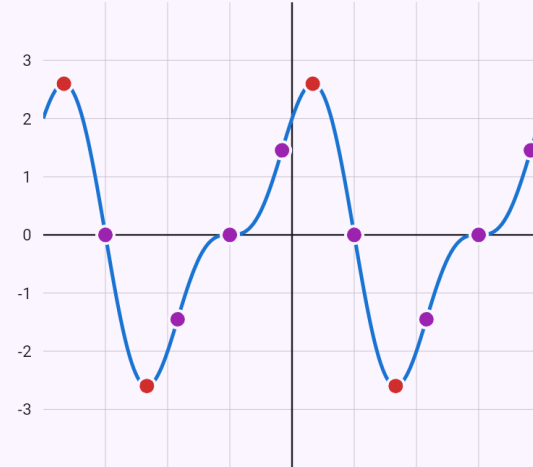
- Points d'inflexion

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right], \left[2\pi\right]$$

- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums

$$\text{et les limites : } \text{Im}(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

Graphique



$$-3\pi/2 \quad -\pi \quad -\pi/2 \quad 0 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 3\pi/2$$

$$y = \sin 2x + 2 \cos x$$

Points remarquables :

- maximum $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ • inflexion $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- minimum $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexion $\left(-\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexion $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- inflexion $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- maximum $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ • inflexion $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- minimum $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexion $\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexion $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- inflexion $\left(2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Tangente – asymptotes verticales, ensemble image $\mathbb{R}$.

Énoncé: [tg x](#) Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ensemble image: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Parité: impaire

Période: $p = \pi$

Zéros: $[k\pi; 0]$

Croissante: $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

Convexe: $\left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

Concave: $\left] \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right]$

Points d'inflexion: $[k\pi; 0]$

Asymptotes: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Étapes

- Ensemble de définition – conditions $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$
- La fonction est périodique de période π : on l'étudie sur une période (de 0 à π) et on répète les résultats avec la période, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\tan x = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).

- Intersections avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi, \text{ soit } [k\pi; 0]$$

- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0; 0]$

- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

$f(x)$	$]0; \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}; \pi[$
	+		-

La fonction est positive pour $x \in]k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ et négative pour $x \in]\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi[$

- Une fonction périodique (non constante) n'a pas de limite en $\pm\infty$.
- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

- Asymptotes verticales (la limite y est infinie) :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

- Dérivée première : $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

- L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution – il n'y a pas de point stationnaire.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

$f'(x)$	$]0; \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}; \pi[$
$f(x)$	↗		↘

La fonction est croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

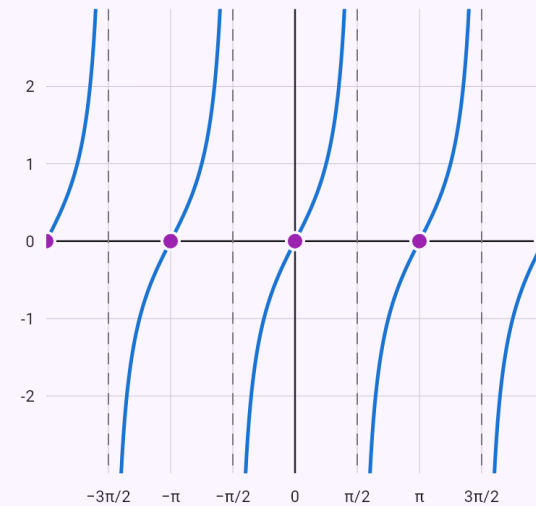
- La fonction n'a pas d'extremum local.
- Dérivée seconde : $f''(x) = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$
- Points d'inflexion possibles : $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

$f''(x)$	$]0; \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}; \pi[$
$f(x)$	∪		∩

La fonction est convexe sur $\left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ et concave sur $\left] \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right]$

- Points d'inflexion : $[k\pi; 0]$
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Graphique



$y = \tan x$

Points remarquables :

- inflexion $(-2\pi; 0)$ inflexion $(-\pi; 0)$
- inflexion $(0; 0)$ inflexion $(\pi; 0)$ inflexion $(2\pi; 0)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Tangente hyperbolique – asymptotes horizontales $y = \pm 1$.

Énoncé: $\tanh x$ Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\text{Im}(f) =]-1; 1[$

Parité: impaire

Zéros: $[0; 0]$

Croissante: $\mathbb{R}$

Convexe: $] -\infty; 0]$

Concave: $[0; \infty[$

Points d'inflexion: $[0; 0]$

Asymptotes: $y = -1$, $y = 1$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, soit $[0; 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0; 0]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$] -\infty; 0[$	$] 0; \infty[$
$f(x)$	$-$	$+$

- Points d'inflexion possibles : $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$] -\infty; 0[$	$] 0; \infty[$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

La fonction est convexe sur $] -\infty; 0]$ et concave sur $[0; \infty[$

- En $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – la première dérivée non nulle (à partir de la troisième) est d'ordre impair : point d'inflexion.
- Points d'inflexion : $[0; 0]$
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\text{Im}(f) =]-1; 1[$

La fonction est positive pour $x \in]0; \infty[$ et négative pour $x \in]-\infty; 0[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.

- Asymptote en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ – la droite $y = -1$

- Asymptote en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ – la droite $y = 1$

- Dérivée première : $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$

- L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution – il n'y a pas de point stationnaire.

- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$] -\infty; \infty[$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$

- La fonction n'a pas d'extremum local.

- Dérivée seconde : $f''(x) = -\frac{2 \tanh x}{\cosh^2 x}$

Seule la dérivée est périodique – les valeurs des extremums croissent avec k.

Énoncé: $x + 2\sin x$ Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Parité: impaire

Période: $p = 2\pi$

Zéros: $[0; 0]$

Croissante: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Décroissante: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Maximum local: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Minimum local: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Convexe: $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$

Concave: $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Points d'inflexion: $[2k\pi; 2k\pi], [\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- La fonction n'est pas périodique, mais sa dérivée l'est (période 2π) : la monotonie, les extremums et la convexité se répètent avec cette période, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).

- Intersections avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ soit } [0; 0]$$

- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0; 0]$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Dérivée première : $f'(x) = 2 \cos x + 1$

- Points stationnaires

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$]0; \frac{2\pi}{3}[$	$]\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}[$	$]\frac{4\pi}{3}; 2\pi[$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

La fonction est croissante sur

$$\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] \text{ et décroissante sur } \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

- Maximum local $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$,
minimum local $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

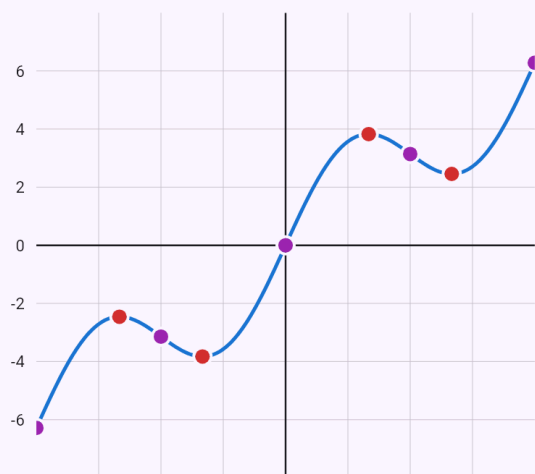
- Dérivée seconde : $f''(x) = -2 \sin x$
- Points d'inflexion possibles : $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$]0; \pi[$	$]\pi; 2\pi[$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

La fonction est convexe sur $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$ et concave sur $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$

- Points d'inflexion : $[2k\pi; 2k\pi]$, $[\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Graphique



$-3\pi/2$ $-\pi$ $-\pi/2$ 0 $\pi/2$ π $3\pi/2$

$$y = x + 2 \sin x$$

Points remarquables :

- inflexion $(-2\pi; -2\pi)$
- maximum $\left(-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- minimum $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- maximum $\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- minimum $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- inflexion $(-\pi; -\pi)$
- inflexion $(0; 0)$
- inflexion $(\pi; \pi)$
- inflexion $(2\pi; 2\pi)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Valeur absolue – points anguleux, dérivées à gauche et à droite.

Énoncé: $|x^2 - 1|$ Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\text{Im}(f) = [0; \infty[$

Parité: paire

Zéros: $[-1; 0]$, $[1; 0]$

Croissante: $[-1; 0]$, $[1; \infty[$

Décroissante: $]-\infty; -1]$, $[0; 1]$

Maximum local: $[0; 1]$

Minimum local: $[-1; 0]$, $[1; 0]$

Convexe: $]-\infty; -1]$, $[1; \infty[$

Concave: $[-1; 1]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- On supprime les valeurs absolues selon le signe de leurs arguments sur chaque intervalle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in]-\infty; -1[\\ 1 - x^2, & x \in [-1; 1[\\ x^2 - 1, & x \in [1; \infty[\end{cases}$$

- – la fonction est paire (sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

$$f(-x) = |(-x)^2 - 1| = |x^2 - 1| = f(x)$$

- Intersections avec l'axe des abscisses :
 $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$, soit $[-1; 0]$, $[1; 0]$

- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 1$, soit $[0; 1]$

- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

$$\begin{array}{c|ccccccc} f(x) &]-\infty; -1[& -1 & [-1; 1[& 1 &]1; \infty[& \\ \hline & + & & + & & + & \end{array}$$

La fonction est positive pour et négative pour $x \in \emptyset$
 $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; \infty[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Pas d'asymptote en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
- Pas d'asymptote en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

- Dérivée première

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{|x^2 - 1|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x^2 - 1|}$$

- Points stationnaires : $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- En $x = -1$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), le graphe y a un point anguleux.

- En $x = 1$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), le graphe y a un point anguleux.

- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$] -\infty ; -1[$	$] -1 ; 0[$	$] 0 ; 1[$	$] 1 ; \infty[$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

La fonction est croissante sur $[-1 ; 0]$, $[1 ; \infty[$ et décroissante sur $] -\infty ; -1]$, $[0 ; 1]$

- En $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – maximum local.
- Maximum local $[0 ; 1]$, minimum local $[-1 ; 0]$, $[1 ; 0]$
- Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)^3}{|x^2 - 1|^3} = \frac{2(x - 1)^3(x + 1)^3}{|x^2 - 1|^3}$$

- L'équation $f''(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

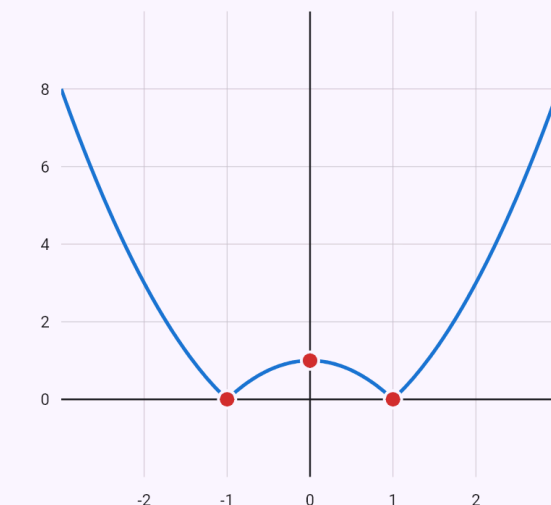
	$] -\infty ; -1[$	$] -1 ; 1[$	$] 1 ; \infty[$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	∪	∩	∪

La fonction est convexe sur $] -\infty ; -1]$, $[1 ; \infty[$ et concave sur $[-1 ; 1]$

- La fonction n'a pas de point d'inflexion.

- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\text{Im}(f) = [0 ; \infty[$

Graphique



$$y = |x^2 - 1|$$

Points remarquables :

- minimum $(-1; 0)$ ● maximum $(0; 1)$
- minimum $(1; 0)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Racine cubique – tangente verticale en zéro.

Énoncé: $x^{1/3}$ Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Parité: impaire

Zéros: $[0; 0]$

Croissante: $\mathbb{R}$

Convexe: $] -\infty; 0]$

Concave: $[0; \infty[$

Points d'inflexion: $[0; 0]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$ – la fonction est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- Intersections avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, soit $[0; 0]$
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$, soit $[0; 0]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

	$] -\infty; 0[$	$] 0; \infty[$
$f(x)$	-	+

- La fonction n'a pas d'extremum local.
- Dérivée seconde : $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- L'équation $f''(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

	$] -\infty; 0[$	$] 0; \infty[$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	∪	∩

La fonction est convexe sur $] -\infty; 0]$ et concave sur $[0; \infty[$

- Points d'inflexion : $[0; 0]$
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

La fonction est positive pour $x \in]0; \infty[$ et négative pour $x \in]-\infty; 0[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Pas d'asymptote en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, mais $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- Pas d'asymptote en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, mais $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

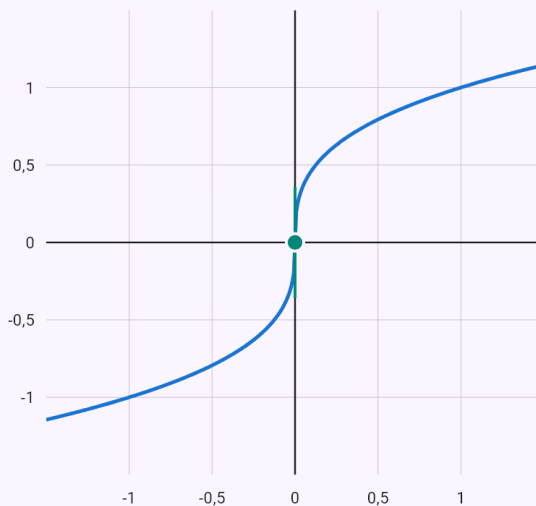
- Dérivée première : $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

- L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution – il n'y a pas de point stationnaire.
- En $x = 0$, la dérivée est infinie ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$) : le graphe y a une tangente verticale.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$] -\infty; 0[$	$] 0; \infty[$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$

Graphique



$$y = x^{1/3}$$

Points remarquables :

- inflexion (0;0) ● tangente verticale (0;0)

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Valeur absolue imbriquée – par morceaux, fonction paire.

Énoncé: $|-x^2 + 2|x| + 3|$

Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\text{Im}(f) = [0; \infty[$

Parité: paire

Zéros: $[-3; 0], [3; 0]$

Croissante: $[-3; -1], [0; 1], [3; \infty[$

Décroissante: $]-\infty; -3], [-1; 0], [1; 3]$

Maximum local: $[-1; 4], [1; 4]$

Minimum local: $[-3; 0], [0; 3], [3; 0]$

Convexe: $]-\infty; -3], [3; \infty[$

Concave: $[-3; 0], [0; 3]$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- On supprime les valeurs absolues selon le signe de leurs arguments sur chaque intervalle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in]-\infty; -3[\\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3; 0[\\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0; 3[\\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3; \infty[\end{cases}$$

- la fonction est paire (sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

$$f(-x) = | -(-x)^2 + 2|(-x)| + 3 | = |-x^2 + 2|x| + 3| :$$

- Intersections avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3, \text{ soit } [-3; 0], [3; 0]$$

- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 3$, soit $[0; 3]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors de l'ensemble de définition :

$$\begin{array}{c|ccccccc} f(x) &]-\infty; -3[& -3 &]-3; 3[& 3 &]3; \infty[\\ \hline & + & & + & & + \end{array}$$

La fonction est positive pour et négative pour $x \in \emptyset$
 $x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]3; \infty[$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.

- Pas d'asymptote en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

- Pas d'asymptote en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

- Dérivée première

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x| \cdot |-x^2 + 2|x| + 3|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x| \cdot |-x^2 + 2|x| + 3|}$$

- Points stationnaires : $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

- En $x = -3$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), le graphe y a un point anguleux.

- En $x = 0$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), le graphe y a un point anguleux.

- En $x = 3$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite diffèrent ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), le graphe y a un point anguleux.

- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

	$] -\infty ; -3[$	$] -3 ; -1[$	$] -1 ; 0[$	$] 0 ; 1[$	$] 1 ; 3[$
$f'(x)$	-	+	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

La fonction est croissante sur $[-3; -1]$, $[0; 1]$, $[3; \infty[$ et décroissante sur $] -\infty ; -3]$, $[-1; 0]$, $[1; 3]$

- En $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – maximum local.

- En $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – maximum local.

- Maximum local $[-1; 4]$, $[1; 4]$, minimum local $[-3; 0]$, $[0; 3]$, $[3; 0]$

- Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

- L'équation $f''(x) = 0$ n'a pas de solution.

- Signe de la dérivée seconde – là où elle est positive, la fonction est convexe, là où elle est négative, concave :

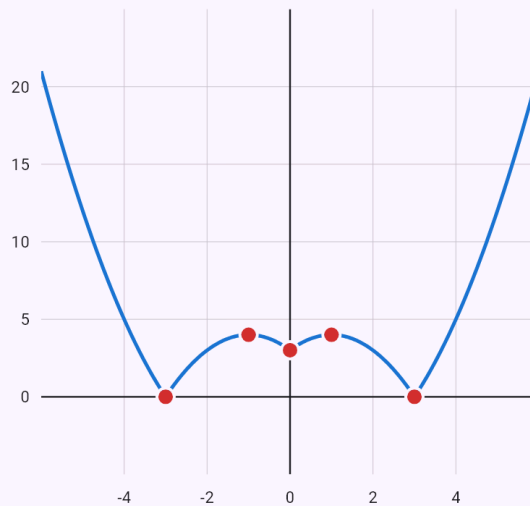
	$] -\infty ; -3[$	$] -3 ; 0[$	$] 0 ; 3[$	$] 3 ; \infty[$
$f''(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	∪	∩	∩	∪

La fonction est convexe sur $] -\infty ; -3]$, $[3; \infty[$ et concave sur $[-3; 0]$, $[0; 3]$

- La fonction n'a pas de point d'inflexion.

- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\text{Im}(f) = [0; \infty[$

Graphique



— $y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

Points remarquables :

- minimum $(-3; 0)$ ● maximum $(-1; 4)$
- minimum $(0; 3)$ ● maximum $(1; 4)$
- minimum $(3; 0)$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Somme de valeurs absolues – un morceau constant et deux asymptotes obliques.

Énoncé: $|x - 2| + |x + 3|$ Étude de fonction

Résultat

Ensemble de définition: $D_f = \mathbb{R}$

Ensemble image: $\text{Im}(f) = [5; \infty[$

Parité: ni paire ni impaire

Croissante: $[2; \infty[$

Décroissante: $] -\infty; -3]$

Constante: $[-3; 2]$

Minimum local: $f(x) = 5, x \in [-3; 2]$

Asymptotes: $y = -2x - 1, y = 2x + 1$

Étapes

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- On supprime les valeurs absolues selon le signe de leurs arguments sur chaque intervalle

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in]-\infty; -3[\\ 5, & x \in [-3; 2[\\ 2x + 1, & x \in [2; \infty[\end{cases}$$
- ni $f(x)$ ni $-f(x)$: la fonction n'est ni paire ni impaire.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x|$$
- L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution – la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 5$, soit $[0; 5]$
- Le signe de la fonction entre ses zéros et les points hors

- En $x = 2$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite différent ($f'_-(2) = 0, f'_+(2) = 2$), le graphe y a un point anguleux.
- Signe de la dérivée première – là où elle est positive, la fonction croît, là où elle est négative, elle décroît :

$f'(x)$	$]-\infty; -3[$	$[-3; 2]$	$[2; \infty[$
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$
- La fonction est croissante sur $[2; \infty[$ et décroissante sur $] -\infty; -3]$. Sur $[-3; 2]$ elle est constante ($f' = 0$).
- Minimum local $f(x) = 5, x \in [-3; 2]$, pas de maximum local.
- Dérivée seconde : $f''(x) = 0$
- La dérivée seconde est nulle – la courbe est (une partie d')une droite, ni convexe ni concave.
- Ensemble image – d'après la monotonie, les extremums et les limites : $\text{Im}(f) = [5; \infty[$

de l'ensemble de définition :

$$\frac{f(x)}{x} \left| \begin{array}{c}]-\infty; \infty[\\ + \end{array} \right.$$

La fonction est positive pour $x \in \mathbb{R}$ et négative pour $x \in \emptyset$

- Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- La fonction n'a pas d'asymptote verticale.

- Asymptote en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2,$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -1 \text{ – la droite } y = -2x - 1$$

- Asymptote en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2,$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = 1 \text{ – la droite } y = 2x + 1$$

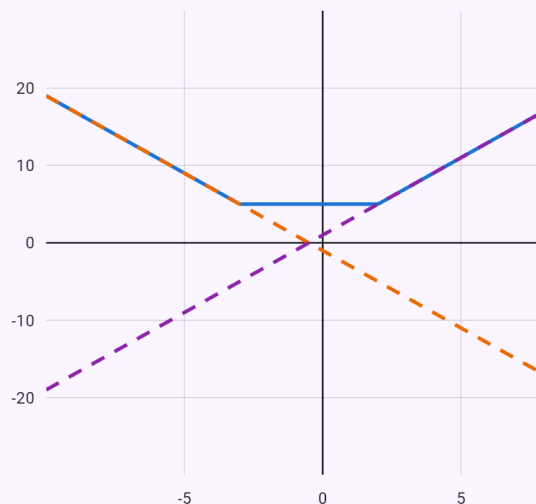
- Dérivée première

$$f'(x) = \frac{x}{|x-2|} + \frac{x}{|x+3|} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{3}{|x+3|} = \frac{x|x-2| + x|x+3| - 2|x-2| + 3|x+3|}{|x-2||x+3|}$$

- L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution – il n'y a pas de point stationnaire.

- En $x = -3$, la dérivée n'existe pas : les dérivées à gauche et à droite différent ($f'_-(-3) = -2, f'_+(-3) = 0$), le graphe y a un point anguleux.

Graphique



$$\text{— } y = |x - 2| + |x + 3|$$

$$\text{--- } y = -2x - 1$$

$$\text{--- } y = 2x + 1$$

Extremums locaux en rouge, points d'inflexion en violet, cercle vide – un point où la fonction n'est pas définie ; asymptotes en pointillés.

Limitations connues

- Une fonction dont même la dérivée n'est pas périodique ($x \cdot \sin x$) n'est étudiée que numériquement sur $\langle -2\pi ; 2\pi \rangle$, sans la période ; les fonctions trigonométriques réciproques ($\arcsin$, $\arctan$) ne sont pas encore prises en charge.

Polynôme de Taylor

L'application construit le polynôme de Taylor (en 0, celui de Maclaurin) du degré demandé : un tableau des dérivées au point, le remplacement dans la formule et le reste de Lagrange. Elle peut aussi trouver le degré elle-même – le plus petit pour lequel l'erreur en un point ou sur un intervalle ne dépasse pas une borne donnée. Le graphique montre la fonction et le polynôme ; un curseur change le degré pour voir l'approximation s'améliorer.

Comment le saisir

<code>taylor(sin x, 0, 5)</code>	La fonction, le point et le degré.
<code>maclaurin(e^x, 4)</code>	Le polynôme de Maclaurin – le point est 0.
<code>taylor(e^x, 0, erreur=0.001, x=0.5)</code>	Le degré selon l'erreur au point x (sur un intervalle, saisissez r=... au lieu de x).
<code>ln(1 + x)</code>	Une fonction avec la puce « Polynôme de Taylor » – le point, le degré ou la précision s'y indiquent.

Exemples

Un polynôme de degré 4 avec le reste.

Énoncé: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Résultat

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Étapes

- Le polynôme de Maclaurin (le polynôme de Taylor en 0) :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Les dérivées et leurs valeurs en a

$$f(x) = \ln(x+1) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \quad f^{(4)}(0) = -6$$

- On remplace par les valeurs des dérivées

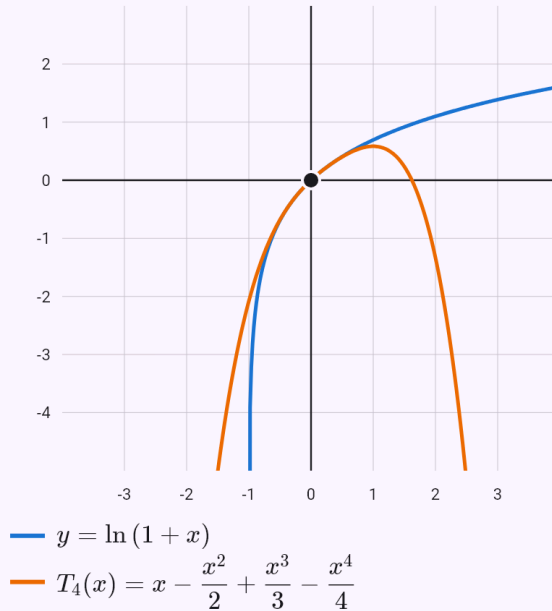
$$\begin{aligned} T_4(x) &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

- Le reste (l'erreur) sous la forme de Lagrange, ξ entre a et

$$x : R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!} x^5$$

Graphique

Degré : 4



Le point autour duquel le polynôme approche la fonction :

- (0; 0)

Le curseur au-dessus du graphe choisit le degré – plus il est élevé, mieux et plus loin du point le polynôme approche la fonction.

Le degré selon la précision demandée – une valeur approchée de $e^{0,5}$.

Énoncé: `taylor(e^x, 0, erreur=0.001, x=0.5)`

Résultat

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0,5) \approx 1,6484$$

Étapes

- Le polynôme de Maclaurin (le polynôme de Taylor en 0) :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Les dérivées et leurs valeurs en a

$$f(x) = e^x \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \quad f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \quad f^{(4)}(0) = 1$$

- On remplace par les valeurs des dérivées

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Le reste (l'erreur) sous la forme de Lagrange, ξ entre a et x :

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^\xi}{5!} x^5$$

- On cherche le plus petit degré n dont l'estimation du

reste en x ne dépasse pas l'erreur

$$M_k = \max_{t \in [0; 0,5]} |f^{(k)}(t)|, \quad h = |x - a| = 0,5$$

$$n = 1 : |R_1| \leq \frac{1,6487}{2!} \cdot 0,5^2 \approx 0,2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2 : |R_2| \leq \frac{1,6487}{3!} \cdot 0,5^3 \approx 0,0344 > 10^{-3}$$

$$n = 3 : |R_3| \leq \frac{1,6487}{4!} \cdot 0,5^4 \approx 4,3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

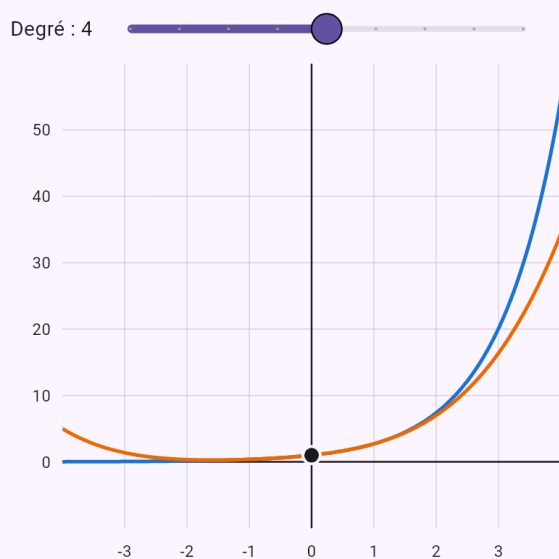
$$n = 4 : |R_4| \leq \frac{1,6487}{5!} \cdot 0,5^5 \approx 4,3 \cdot 10^{-4} \leq 10^{-3}$$

- La valeur approchée :

$$f(0,5) \approx T_4(0,5) = \frac{211}{128} \approx 1,6484$$

Graphique

Degré : 4



— $y = e^x$

— $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

Le point autour duquel le polynôme approche la fonction :

● (0; 1)

Le curseur au-dessus du graphe choisit le degré – plus il est élevé, mieux et plus loin du point le polynôme approche la fonction.

Primitives et intégrales indéfinies

L'application intègre avec les méthodes enseignées en classe et indique à chaque étape ce qu'elle fait. Elle vérifie le résultat en dérivant (la vérification est la dernière étape) et trace la fonction à intégrer et la primitive.

Les racines de puissances de la variable ($\sqrt[3]{x^4}$, $\sqrt{x^3}$) sont réécrites en puissances d'exposant rationnel ; une valeur absolue ($|\cos x|$, $\sqrt{1 - \sin^2 x}$) avec la fonction signe sgn.

Si une intégrale n'a pas de primitive élémentaire (comme e^{-x^2}), l'application le dit et l'exprime à l'aide d'une fonction spéciale (erf, Si, ...).

Comment le saisir

<code>int(x e^x, x)</code>	Une intégrale avec la variable.
<code>int(x^2 sin x)</code>	Sans la variable quand il n'y en a qu'une.
<code>∫ x^2 dx</code>	Avec le signe intégrale, aussi depuis une photo.
<code>x e^x</code>	Une fonction avec la puce « Intégrer ».

Primitives usuelles et changement de variable

L'intégrale d'une somme terme à terme, les constantes sorties de l'intégrale, les primitives du tableau (aussi avec une fonction intérieure affine) et le changement de variable quand on reconnaît une fonction composée avec la dérivée de l'intérieur.

Exemples

Terme à terme d'après le tableau.

Énoncé: $\text{int}(3x^2 - 2/x + e^x)$

Résultat

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = x^3 + e^x - 2 \ln |x|$$

Étapes

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = \int 3x^2 dx + \int e^x dx + \int -\frac{2}{x} dx$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int e^x dx = e^x$

- On sort la constante de l'intégrale :

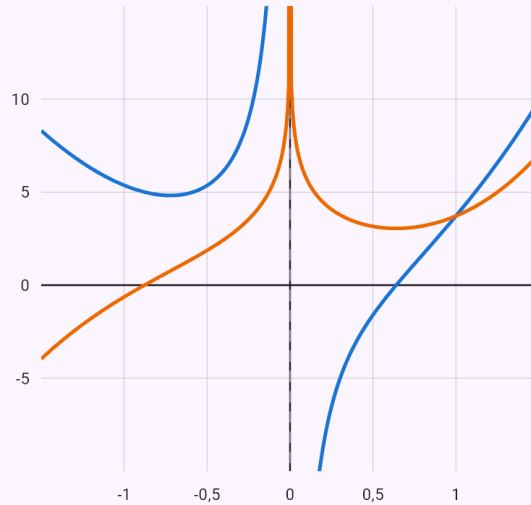
$$\int -\frac{2}{x} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

- Vérification – la dérivée du résultat redonne la fonction intégrée : $(x^3 + e^x - 2 \ln |x|)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$

Graphique



$$\begin{aligned} \text{— } f(x) &= 3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \\ \text{— } F(x) &= x^3 + e^x - 2 \ln |x| \end{aligned}$$

La fonction intégrée f et la primitive F pour $C = 0$ (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Le changement de variable $t = x^2$.

Énoncé: $\text{int}(2x \cos(x^2))$

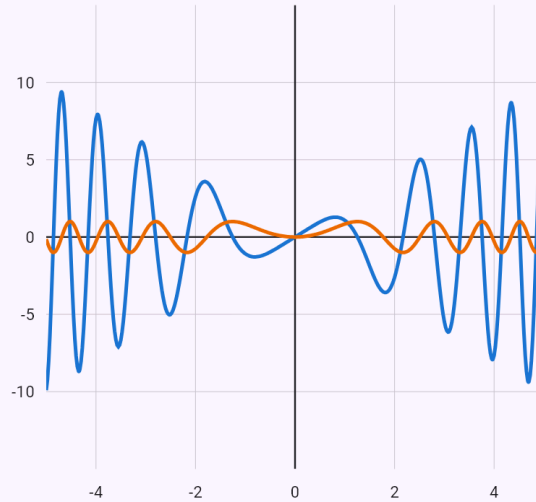
Résultat

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$

Étapes

- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int 2x \cos(x^2) dx = 2 \int x \cos(x^2) dx$$
- Changement de variable $t = x^2, dt = 2x dx$:
$$\int x \cos(x^2) dx = \int \frac{\cos t}{2} dt$$
- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int \frac{\cos t}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt$$
- D'après la table des primitives usuelles :
$$\int \cos t dt = \sin t$$
- On revient à la variable d'origine : $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin(x^2)}{2}$
- Vérification – la dérivée du résultat redonne la fonction intégrée : $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$

Graphique



— $f(x) = 2x \cos(x^2)$
— $F(x) = \sin(x^2)$

La fonction intégrée f et la primitive F pour $C = 0$ (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Intégrale avec des constantes a, b .

Énoncé: $\text{int}(1/(a - bx)^3)$

Résultat

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2} + C$$

Conditions : $b \neq 0$

Étapes

- D'après la table – la fonction intérieure est affine ($ax + b$), on divise donc le résultat par a :
$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2}$$
- Vérification – la dérivée du résultat redonne la fonction intégrée : $\left(\frac{1}{2b(bx - a)^2}\right)' = \frac{1}{(a - bx)^3}$

Intégration par parties

Le produit d'un polynôme par une exponentielle, une fonction trigonométrique ou un logarithme est intégré par parties, plusieurs fois si nécessaire ; les intégrales comme $e^x \sin x$ par parties de façon cyclique.

Exemples

Deux intégrations par parties successives.

Énoncé: $\int x^2 e^x dx$

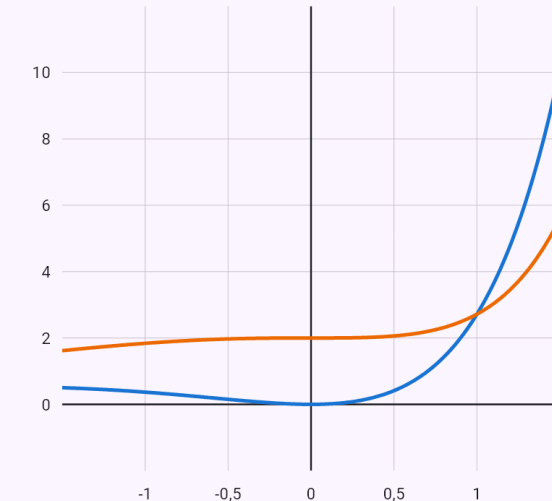
Résultat

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Étapes

- Par parties ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = e^x$, donc $u' = 2x$, $v = e^x$: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$
- On sort la constante de l'intégrale :
 $\int 2x e^x dx = 2 \int x e^x dx$
- Par parties ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = e^x$, donc $u' = 1$, $v = e^x$: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int e^x dx = e^x$
- Vérification – la dérivée du résultat redonne la fonction intégrée : $(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x)' = x^2 e^x$

Graphique



— $f(x) = x^2 e^x$
— $F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

La fonction intégrée f et la primitive F pour $C = 0$ (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Fractions rationnelles

L'application effectue si besoin la division, factorise le dénominateur et décompose la fraction en éléments simples, qu'elle intègre en logarithmes et en arctangentes.

Un dénominateur qu'on ne peut pas factoriser sur les rationnels ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$) est factorisé sur les réels – chaque paire de racines complexes conjuguées donne un facteur du second degré sans racine réelle.

Exemples

Décomposition en éléments simples.

Énoncé: $\text{int}((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))$

Résultat

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|$$

Étapes

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples :

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} \right) dx$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} \right) dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int -\frac{2}{x - 1} dx$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int \frac{3}{x - 2} dx = 3 \int \frac{1}{x - 2} dx$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{x - 2} dx = \ln |x - 2|$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int -\frac{2}{x - 1} dx = -2 \int \frac{1}{x - 1} dx$$

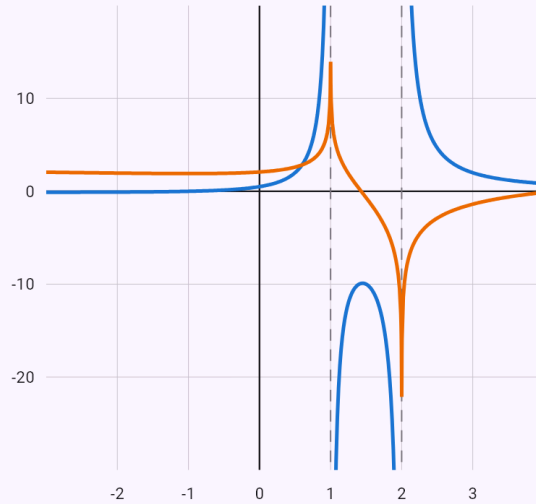
- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{x - 1} dx = \ln |x - 1|$$

- Vérification – la dérivée du résultat redonne la fonction intégrée

$$(3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|)' = \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Graphique



$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$F(x) = 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|$$

La fonction intégrée f et la primitive F pour $C = 0$ (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Factorisation du dénominateur $x^4 + 1$ sur les réels.

Énoncé: $\int \frac{1}{x^4 + 1} dx$

Résultat

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x + 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x - 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) + C$$

Étapes

- On factorise le dénominateur sur $\mathbb{R}$: ses racines complexes forment des paires conjuguées $r, \bar{r}$, et chaque paire donne un facteur du second degré $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2 \cdot \text{Re } r \cdot x + |r|^2$ sans racine réelle :
 $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx = \int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx + \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx$$

- Le dénominateur n'a pas de racines réelles : un multiple de sa dérivée isolé au numérateur donne $\ln$, le reste, après la mise sous forme canonique, donne $\arctan$

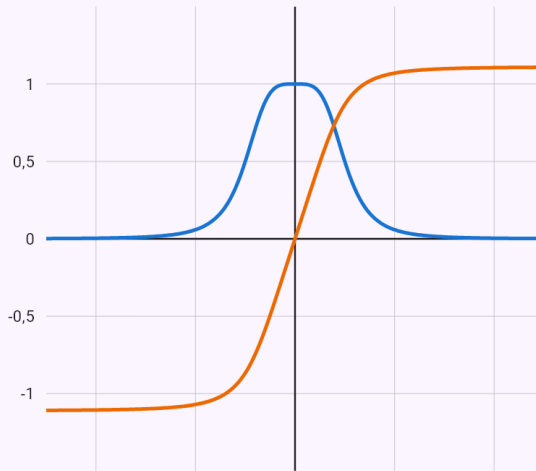
$$\int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$$

- Le dénominateur n'a pas de racines réelles : un multiple de sa dérivée isolé au numérateur donne $\ln$, le reste, après la mise sous forme canonique, donne $\arctan$
 $\int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx = -\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2 + \sqrt{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$

- Vérification - la dérivée du résultat redonne la fonction intégrée

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x + 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x - 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) \right)' = \frac{1}{x^4 + 1}$$

Graphique



— $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

— $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x + 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x - 1) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) + C$

La fonction intégrée f et la primitive F pour $C = 0$ (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Fonctions trigonométriques

D'abord les formules ($\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, produits en sommes), pour une puissance impaire le changement $t = \sin x$ ou $t = \cos x$, pour une fraction rationnelle en sinus et cosinus un changement selon la parité, et le changement $t = \tan(x/2)$ seulement en dernier recours.

Exemples

Une puissance impaire du sinus – le changement $t = \cos x$.

Énoncé: $\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$

Résultat

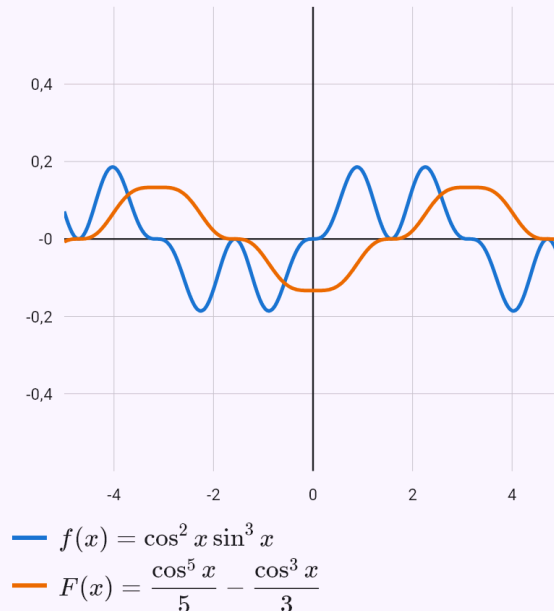
$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Étapes

- Une puissance impaire – changement de variable
 $t = \cos x, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $dt = -\sin x dx$
$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \int (t^4 - t^2) dt$$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales :
$$\int (t^4 - t^2) dt = \int t^4 dt + \int -t^2 dt$$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int t^4 dt = \frac{t^5}{5}$
- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int -t^2 dt = -\int t^2 dt$$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}$
- On revient à la variable d'origine :
$$t = \cos x : \quad \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$
- Vérification – la dérivée du résultat redonne la fonction

$$\text{intégrée : } \left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$

Graphique



La fonction intégrée f et la primitive F pour $C = 0$ (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Fonctions hyperboliques

Intégrales usuelles ($\int \sinh x dx = \cosh x + C$, $\int 1/\cosh^2 x dx = \tanh x + C$, ...), $\int \tanh x dx$ par le logarithme de la dérivée, par parties ($x \sinh x$, $\operatorname{arsinh} x$), carrés par les formules $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$, $\tanh^2 x = 1 - 1/\cosh^2 x$; le reste par la définition à l'aide d'exponentielles.

Exemples

La formule $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$.

Énoncé: `int(sinh(x)^2)`

Résultat

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Étapes

- On utilise la formule $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:

$$\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine (ax + b), on divise donc le résultat par a :

$$\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$$

- Vérification – la dérivée du résultat redonne la fonction intégrée

$$\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} = \sinh^2 x$$

Racines

Les intégrales avec la racine d'une fonction homographe par changement de variable, avec la racine d'un trinôme par un changement d'Euler, et les intégrales binômes selon les conditions de Tchebychev – si aucune n'est satisfaite, l'application dit que l'intégrale n'est pas élémentaire.

Exemples

Un changement d'Euler.

Énoncé: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Résultat

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$$

Étapes

- Substitution d'Euler (type 1) $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$
l'intégrale devient celle d'une fraction rationnelle en t

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt$$

- On sort la constante de l'intégrale

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt$$

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \int t dt + \int \frac{2}{t} dt + \int \frac{1}{t^3} dt$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int t dt = \frac{t^2}{2}$

- On sort la constante de l'intégrale : $\int \frac{2}{t} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t|$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2}$$

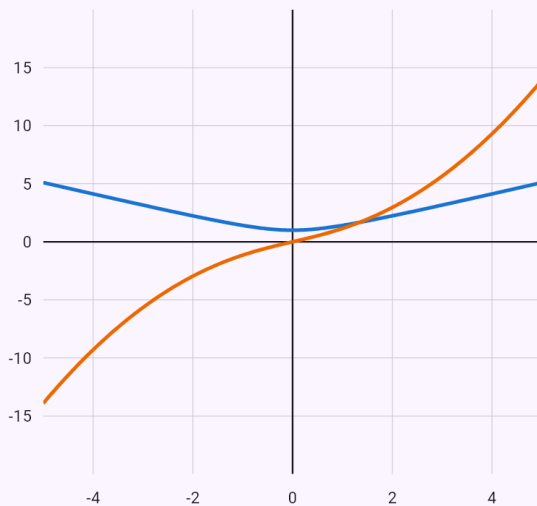
- On revient à la variable d'origine

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} : \quad \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}$$

- Vérification – la dérivée du résultat redonne la fonction intégrée

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} \right)' = \sqrt{x^2 + 1}$$

Graphique



— $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

— $F(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$

La fonction intégrée f et la primitive F pour C = 0 (une autre constante C la décale vers le haut ou le bas). Là où f est positive, F croît ; là où elle est négative, F décroît.

Limitations connues

- Pour certaines intégrales, nous trouvons le résultat sans démarche – l'application l'indique dans les étapes.
- Un calcul sans démarche qui prend trop de temps est interrompu – l'application l'indique.

Intégrales et leurs applications

L'application calcule une intégrale à l'aide d'une primitive (formule de Newton–Leibniz) et trace l'aire sous la courbe – la partie au-dessus de l'axe des x d'une autre couleur que celle en dessous. Elle traite aussi les intégrales impropres et les applications : aire, longueur d'arc, volume et aire latérale d'un solide de révolution, aussi pour les courbes paramétrées et en coordonnées polaires.

Intégrale

L'application trouve la primitive comme pour une intégrale indéfinie et substitue les bornes. Avec un changement de variable, elle change directement les bornes. Si l'intégrale n'a pas de primitive élémentaire, elle la calcule numériquement.

Comment le saisir

<code>int(x^2, x, 0, 3)</code>	Une intégrale avec la variable et les bornes.
<code>\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx</code>	Depuis une photo ou en LaTeX.
<code>x^2</code>	Une fonction avec la puce « Intégrer » – indiquez les bornes dans les champs.

Exemples

Un changement de variable avec les bornes changées.

Énoncé: $\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx$

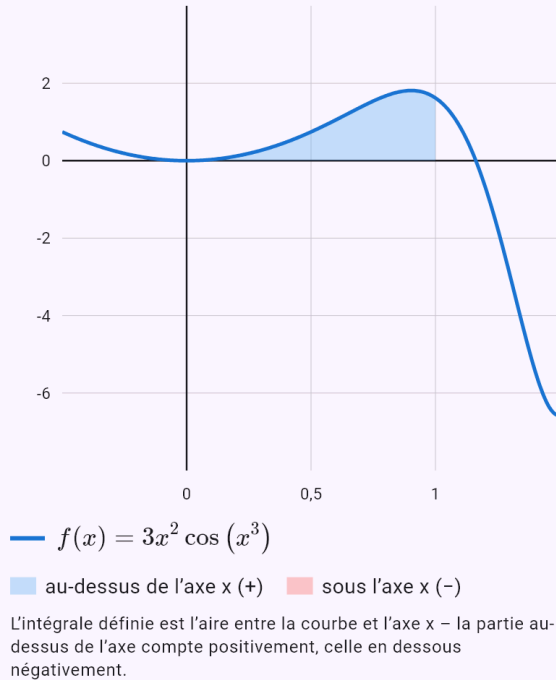
Résultat

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = \sin 1 \approx 0,8415$$

Étapes

- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int 3x^2 \cos(x^3) dx = 3 \int x^2 \cos(x^3) dx$$
- Changement de variable $t = x^3, dt = 3x^2 dx$:
$$\int x^2 \cos(x^3) dx = \int \frac{\cos t}{3} dt$$
- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int \frac{\cos t}{3} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt$$
- D'après la table des primitives usuelles :
$$\int \cos t dt = \sin t$$
- Avec le changement de variable, on recalcule aussi les bornes – inutile de revenir à la variable d'origine :
$$x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$$
- La formule de Newton–Leibniz, $F(b) - F(a)$
$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$$

Graphique



Intégrales impropres

Une borne infinie ou une fonction non bornée sont traitées par une limite de la primitive, et l'application dit si l'intégrale converge ou diverge. Si cette limite ne peut pas être calculée, elle conclut par un critère de comparaison.

Exemples

Une borne supérieure infinie.

Énoncé: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Résultat

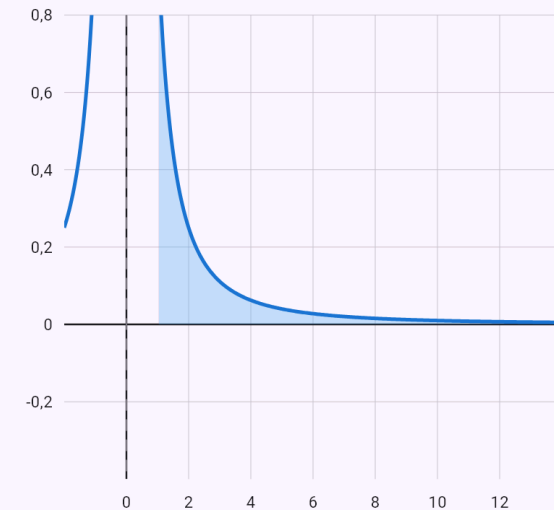
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Étapes

- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$
- Une intégrale généralisée – en une borne infinie et là où la fonction n'est pas bornée, on prend la limite de la primitive. Les limites sont finies, l'intégrale converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Graphique



— $f(x) = \frac{1}{x^2}$

■ au-dessus de l'axe x (+) ■ sous l'axe x (-)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

Une fonction non bornée à la borne inférieure.

Énoncé: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Résultat

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Étapes

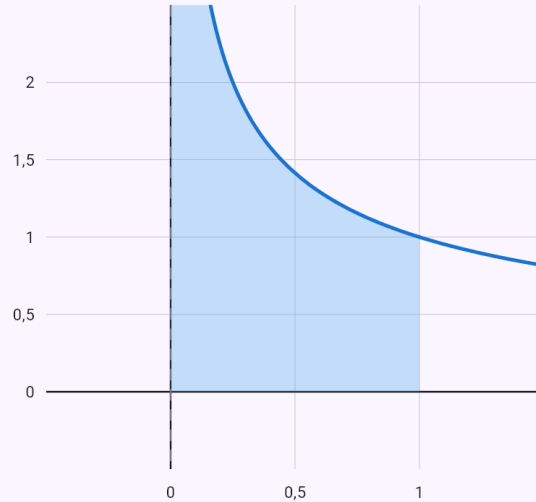
- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$$

- Une intégrale généralisée – en une borne infinie et là où la fonction n'est pas bornée, on prend la limite de la primitive. Les limites sont finies, l'intégrale converge

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Graphique



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

■ au-dessus de l'axe x (+) ■ sous l'axe x (-)

L'intégrale définie est l'aire entre la courbe et l'axe x – la partie au-dessus de l'axe compte positivement, celle en dessous négativement.

Aire sous une courbe et entre deux courbes

L'aire entre une courbe et l'axe des x, ou entre deux courbes, est calculée comme l'intégrale de la valeur absolue de la différence – les parties au-dessus et en dessous comptent toutes deux positivement. Inutile de donner les bornes : elles sont trouvées comme les points d'intersection des courbes.

Comment le saisir

`aire(x^2, x)`

L'aire entre deux courbes, bornes aux points d'intersection.

`aire(sin x, 0, pi)`

L'aire entre une courbe et l'axe des x sur un intervalle.

`x^2`

Une fonction avec la puce « Intégrer » → « Aire entre courbes » ; indiquez la seconde courbe et les bornes dans les champs.

Exemples

L'aire entre une parabole et une droite.

Énoncé: x^2 Aire entre courbes, seconde courbe x

Résultat

$$S = \frac{1}{6}$$

Étapes

- Les bornes sont les intersections des courbes :
 $x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$

- L'aire entre les courbes (les parties au-dessus et en dessous comptent positivement),

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx : S = \int_0^1 |x^2 - x| dx$$

- L'expression en valeur absolue ne change pas de signe sur l'intervalle – on enlève la valeur absolue selon lui :

$$\int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales :

$$\int (-x^2 + x) dx = \int -x^2 dx + \int x dx$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int -x^2 dx = - \int x^2 dx$$

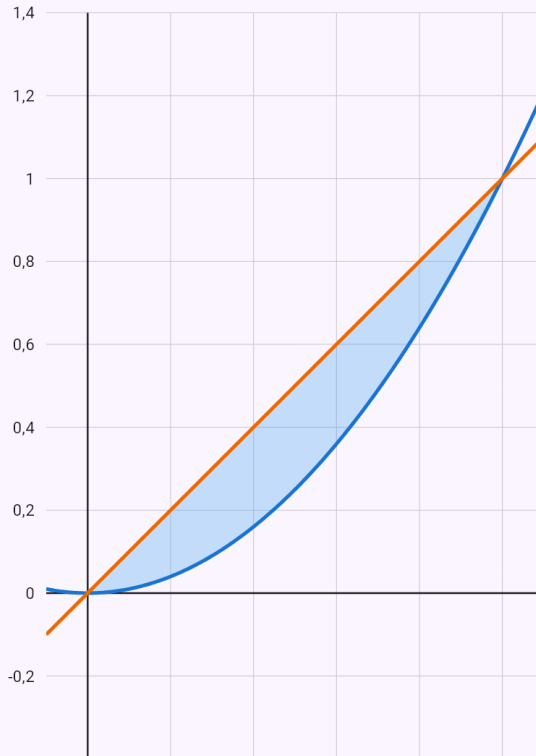
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- La formule de Newton–Leibniz, $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

Graphique



0 0,2 0,4 0,6 0,8 1

$f(x) = x^2$
 $g(x) = x$

La région colorée – son aire est le résultat (les parties au-dessus et en dessous de l'axe comptent positivement).

Longueur d'arc

La longueur d'une courbe sur un intervalle est calculée par la formule $l = \int \sqrt{1 + f'^2} dx$. L'application essaie de simplifier la racine (pour un demi-cercle, on obtient l'arc sinus) ; quand l'intégrale n'a pas de primitive élémentaire, le résultat est numérique.

Comment le saisir

longueur($x^{(3/2)}$, 0, 4)

La longueur d'arc sur un intervalle.

Exemples

La longueur d'un demi-cercle.

Énoncé: `sqrt(1 - x^2)` Longueur d'arc, bornes -1 et 1

Résultat

$$l = \pi \approx 3,1416$$

Étapes

- La longueur de la courbe

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

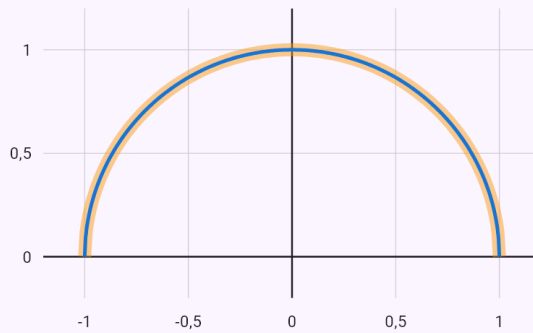
- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

- Une intégrale généralisée – en une borne infinie et là où la fonction n'est pas bornée, on prend la limite de la primitive. Les limites sont finies, l'intégrale converge

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x - \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Graphique



$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

L'arc mis en évidence – sa longueur est le résultat.

Volume d'un solide de révolution

Le volume d'un solide de révolution autour de l'axe des x est calculé par la formule $V = \pi \int f^2 dx$ (entre deux courbes, par couronnes), autour de l'axe des y par la méthode des tubes. L'application montre aussi le solide en 3D – faites-le tourner avec le doigt.

Comment le saisir

`volume(sqrt(x), 0, 4)`

Le volume du solide obtenu par rotation autour de l'axe des x.

`volume(x^2, 0, 2, y)`

Rotation autour de l'axe des y.

Exemples

Un paraboloïde de révolution.

Énoncé: `sqrt(x)` Volume d'un solide, bornes 0 et 4

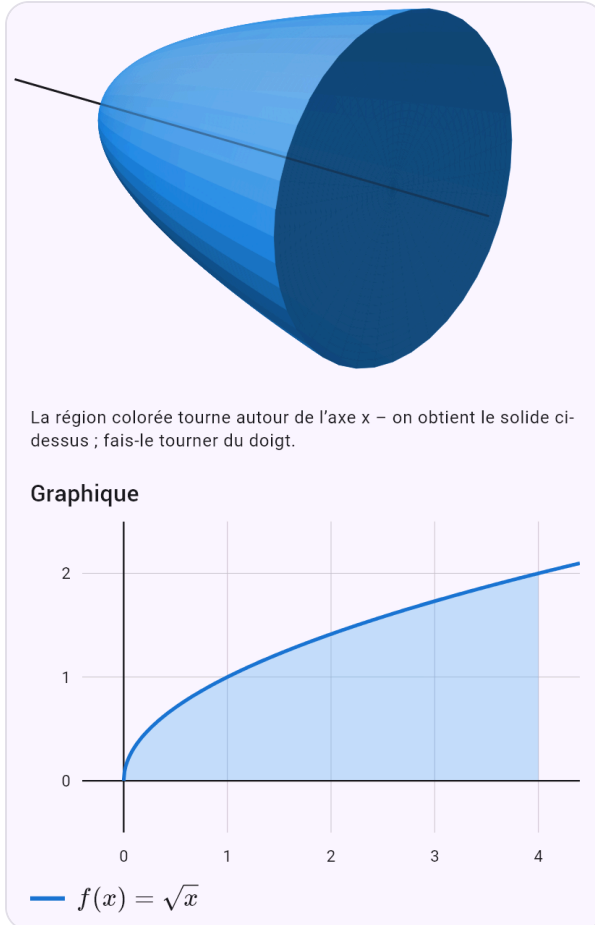
Résultat

$$V = 8\pi \approx 25,1327$$

Étapes

- Le volume du solide de révolution autour de l'axe x,
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx : V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- La formule de Newton-Leibniz, $F(b) - F(a)$:
$$\int_0^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8 - 0 = 8$$
- La valeur de l'intégrale multipliée par la constante devant : $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Solide de révolution



Aire latérale d'un solide de révolution

L'aire latérale est calculée par la formule $S = 2\pi \int f\sqrt{1 + f'^2} dx$; le produit sous la racine se simplifie souvent (pour une sphère, on obtient une constante).

Comment le saisir

`surface(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`

L'aire latérale par rotation autour de l'axe des x.

Exemples

L'aire d'une sphère de rayon 2.

Énoncé: $\sqrt{4 - x^2}$ Surface d'un solide, bornes -2 et 2

Résultat

$$S = 16\pi \approx 50,2655$$

Étapes

- L'aire latérale du solide de révolution autour de l'axe x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-2}^2 2 dx$$

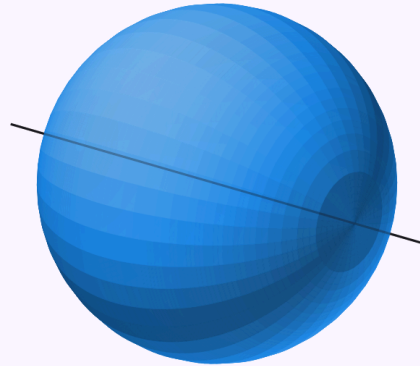
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 2 dx = 2x$

- La formule de Newton-Leibniz, $F(b) - F(a)$:

$$\int_{-2}^2 2 dx = [2x]_{-2}^2 = 4 - (-4) = 8$$

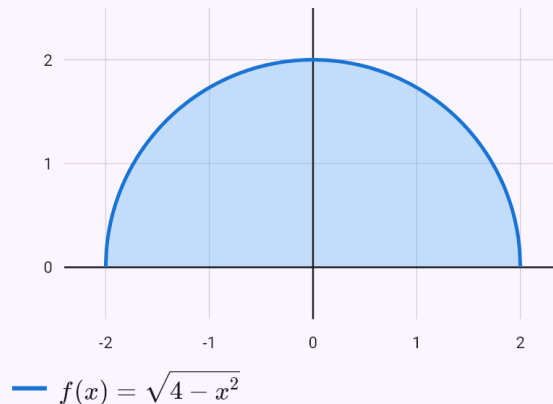
- La valeur de l'intégrale multipliée par la constante devant : $S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$

Solide de révolution



La région colorée tourne autour de l'axe x – on obtient le solide ci-dessus ; fais-le tourner du doigt.

Graphique



Courbes paramétrées et en coordonnées polaires

Écrivez une courbe $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sur deux lignes, une courbe en coordonnées polaires sous la forme $r = \rho(\varphi)$. La puce « Intégrer » propose alors l'aire, la longueur, le volume et la surface ; les bornes du paramètre sont facultatives (sans elles, de 0 à 2π). Le volume et la surface sont calculés par rotation autour de l'axe des x de la partie de la courbe située au-dessus de l'axe.

Comment le saisir

$$x = t - \sin(t)$$

$$y = 1 - \cos(t)$$

Une courbe paramétrée sur deux lignes.

$$r = 1 + \cos(\text{phi})$$

Une courbe en coordonnées polaires (aussi $r^2 = \dots$ pour une lemniscate).

longueur($x=\cos(t)^3$, $y=\sin(t)^3$, t , 0 , 2π)

La forme écrite avec le paramètre et les bornes.

Exemples

L'aire sous une arche de cycloïde.

Énoncé: $x = t - \sin(t)$

$y = 1 - \cos(t)$ Aire

Résultat

$$S = 3\pi \approx 9,4248$$

Étapes

- Les dérivées par rapport au paramètre :
 $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$
- L'aire sous une courbe paramétrée (à l'intérieur d'une courbe fermée) pour $t \in [0; 2\pi]$, $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \right|$
 $: S = \left| \int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt \right|$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales
 $\int (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \int 1 dt + \int -2 \cos t dt -$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 1 dt = t$
- On sort la constante de l'intégrale :
 $\int -2 \cos t dt = -2 \int \cos t dt$
- D'après la table des primitives usuelles :
 $\int \cos t dt = \sin t$
- On utilise la formule $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:
 $\int \cos^2 t dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2}$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt$$

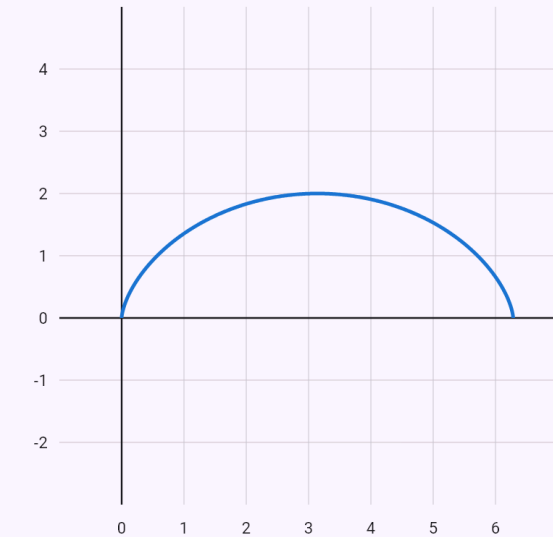
- D'après la table – la fonction intérieure est affine ($ax + b$), on divise donc le résultat par a :

$$\int \cos(2t) dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$

- La formule de Newton-Leibniz, $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{\sin(2t)}{4} \right]$$

Graphique



— $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$

La courbe donnée paramétriquement (ou en coordonnées polaires), tracée pour les bornes choisies du paramètre.

La longueur d'une cardioïde.

Énoncé: $r = 1 + \cos(\phi)$ Longueur d'arc

Résultat

$$l = 8$$

Étapes

- Les dérivées par rapport au paramètre : $\rho'(\varphi) = -\sin \varphi$

- La longueur d'une courbe en coordonnées polaires pour

$$\varphi \in [0; 2\pi], l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi$$

- On découpe l'intervalle aux zéros des expressions en valeur absolue (π) et on enlève la valeur absolue sur chaque partie selon le signe

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- On sort la constante de l'intégrale

$$\int 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine ($ax + b$), on divise donc le résultat par a :

$$\int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

- La formule de Newton–Leibniz, $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{\pi} 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$

- On sort la constante de l'intégrale

$$\int -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = -2 \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine ($ax + b$), on divise donc le résultat par a :

$$\int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

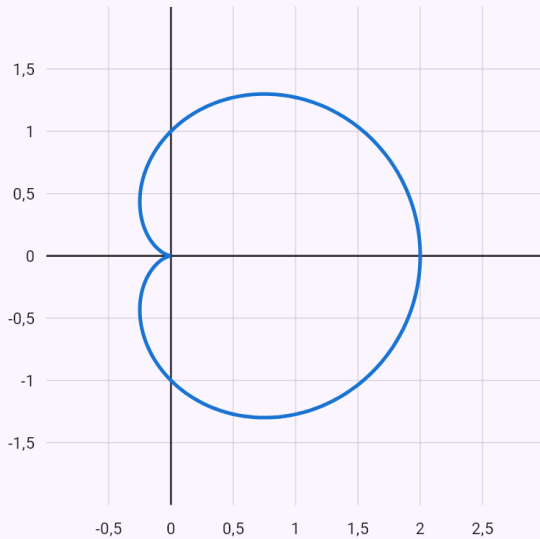
- La formule de Newton–Leibniz, $F(b) - F(a)$

$$\int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[-4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) = 4$$

- On additionne les valeurs des parties :

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$

Graphique



— $r = \cos \varphi + 1$

La courbe donnée paramétriquement (ou en coordonnées polaires), tracée pour les bornes choisies du paramètre.

Courbes données par une équation

Pour une équation en x et y ($x^3 + y^3 = 3xy$), la puce « Intégrer » propose l'aire, la longueur, le volume et la surface. Sans bornes, elle prend toute la courbe fermée : le cercle et l'ellipse sous forme paramétrique par $\cos$ et $\sin$, une boucle passant par l'origine (le folium de Descartes) par les droites $y = tx$ – l'aire de la boucle alors exactement par les secteurs, la longueur, le volume et la surface numériquement. Avec des bornes en x , elle utilise la branche supérieure $y = f(x)$.

Comment le saisir

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Une courbe fermée – la puce « Intégrer » sans bornes.

$$y^2 = x^3$$

Une courbe non fermée – la puce « Intégrer » avec des bornes en x (la branche supérieure $y = x^{3/2}$).

Exemples

L'aire de la boucle du folium – par les droites $y = tx$ et les secteurs, $S = 3/2$.

Énoncé: $x^3 + y^3 = 3xy$ [Intégrer → Aire](#)

Résultat

$$S = \frac{3}{2}$$

Étapes

- La boucle passant par l'origine sous forme paramétrique par les droites $y = tx$ – on remplace dans l'équation et on isole x

$$y = tx \Rightarrow x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}, \quad t \in (0; \infty)$$

- L'aire de la boucle par les secteurs depuis l'origine : $S = \frac{1}{2} \int (x \cdot y' - y \cdot x') dt$, et sur la droite $y = tx$, $x \cdot y' - y \cdot x' = x^2$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt$$

- On sort la constante de l'intégrale

$$\int \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \frac{9}{2} \int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt$$

- Changement de variable $u = t^3 + 1$, $du = 3t^2 dt$:

$$\int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt = \int \frac{1}{3u^2} du$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int \frac{1}{3u^2} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2} du$$

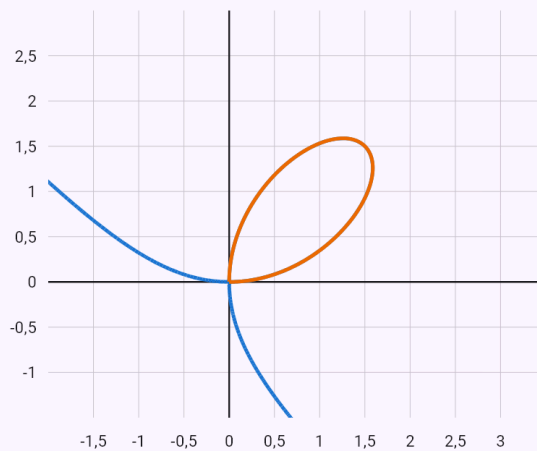
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}$

- On revient à la variable d'origine : $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3(t^3 + 1)}$

- Une intégrale généralisée – en une borne infinie et là où la fonction n'est pas bornée, on prend la limite de la primitive. Les limites sont finies, l'intégrale converge

$$\int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2(t^3 + 1)} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

Graphique



— $x^3 + y^3 = 3xy$

— $x = \frac{3t}{t^3 + 1}, y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$

Toute la courbe donnée par l'équation ; la partie utilisée pour le calcul est mise en évidence.

Limitations connues

- La longueur d'arc de $y = \sqrt[3]{x}$ (et de courbes semblables) n'est calculée que numériquement – elle conduit à une intégrale elliptique, qui n'a pas de primitive élémentaire.
- Pour les courbes paramétrées et polaires, l'aire coloriée et le solide en 3D manquent encore ; rotation seulement autour de l'axe des x .
- Rotation autour de l'axe des y seulement pour une région d'un seul côté de l'axe.
- Pour les courbes implicites sans bornes, seuls le cercle, l'ellipse et une boucle passant par l'origine sont pris en charge ; rotation seulement autour de l'axe des x .

Séries

Pour une série numérique, l'application vérifie d'abord la condition nécessaire de convergence (terme général tendant vers 0), puis choisit un critère selon la forme de la série – série géométrique, $\sum 1/n^p$, règle de d'Alembert, de Cauchy, comparaison par équivalents, comparaison à une intégrale ou critère des séries alternées ; pour une série alternée, elle distingue convergence absolue et semi-convergence. Quand c'est possible, elle calcule la somme. Le graphique montre les termes et les sommes partielles.

Séries numériques

L'application trouve la somme des séries géométriques et télescopiques, des séries $\sum P(n)q^n$ et des séries connues ($\sum 1/n^2 = \pi^2/6$) ; sinon elle la calcule numériquement. Une somme finie se calcule comme à l'école – télescopique, arithmétique, géométrique, sinon terme à terme. Une équation avec la somme d'une série géométrique est aussi résolue, avec la condition de convergence $|q| < 1$ vérifiée.

Comment le saisir

<code>somme(1/n^2)</code>	Le terme général ; l'indice n à partir de 1 (aussi sum).
<code>somme(1/n^2, n, 1, oo)</code>	Avec l'indice et la valeur de départ.
<code>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}</code>	Depuis une photo ou en LaTeX.
<code>1/n^2</code>	Le terme général avec la puce « Série » – indiquez l'indice de départ dans le champ.
<code>somme(2k+1, k, 1, 100)</code>	Une somme finie – avec l'indice, la borne inférieure et la borne supérieure.

Exemples

La série $\sum 1/n^2$ – converge, la somme vaut $\pi^2/6$.

Énoncé: `sum(1/n^2)`

Résultat

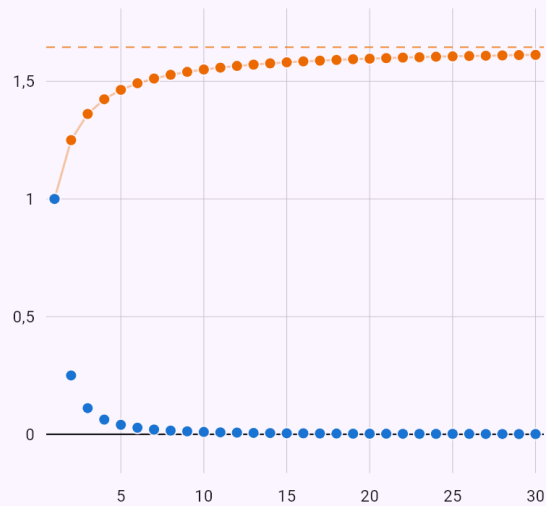
La série converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$$

Étapes

- La condition nécessaire de convergence est vérifiée (elle ne décide pas à elle seule) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est de Riemann $\sum 1/n^p$ avec $p = 2 > 1$ – elle converge.
- La somme d'une série connue : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Graphique



● termes a_n ● sommes partielles s_n — la somme

Les points sont les termes a_n et les sommes partielles $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Si la série converge, les termes tendent vers zéro et les sommes partielles vers sa somme.

Le critère des séries alternées – semi-convergente.

Énoncé: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Résultat

La série converge, mais pas absolument.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0,6931$$

Étapes

- La condition nécessaire de convergence est vérifiée (elle ne décide pas à elle seule) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

- Les termes sont de signes différents – d'abord la convergence absolue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- La série harmonique diverge – les termes regroupés par puissances de deux, chaque groupe au moins $1/2$

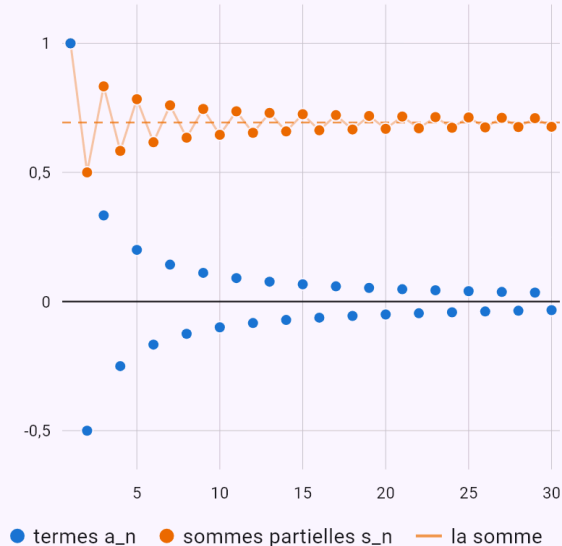
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Critère de Leibniz : $|a_n| = \frac{1}{n}$ décroît et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ – la série converge.

- Conclusion : la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, mais pas absolument (d'après le critère de Leibniz).

- La somme d'une série connue : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Graphique



Les points sont les termes a_n et les sommes partielles $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Si la série converge, les termes tendent vers zéro et les sommes partielles vers sa somme.

La règle de d'Alembert et la somme.

Énoncé: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Résultat

La série converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Étapes

- La condition nécessaire de convergence est vérifiée (elle ne décide pas à elle seule) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$

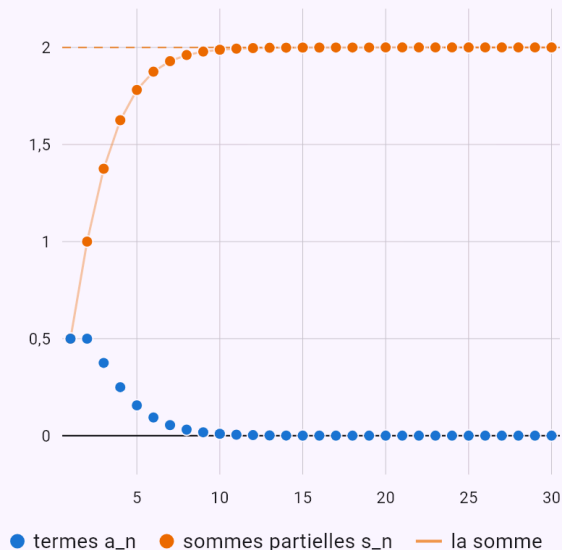
- Règle de d'Alembert – la série converge.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

- Une série $\sum P(n) \cdot q^n$ sommée en dérivant la série

$$\text{géométrique : } \sum_{n=0}^{\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$$

Graphique



Les points sont les termes a_n et les sommes partielles $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Si la série converge, les termes tendent vers zéro et les sommes partielles vers sa somme.

La condition nécessaire n'est pas remplie – la série diverge.

Énoncé: $\text{sum}(n/(n+1))$

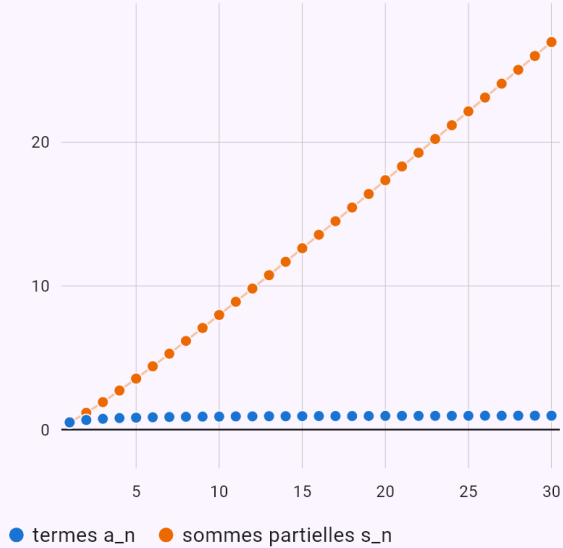
Résultat

La série diverge.

Étapes

- La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Graphique



Les points sont les termes a_n et les sommes partielles $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Si la série converge, les termes tendent vers zéro et les sommes partielles vers sa somme.

Somme télescopique – il reste le premier et le dernier terme.

Énoncé: $\text{sum}(\text{sqrt}(2i+1) - \text{sqrt}(2i-1), i, 1, 60)$

Résultat

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 10$$

Étapes

- Somme télescopique – les termes voisins s'annulent, il ne reste que le premier et le dernier :

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 11 - 1 = 10$$

Équation avec la somme d'une série géométrique.

Énoncé: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = 1$

Résultat

$$x = -1$$

Étapes

- La série est géométrique de raison $q = 2^x$ et converge pour $|2^x| < 1$; sa somme : $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- On résout : $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ satisfait la condition de convergence : $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$

Séries entières

Pour une série entière, l'application trouve le rayon de convergence par la règle de d'Alembert, étudie les bornes comme des séries numériques et donne le domaine de convergence ; quand c'est possible, aussi la somme. Le graphique montre les sommes partielles avec un curseur pour le nombre de termes.

Exemples

Le domaine de convergence $[-1 ; 1[$.

Énoncé: `sum(x^n/n)`

Résultat

$$x \in [-1 ; 1[$$

Étapes

- Le rayon de convergence $R = 1$ par la règle de d'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1$$

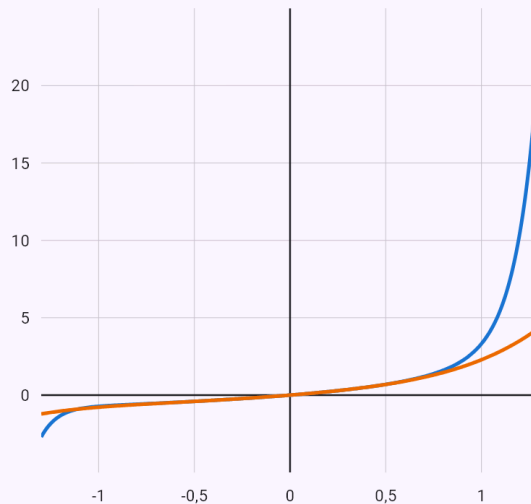
- La borne $x = -1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais pas absolument (d'après le critère de Leibniz).

- La borne $x = 1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge d'après le regroupement des termes de la série harmonique.

- Le domaine de convergence : $x \in [-1 ; 1[$

Graphique

Termes : 5



$$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Choisis le nombre de termes avec le curseur – les sommes partielles ne s'approchent de la somme qu'à l'intérieur du domaine de convergence.

Série de Taylor

L'application obtient la série de Taylor d'une fonction à partir de développements connus (e^x , $\sin x$, $\ln(1+x)$, ...) par substitution et en détermine le domaine de convergence.

Comment le saisir

`taylor(e^x, 0, oo)`

La fonction, le point et oo au lieu du degré ; ou la puce « Polynôme de Taylor » → « Série ».

Exemples

La série de $\ln(1+x)$ et son domaine de convergence.

Énoncé: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Résultat

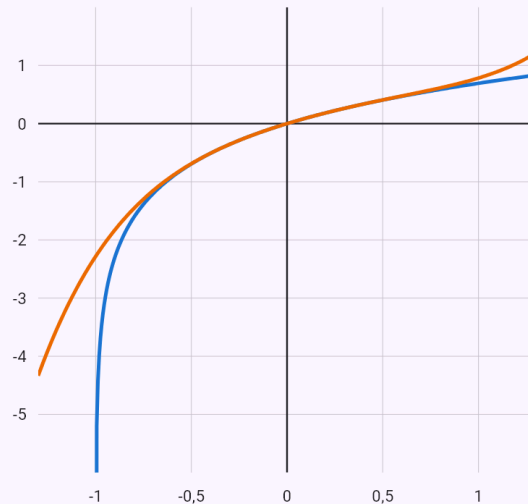
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in]-1;$$

Étapes

- Du développement connu $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$
avec $u = x$: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- Le rayon de convergence $R = 1$ par la règle de d'Alembert
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{xn}{n+1} \right| = |x| < 1$$
- La borne $x = -1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverge d'après le regroupement des termes de la série harmonique.
- La borne $x = 1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, mais pas absolument (d'après le critère de Leibniz).
- Le domaine de convergence : $x \in]-1; 1]$

Graphique

Termes : 5



— $s(x) = \ln(x+1)$

— $s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

Choisis le nombre de termes avec le curseur – les sommes partielles ne s'approchent de la somme qu'à l'intérieur du domaine de convergence.

Séries de Fourier

L'application construit la série de Fourier d'une fonction sur un intervalle pris comme une période (sans indication, sur $[-\pi ; \pi]$), ou la série en sinus ou en cosinus d'une fonction sur $[0 ; L]$. La fonction peut aussi être définie par morceaux.

Elle calcule les coefficients par des intégrales avec toute la démarche (intégration par parties avec le paramètre n), remplace $\sin n\pi = 0$ et $\cos n\pi = (-1)^n$ et exploite la symétrie des fonctions paires et impaires. Aux points de discontinuité, elle détermine la somme de la série par le théorème de Dirichlet et, en remplaçant un point et avec l'égalité de Parseval, elle en déduit des sommes de séries numériques (comme $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$). Le graphique montre le prolongement périodique de la fonction et les sommes partielles avec un curseur.

Comment le saisir

<code>fourier(x^2, -pi, pi)</code>	La fonction et l'intervalle.
<code>fouriersin(x, 0, pi)</code>	La série en sinus (fouriercos – en cosinus).
<code>-1, -pi < x < 0</code> <code>1, 0 < x < pi</code>	Une fonction par morceaux, ligne par ligne, avec la puce « Série de Fourier ».
<code>x^2</code>	Une fonction avec la puce « Série de Fourier » – le type de série et l'intervalle s'y choisissent.

Exemples

Une fonction paire – uniquement des cosinus ; les sommes $\Sigma 1/n^2$ et $\Sigma 1/n^4$.

Énoncé: `fourier(x^2)`

Résultat

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad ;$$

Étapes

- L'intervalle $[-\pi; \pi]$ est une période : $T = 2\pi$, la demi-période $l = \pi$. On cherche la série de coefficients

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- La fonction est paire, $f(-x) = x^2 = f(x)$, donc les coefficients des sinus sont nuls et il suffit de calculer les autres sur la moitié de l'intervalle

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

- Le coefficient a_0 : $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$
- On substitue les bornes : $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
- Le coefficient a_n : $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$
- Par parties ($f(u \cdot v) = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = \cos(nx)$, donc $u' = 2x$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$
$$\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx$$
- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx) dx$$
- Par parties ($f(u \cdot v) = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = \sin(nx)$, donc $u' = 1$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$
$$\int x \sin(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n} dx$$
- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int -\frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx) dx$$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine (ax +

b), on divise donc le résultat par a :

$$\int \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Pour n entier, $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$
- On substitue les bornes

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_0^\pi = \frac{4}{n^3}$$

- On substitue les coefficients dans la série

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- Le prolongement périodique de la fonction est continu, donc d'après le théorème de Dirichlet la somme de la série vaut f(x) pour $x \in [-\pi; \pi]$

- En substituant $x = 0$, on obtient la somme d'une série numérique

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- En substituant $x = \pi$, on obtient la somme d'une série numérique

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

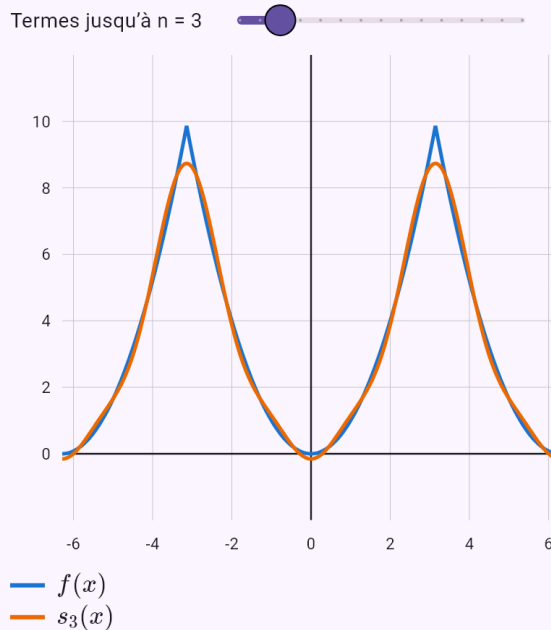
- De l'égalité de Parseval on obtient

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Graphique

Termes jusqu'à n = 3



La fonction est prolongée périodiquement. Le curseur ajoute des termes de la série – les sommes partielles s'approchent de la fonction ; à un saut elles dépassent (phénomène de Gibbs) et passent par la moyenne des deux côtés, marquée d'un point.

Une fonction par morceaux – sauts et phénomène de Gibbs.

Énoncé: $-1, -\pi < x < 0$

Résultat

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

Étapes

- L'intervalle $[-\pi; \pi]$ est une période : $T = 2\pi$, la demi-période $l = \pi$. On cherche la série de coefficients

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- La fonction est impaire, $f(-x) = -f(x)$, donc le terme constant et les coefficients des cosinus sont nuls et il suffit de calculer ceux des sinus sur la moitié de l'intervalle

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Le coefficient $b_n : b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine ($ax + b$), on divise donc le résultat par a :

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Pour n entier, $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

- On substitue les bornes

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi}$$

- On substitue les coefficients dans la série :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi} \sin(nx)$$

- Les termes de rang n pair sont nuls – il ne reste que les n impairs, $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

- D'après le théorème de Dirichlet, la somme de la série vaut $f(x)$ pour $x \in]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$; en un point de discontinuité, c'est la moyenne des limites à gauche et à droite

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

- En substituant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la somme d'une série numérique

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

• De l'égalité de Parseval on obtient

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Graphique

Termes jusqu'à n = 5



-6 -4 -2 0 2 4 6

— $f(x)$
— $s_5(x)$

La fonction est prolongée périodiquement. Le curseur ajoute des termes de la série – les sommes partielles s'approchent de la fonction ; à un saut elles dépassent (phénomène de Gibbs) et passent par la moyenne des deux côtés, marquée d'un point.

Une série en sinus et la somme $1 - 1/3^3 + 1/5^3 - \dots = \pi^3/32$.

Énoncé: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Résultat

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

Étapes

- On prolonge la fonction de $[0; \pi]$ en une fonction impaire, puis périodiquement ($T = 2\pi$) – on obtient la série en sinus $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, où

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Le coefficient b_n : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx$
- Par parties ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x(\pi - x)$, $v' = \sin(nx)$, donc $u' = \pi - 2x$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$\int x(\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{x(x - \pi) \cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx$$

- On sort la constante de l'intégrale

$$\int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx = \frac{1}{n} \int (2x - \pi) \cos(nx) dx$$

- Par parties ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = 2x - \pi$, $v' = \cos(nx)$, donc $u' = 2$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$

- En substituant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la somme d'une série numérique

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

- De l'égalité de Parseval $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, on obtient

$$\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\int (2x - \pi) \cos(nx) dx = \frac{(2x - \pi) \sin(nx)}{n} - \int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int \sin(nx) dx$$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine ($ax + b$), on divise donc le résultat par a :

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Pour n entier, $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

- On substitue les bornes

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \cos(nx)}{n} - \frac{\pi x \cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x) \sin(nx)}{n^2} \right]$$

- On substitue les coefficients dans la série :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \sin(nx)$$

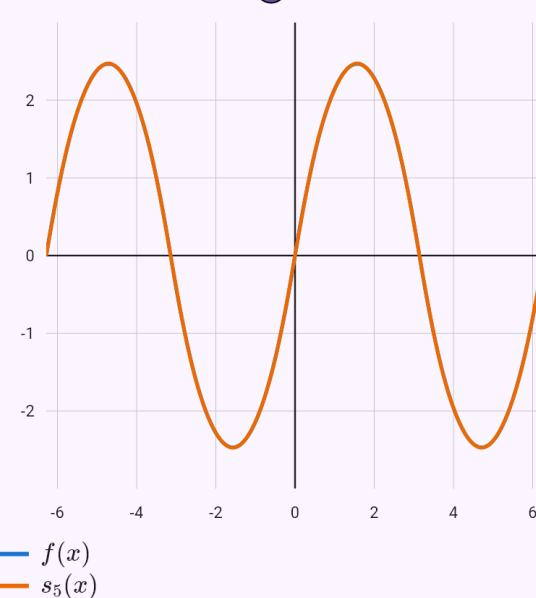
- Les termes de rang n pair sont nuls – il ne reste que les n impairs, $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

- Le prolongement périodique de la fonction est continu, donc d'après le théorème de Dirichlet la somme de la série vaut $f(x)$ pour $x \in [0; \pi]$

Graphique

Termes jusqu'à $n = 5$



Limitations connues

- Une fonction non bornée (comme $\ln x$ sur $[0 ; 2\pi]$) ne peut pas être développée – la série divergerait au point où la fonction tend vers l'infini.
- Quand les coefficients conduisent à une intégrale sans primitive élémentaire ($\ln x$ sur $[1 ; 3]$), ils sont exprimés avec le sinus et le cosinus intégraux.

Équations différentielles

L'application résout les équations différentielles ordinaires du premier ordre : à variables séparables, linéaires, exactes, homogènes ($y' = f(y/x)$), de Bernoulli et les équations $y' = f(ax + by + c)$. Elle reconnaît le type elle-même et montre la démarche comme à l'école – séparation des variables, variation de la constante ou facteur intégrant, substitution, potentiel d'une équation exacte. Les intégrales de la démarche ont leurs propres étapes.

Ordres supérieurs : équations linéaires à coefficients constants de tout ordre par l'équation caractéristique (racines multiples et complexes aussi), une solution particulière selon le second membre particulier (résonance et somme de seconds membres aussi) ou par variation des constantes, un problème de Cauchy en zéro aussi par la transformée de Laplace (puce « Méthode »). En outre l'équation d'Euler par $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ par intégrations successives et l'abaissement de l'ordre – quand y manque ($p = y'$) ou x ($y' = p(y)$).

L'équation $y' = y \cdot (a(x) \cdot \ln y + b(x))$ devient linéaire par la substitution $z = \ln y$. Une équation linéaire du second ordre à coefficients variables est résolue quand on peut deviner une solution (x^k , e^{ax} , ...) : la seconde par réduction de l'ordre (d'Alembert), le second membre par variation des constantes. L'ordre est aussi réduit de plus d'un ($p = y^{(m)}$ avec une équation du second ordre en p). Avec des paramètres, les cas sont distingués : un oscillateur amorti selon le signe de $\delta^2 - \omega^2$ (régime apériodique, critique, pseudo-périodique), une résonance ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ pour $\omega = 2$) et le signe d'une constante dont dépend l'intégrale ($y'' = 2yy'$). La transformée de Laplace résout aussi un problème de Cauchy en un point autre que 0 (décalage $\tau = t - t_0$) et avec des paramètres.

Le résultat est la solution générale avec une constante C , aux ordres supérieurs avec des constantes C_1 , C_2 , ... (explicite, ou implicite quand elle ne peut l'être) ; avec des conditions, la solution qui les vérifie – initiales et aux limites, y compris les cas « aucune solution » et « une infinité de solutions ». Les solutions constantes perdues en divisant sont retrouvées. Chaque solution est vérifiée en la substituant dans l'équation. Au premier ordre le graphique montre le champ de directions et des solutions pour différents C , aux ordres supérieurs des solutions pour différentes constantes ; pour une équation autonome du second ordre (sans x), un sélecteur montre aussi le plan de phase (y, y').

Comment le saisir

$$y' = x*y$$

La dérivée avec un prime.

$$dy/dx = x \ y^2$$

Notation de Leibniz – elle indique aussi la variable (dm/dt , dT/dt).

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$	Notation issue d'une photo.
$(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$	La forme $M dx + N dy = 0$ (équation exacte).
$y' = y^2 + 1, y(0) = 1$	Une condition initiale après une virgule ou à la ligne suivante.
$dm/dt = m + 2, m(0) = 0$	La fonction et la variable peuvent être n'importe quelles lettres.
$y'' - 3y' + 2y = 3e^{(2x)}$	Une équation d'ordre supérieur – les dérivées avec plusieurs primes.
$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$	Les dérivées supérieures comme $y^{(4)}$ (aussi depuis une photo).
$y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$	Conditions initiales $y(0), y'(0)$ – ou aux limites en des points différents.
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	Les points de Newton (dérivées par rapport au temps t) et des paramètres grecs.

Exemples

Variables séparables – la solution générale et le champ de directions.

Énoncé: $y' = x \cdot y$

Résultat

$$y = C e^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation à variables séparables – le membre de droite est le produit d'une fonction de la variable et d'une fonction de l'inconnue : $y' = xy$

- Séparation des variables (division en supposant $y \neq 0$) :
$$\frac{dy}{y} = x dx$$

- Intégration des deux membres :
$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx$$

- D'après la table des primitives usuelles :
$$\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

- D'après la table des primitives usuelles :
$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

- La solution générale sous forme implicite :

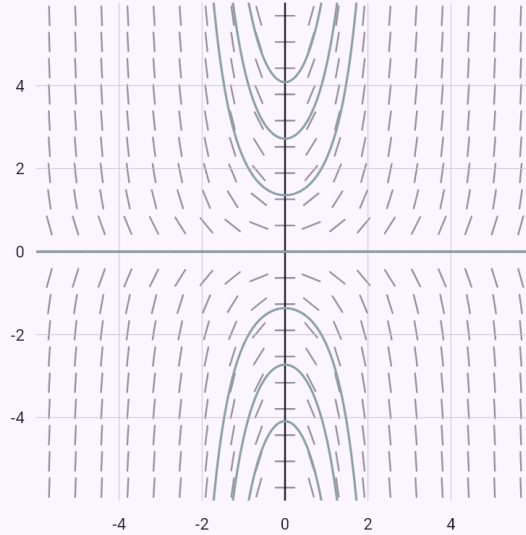
$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$$

- On passe à l'exponentielle – la constante $\pm e^C$ est de nouveau notée C : $y = C e^{\frac{x^2}{2}}$

- La solution constante $y = 0$, exclue par la division, est contenue dans la solution générale pour $C = 0$

- Vérification – la dérivée de la solution $y' = C x e^{\frac{x^2}{2}}$ substituée dans l'équation donne une égalité.

Graphique



— solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

La condition initiale détermine la constante C.

Énoncé: $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$

Résultat

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Étapes

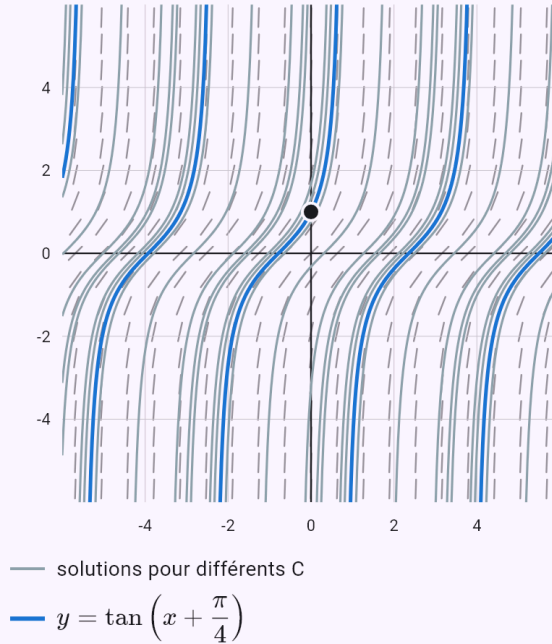
- Une équation à variables séparables – le membre de droite est le produit d'une fonction de la variable et d'une fonction de l'inconnue : $y' = y^2 + 1$
- Séparation des variables (division en supposant $y^2 + 1 \neq 0$) : $\frac{dy}{y^2 + 1} = dx$
- Intégration des deux membres : $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan y$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 1 dx = x$
- La solution générale sous forme implicite : $\arctan y = x + C$
- On exprime la solution : $y = \tan(x + C)$
- On substitue la condition initiale $y(0) = 1$: $1 = \tan C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout. En évidence, la solution de la condition initiale ; le point est la condition initiale.

- Vérification – la dérivée de la solution

$y' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ substituée dans l'équation donne une égalité.

Graphique



Une équation linéaire par variation de la constante.

Énoncé: $y' + 2y = e^x$

Variation de la constante

Résultat

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation linéaire du premier ordre $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:

$$y' + 2y = e^x$$

- D'abord l'équation homogène (second membre nul) :

$$y' + 2y = 0$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int 2 dx = 2x$

- Solution de l'équation homogène : $y_h = Ce^{-2x}$

- Variation de la constante – on cherche la solution sous la forme $y = C(x)e^{-2x}$; substituée dans l'équation :

$$C'(x)e^{-2x} = e^x$$

- D'où $C'(x) = e^{3x}$

- D'après la table – la fonction intérieure est affine (ax + b), on divise donc le résultat par a : $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$

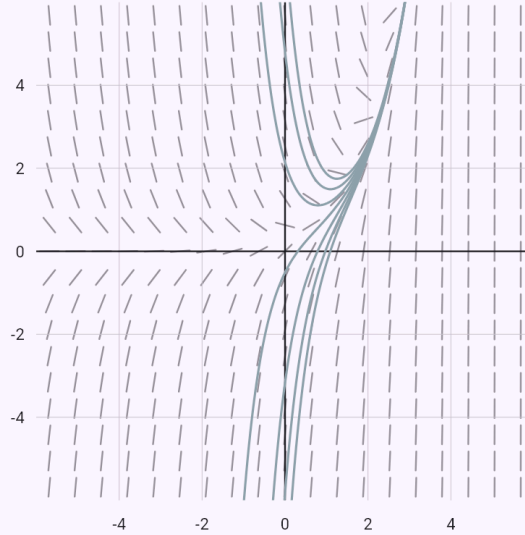
- On intègre : $C(x) = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$

- La solution générale : $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$

- Vérification – la dérivée de la solution

$y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ substituée dans l'équation donne une égalité.

Graphique



— solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

La même équation par un facteur intégrant.

Énoncé: $y' + 2y = e^x$ Facteur intégrant

Résultat

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation linéaire du premier ordre $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:
 $y' + 2y = e^x$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int 2 dx = 2x$

- Le facteur intégrant : $\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$

- On multiplie par le facteur intégrant – le membre de gauche est la dérivée d'un produit : $(ye^{2x})' = e^{3x}$

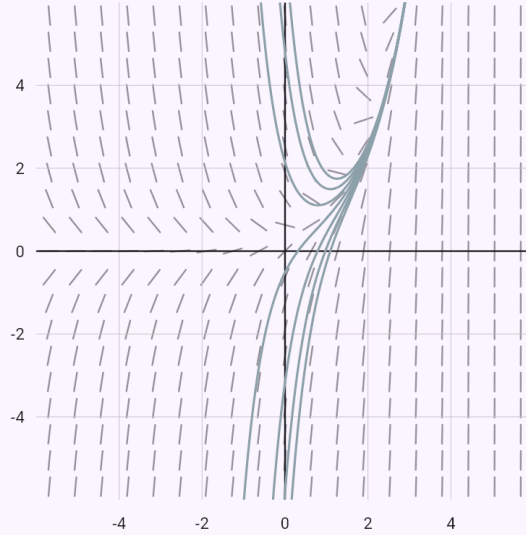
- D'après la table – la fonction intérieure est affine (ax + b), on divise donc le résultat par a : $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$

- Intégration des deux membres : $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$

- La solution générale : $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$

- Vérification – la dérivée de la solution
 $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ substituée dans l'équation donne une égalité.

Graphique



— solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Une équation homogène – la substitution $u = y/x$.

Énoncé: $y' = (x - y)/(x + y)$

Résultat

$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation homogène – le membre de droite ne dépend que du rapport y/x : $y' = \frac{x-y}{x+y}$

- La substitution $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $y' = u + xu'$ transforme l'équation en $xu' = -u - 1 + \frac{2}{u+1}$

- Séparation des variables (division en supposant $u^2 + 2u - 1 \neq 0$) : $\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{x} dx$

- Intégration des deux membres : $\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = \int -\frac{1}{x} dx$

- On sort la constante de l'intégrale : $\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du$

- Le numérateur est la dérivée du dénominateur (ou un multiple), $f(x) = -u^2 - 2u + 1$, d'après la formule

$$\int \frac{f'(u)}{f(u)} du = \ln |f(u)| + C$$

$$\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\frac{1}{2} \int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1} du = -\ln$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int -\frac{1}{x} dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

- La solution générale sous forme implicite :

$$\frac{\ln |-u^2 - 2u + 1|}{2} = C - \ln |x|$$

- On passe à l'exponentielle – la constante $\pm e^C$ est de nouveau notée C : $-u^2 - 2u + 1 = \frac{C}{x^2}$

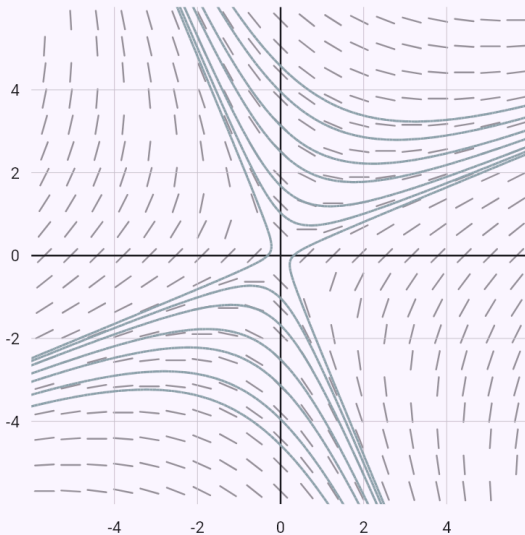
- La solution constante $u = -1 - \sqrt{2}$, exclue par la division, est contenue dans la solution générale pour $C = 0$

- La solution constante $u = -1 + \sqrt{2}$, exclue par la division, est contenue dans la solution générale pour $C = 0$

- Retour à l'inconnue d'origine : $\frac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \frac{C}{x^2}$

- La solution générale sous forme implicite : $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Graphique



— solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Une équation de Bernoulli – la substitution $z = y^{1-n}$ et la solution constante $y = 0$.

Énoncé: $xy' - y = -xy^2$

Résultat

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Étapes

- Une équation de Bernoulli $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$:
 $y' - \frac{y}{x} = -y^2$

- La substitution $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{1}{y^2} y'$ transforme l'équation en $z' + \frac{z}{x} = 1$

- D'abord l'équation homogène (second membre nul) :
 $z' + \frac{z}{x} = 0$

- D'après la table des primitives usuelles :
 $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

- Solution de l'équation homogène : $z_h = \frac{C}{x}$

- Variation de la constante – on cherche la solution sous la forme $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$; substituée dans l'équation :
 $C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$

- D'où $C'(x) = x$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- On intègre : $C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

- La solution générale : $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- Retour à l'inconnue d'origine : $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- On exprime la solution : $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$

- La division a exclu la solution constante $y = 0$ – c'est une autre solution de l'équation.

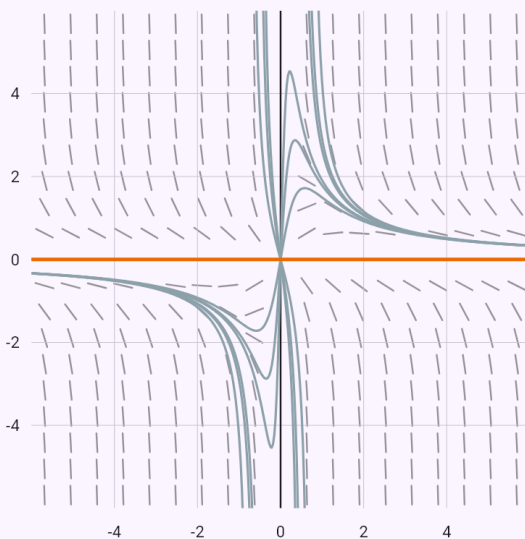
- On renomme la constante (un multiple d'une constante arbitraire est encore une constante arbitraire) :

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}$$

- Vérification – la dérivée de la solution

$$y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2} \text{ substituée dans l'équation donne une égalité.}$$

Graphique



— solutions pour différents C

— $y = 0$

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

Une équation exacte – le potentiel $F(x, y) = C$.

Énoncé: $(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$

Résultat

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation $M dx + N dy = 0$ – vérifions si elle est exacte (le membre de gauche est une différentielle totale) : $(2xy + 6x)dx + (4y^3 + x^2)dy = 0$
- $M = 2xy + 6x, N = 4y^3 + x^2$; l'équation est exacte, car $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales :
$$\int (6x + 2yx) dx = \int 6x dx + \int 2yx dx$$
- On sort la constante de l'intégrale : $\int 6x dx = 6 \int x dx$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- On sort la constante de l'intégrale :
$$\int 2yx dx = 2y \int x dx$$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Le potentiel F en intégrant M par rapport à x :
$$F(x, y) = \int (2xy + 6x) dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$$

- On sort la constante de l'intégrale :

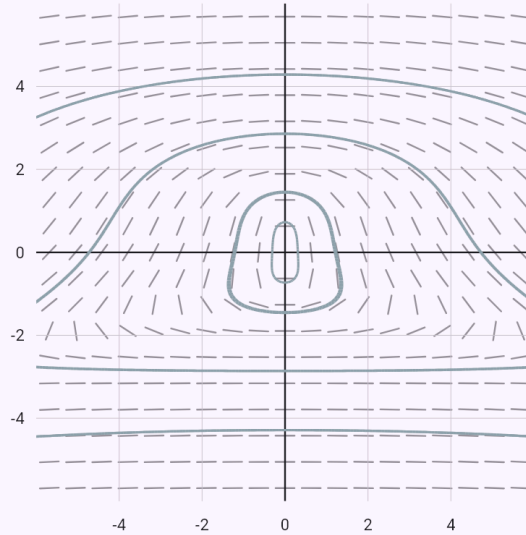
$$\int 4y^3 dy = 4 \int y^3 dy$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$

- De $\partial F / \partial y = N$: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$

- La solution générale sous forme implicite :
$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C$$

Graphique



— solutions pour différents C

Les petits segments montrent en chaque point la direction imposée par l'équation (champ de directions). Les courbes grises sont des solutions pour différents C – elles touchent les segments partout.

La substitution $z = x - y$; Symja perdrait ici un facteur 2, l'application vérifie le résultat.

Énoncé: $y' = \cos(x - y)$, $y(0) = \pi/2$

Résultat

$$y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + 1)$$

Étapes

- Le membre de droite est une fonction de $ax + by + c$ - nous le prenons comme nouvelle inconnue :

$$y' = \cos(x - y)$$

- La substitution $z = x - y$, $z' = 1 - y'$ transforme l'équation en $z' = 1 - \cos z$

- Séparation des variables (division en supposant

$$1 - \cos z \neq 0) : \frac{dz}{1 - \cos z} = dx$$

- Intégration des deux membres : $\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx$

- Aucun changement de variable plus simple ne convient - substitution universelle $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$

$$\sin z = \frac{2t}{1+t^2}, \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dz = \frac{2dt}{(1+t^2)}$$

$$\int \frac{1}{1 - \cos z} dz = \int \frac{1}{t^2} dt$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}$

- On revient à la variable d'origine :

$$t = \tan\left(\frac{z}{2}\right) : -\cot\left(\frac{z}{2}\right)$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int 1 dx = x$

- La solution générale sous forme implicite :

$$-\cot\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$$

- On exprime la solution : $z = 2 \operatorname{arccot}(C - x)$

- La division a exclu la solution constante $z = 0$ - c'est une autre solution de l'équation.

- Retour à l'inconnue d'origine : $y = x - 2 \operatorname{arccot}(C - x)$

- On renomme la constante (un multiple d'une constante arbitraire est encore une constante arbitraire) :

$$y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + C)$$

- On substitue la condition initiale $y(0) = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arccot} C \Rightarrow C = 1$$

- La solution de la condition initiale (solution particulière) :

$$y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + 1)$$

- Vérification - la dérivée de la solution $y' = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2}$ substituée dans l'équation donne une égalité.

L'équation caractéristique aux racines complexes $-2 \pm 3i$.

Énoncé: $y'' + 4y' + 13y = 0$

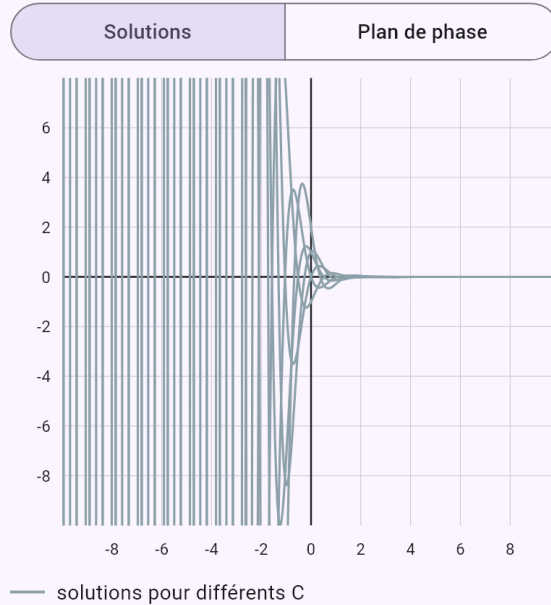
Résultat

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants :
 $y'' + 4y' + 13y = 0$
- On cherche des solutions $y = e^{\lambda x}$; en substituant et en divisant par $e^{\lambda x}$, on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Le discriminant $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; les racines :
 $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Chaque racine λ donne la solution $e^{\lambda x}$, une racine de multiplicité k aussi $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, et une paire $\alpha \pm \beta i$ les solutions $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$.
Le système fondamental :
 $y_1 = e^{-2x} \cos(3x)$, $y_2 = e^{-2x} \sin(3x)$
- La solution générale :
 $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Graphique



Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

Second membre particulier avec résonance – 2 est racine de l'équation caractéristique.

Énoncé: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

Second membre particulier

Résultat

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

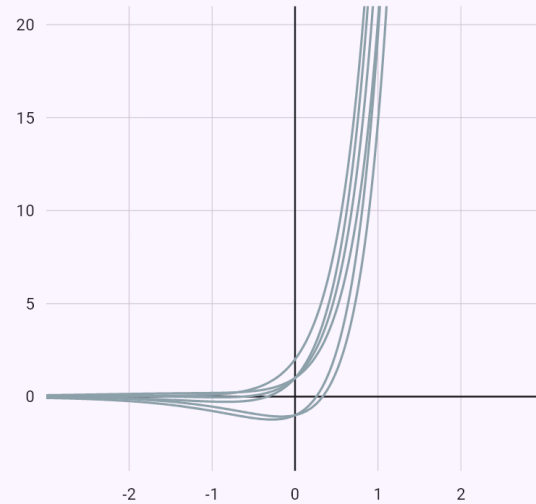
Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants :
$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) :
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
- On cherche des solutions $y = e^{(\lambda)x}$; en substituant et en divisant par $e^{(\lambda)x}$, on obtient l'équation caractéristique :
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
- Le discriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; les racines :
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$
- Chaque racine λ donne la solution $e^{(\lambda)x}$, une racine de multiplicité k aussi $x \cdot e^{(\lambda)x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{(\lambda)x}$, et une paire $\alpha \pm \beta i$ les solutions $e^{(\alpha)x} \cdot \cos \beta x$ et $e^{(\alpha)x} \cdot \sin \beta x$.
Le système fondamental : $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
- Le second membre $3e^{2x}$ est de forme particulière ; le nombre 2 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par x :
$$y_p = A x e^{2x}$$
- Les dérivées :
$$y'_p = 2A x e^{2x} + A e^{2x}, \quad y''_p = 4A x e^{2x} + 4A e^{2x}$$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle),

termes semblables regroupés : $A = 3$

- Une solution particulière : $y_p = 3xe^{2x}$
- La solution générale :
$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$$

Graphique



— solutions pour différents C

Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

Le second membre $\tan x$ n'est pas particulier – variation des constantes et wronskien.

Énoncé: $y'' + y = \tan x$

Résultat

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{-\cos x}{\cos x} \right|$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants :
 $y'' + y = \tan x$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) :
 $y'' + y = 0$
- On cherche des solutions $y = e^{\lambda x}$; en substituant et en divisant par $e^{\lambda x}$, on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 + 1 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Chaque racine λ donne la solution $e^{\lambda x}$, une racine de multiplicité k aussi $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, et une paire $\alpha \pm \beta i$ les solutions $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$.
Le système fondamental : $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$
- Solution de l'équation homogène :
 $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variation des constantes – on cherche la solution sous la forme $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, les dérivées des fonctions C_k vérifient le système
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x \end{cases}$$

- Le déterminant du système (le wronskien)

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

- D'où $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$

- D'où $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \sin x$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = - \int \sin x \cdot \tan x \, dx$$

- La fonction est impaire en cosinus – changement de variable $t = \sin x$

$$dt = \cos x \, dx$$
$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples

$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt + \int \frac{1}{2(t+1)} \, dt$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int -1 \, dt = -t$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int -\frac{1}{2(t-1)} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{t-1} dt = \ln |t-1|$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int \frac{1}{2(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1|$$

- On revient à la variable d'origine

$$t = \sin x : \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$

- On intègre (les constantes d'intégration sont déjà dans la solution homogène) :

$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \tan x dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

- On intègre (les constantes d'intégration sont déjà dans la solution homogène) : $C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x$

- Une solution particulière :

$$y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- La solution générale

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| +$$

Un problème de Cauchy – un système pour les constantes C_1, C_2 .

Énoncé: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Résultat

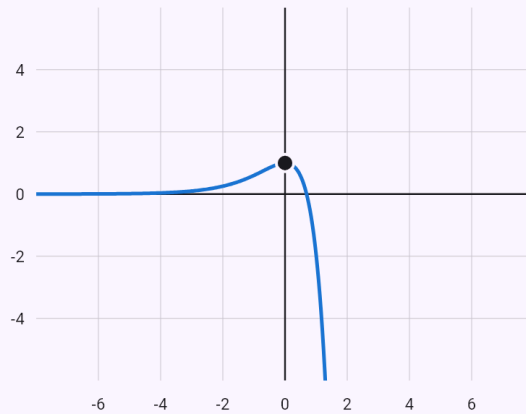
$$y = 2e^x - e^{2x}$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants :
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) :
 $y'' - 4y' + 3y = 0$
- On cherche des solutions $y = e^{\lambda x}$; en substituant et en divisant par $e^{\lambda x}$, on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Le discriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; les racines :
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$
- Chaque racine λ donne la solution $e^{\lambda x}$, une racine de multiplicité k aussi $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, et une paire $\alpha \pm \beta i$ les solutions $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$.
Le système fondamental : $y_1 = e^x, y_2 = e^{3x}$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
- Le second membre e^{2x} est de forme particulière ; le nombre 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière $y_p = A e^{2x}$
- Les dérivées : $y'_p = 2A e^{2x}, y''_p = 4A e^{2x}$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés : $-A = 1$

- D'où $A = -1$
- Une solution particulière : $y_p = -e^{2x}$
- La solution générale :
 $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Les dérivées de la solution générale :
 $y' = C_1 e^x - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Les conditions donnent le système d'où $C_1 = 2, C_2 = 0$
$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$
- La solution qui vérifie les conditions données :
 $y = 2e^x - e^{2x}$

Graphique



$y = 2e^x - e^{2x}$

Celle mise en évidence vérifie les conditions ; les points sont les valeurs données.

Le même problème par la transformée de Laplace.

Énoncé: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Transformée de Laplace

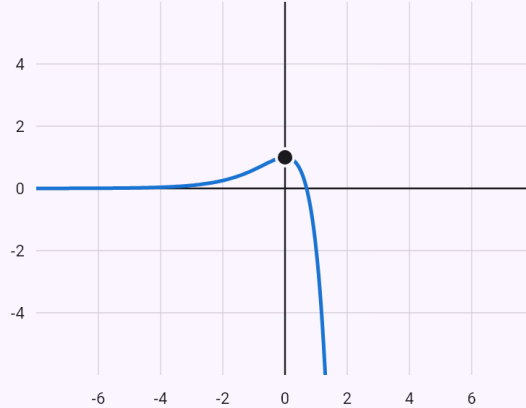
Résultat

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants :
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Transformée de Laplace des deux membres : $\mathcal{L}(y) = Y$,
 $\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = s^2Y - sy(0) - y'(0)$; avec les conditions initiales :
 $(s^2Y - s) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s - 2}$
- On exprime l'image Y : $Y = \frac{s - 3}{(s - 2)(s - 1)}$
- Décomposition en éléments simples :
 $Y = -\frac{1}{s - 2} + \frac{2}{s - 1}$
- La transformée inverse (d'après la table des images) donne la solution : $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^x - e^{2x}$

Graphique



$$y = 2e^x - e^{2x}$$

Cette mise en évidence vérifie les conditions ; les points sont les valeurs données.

Un problème aux limites avec une infinité de solutions.

Énoncé: $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

Résultat

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants :
 $y'' + y = 0$
- On cherche des solutions $y = e^{(\lambda x)}$; en substituant et en divisant par $e^{(\lambda x)}$, on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 + 1 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Chaque racine λ donne la solution $e^{(\lambda x)}$, une racine de multiplicité k aussi $x \cdot e^{(\lambda x)}$, ..., $x^{(k-1)} \cdot e^{(\lambda x)}$, et une paire $\alpha \pm \beta i$ les solutions $e^{(\alpha x)} \cdot \cos \beta x$ et $e^{(\alpha x)} \cdot \sin \beta x$.
 Le système fondamental : $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$
- La solution générale : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$
- La constante C_2 reste arbitraire – le problème a une infinité de solutions.
- La solution qui vérifie les conditions données :
 $y = C_2 \sin x$

Équation d'Euler – la substitution $x = e^t$.

Énoncé: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$

Résultat

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

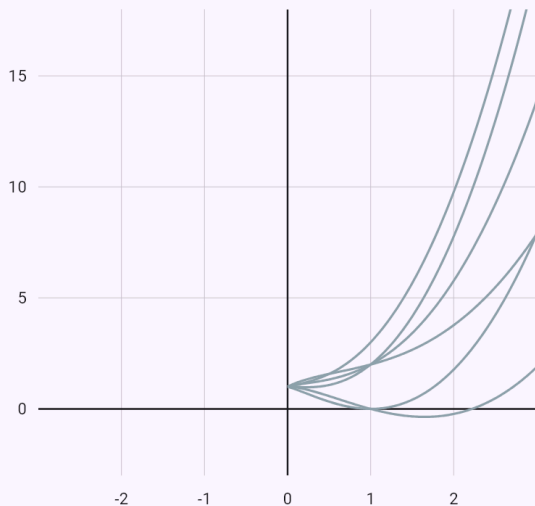
Étapes

- Équation d'Euler – chaque dérivée $y^{(k)}$ est multipliée par x^k ; la substitution $x = e^t$ la ramène à une équation à coefficients constants : $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- La substitution $x = e^t$, $xy' = \dot{y}$, $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ transforme l'équation en $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) : $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- On cherche des solutions $y = e^{\lambda t}$; en substituant et en divisant par $e^{\lambda t}$, on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Le discriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; les racines : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$
- Chaque racine λ donne la solution $e^{\lambda t}$, une racine de multiplicité k aussi $x \cdot e^{\lambda t}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda t}$, et une paire $\alpha \pm \beta i$ les solutions $e^{\alpha t} \cos \beta t$ et $e^{\alpha t} \sin \beta t$. Le système fondamental : $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$
- Solution de l'équation homogène : $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- On découpe le second membre en parties de forme particulière – une solution particulière pour chacune, puis on les additionne : $f_1 = 2$, $f_2 = e^{2t}$
- Le second membre 2 est de forme particulière ; le

nombre 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière $y_{p_1} = A$

- Les dérivées : $y'_{p_1} = 0$, $y''_{p_1} = 0$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés : $2A = 2$
- D'où $A = 1$
- Une solution particulière : $y_{p_1} = 1$
- Le second membre e^{2t} est de forme particulière ; le nombre 2 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par x : $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Les dérivées : $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t}$, $y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés : $A = 1$
- Une solution particulière : $y_{p_2} = te^{2t}$
- Une solution particulière : $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- La solution générale : $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Retour à la variable d'origine ($t = \ln x$, pour $x > 0$) : $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Graphique



— solutions pour différents C

Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

L'abaissement $y' = p(y)$, les constantes tirées des conditions initiales pas à pas.

Énoncé: $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Résultat

$$y = -\ln(1 - x)$$

Étapes

- La variable indépendante manque – on considère y' comme une fonction de y : $y'' = e^{2y}$
- La substitution $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ transforme l'équation en $p \frac{dp}{dy} = e^{2y}$; les conditions initiales donnent $p(0) = 1$
- Une équation à variables séparables – le membre de droite est le produit d'une fonction de la variable et d'une fonction de l'inconnue : $\frac{dp}{dy} = \frac{e^{2y}}{p}$
- Séparation des variables : $p \, dp = e^{2y} \, dy$
- Intégration des deux membres : $\int p \, dp = \int e^{2y} \, dy$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int p \, dp = \frac{p^2}{2}$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine ($ax + b$), on divise donc le résultat par a : $\int e^{2y} \, dy = \frac{e^{2y}}{2}$
- La solution générale sous forme implicite : $\frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1$

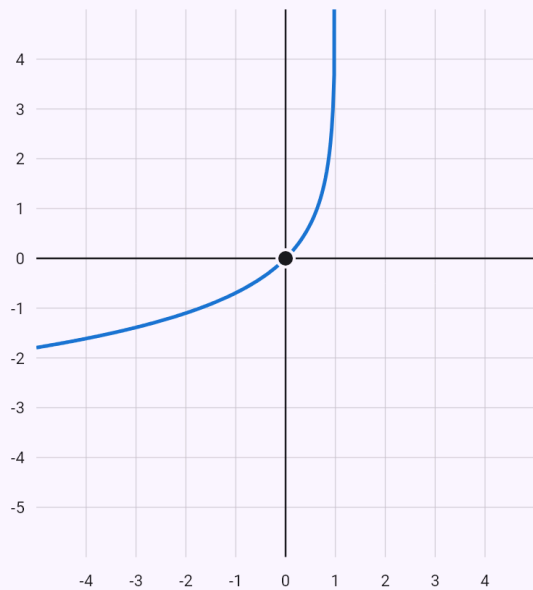
- On exprime la solution : $p^2 = e^{2y} + C_1$
- On substitue la condition initiale $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $p = e^y$
- Retour à l'inconnue d'origine : $y' = e^y$
- Une équation à variables séparables – le membre de droite est le produit d'une fonction de la variable et d'une fonction de l'inconnue : $y' = e^y$
- Séparation des variables (division en supposant $e^y \neq 0$) : $\frac{dy}{e^y} = dx$
- Intégration des deux membres : $\int \frac{dy}{e^y} = \int dx$
- D'après la table – la fonction intérieure est affine ($ax + b$), on divise donc le résultat par a : $\int e^{-y} \, dy = -e^{-y}$
- D'après la table des primitives usuelles : $\int 1 \, dx = x$
- La solution générale sous forme implicite : $-e^{-y} = x + C_2$
- On exprime la solution : $y = -\ln(C_2 - x)$
- On substitue la condition initiale $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$

- La solution de la condition initiale (solution particulière) :
 $y = -\ln(1 - x)$

Graphique

Solutions

Plan de phase



— $y = -\ln(1 - x)$

Cette mise en évidence vérifie les conditions ; les points sont les valeurs données.

Un oscillateur amorti : trois cas selon δ et ω .

Énoncé: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$

Résultat

$$\delta > \omega : y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

$$\delta = \omega : y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega : y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants :

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

- On cherche des solutions $y = e^{\lambda x}$; en substituant et en divisant par $e^{\lambda x}$, on obtient l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

- Les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

- Pour $\delta > \omega$ donc

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$$y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

- Pour $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, donc $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$

- Pour $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}i$, donc

$$y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

Résonance : pour $\omega = 2$ la solution a une autre forme.

Énoncé: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$

Résultat

$$\omega \neq 2 : y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2 : y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Étapes

- Une équation linéaire à coefficients constants :
 $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- D'abord l'équation homogène (second membre nul) :
 $y'' + \omega^2 y = 0$
- On cherche des solutions $y = e^{\lambda t}$; en substituant et en divisant par $e^{\lambda t}$, on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Chaque racine λ donne la solution $e^{\lambda x}$, une racine de multiplicité k aussi $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, et une paire $\alpha \pm \beta i$ les solutions $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$.
Le système fondamental : $y_1 = \cos(\omega t)$, $y_2 = \sin(\omega t)$
- Solution de l'équation homogène :
 $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Le second membre $\cos(2t)$ est de forme particulière ; le nombre $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique,

on cherche donc une solution particulière

$$y_p = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

- Les dérivées
 $y'_p = 2B \cos(2t) - 2A \sin(2t)$, $y''_p = -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t)$
- Substitué dans l'équation (divisé par l'exponentielle), termes semblables regroupés
 $(A\omega^2 - 4A) \cos(2t) + (B\omega^2 - 4B) \sin(2t) = \cos(2t)$
- On identifie les coefficients des termes semblables des deux côtés d'où $A = \frac{1}{\omega^2 - 4}$, $B = 0$
$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$
- Une solution particulière : $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- La solution générale
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$
- Pour $\omega = 2$, le nombre du second membre est racine de l'équation caractéristique (résonance) : la solution a une autre forme : $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$

Une solution devinée $y_1 = x$ et la réduction de l'ordre (d'Alembert).

Énoncé: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

Résultat

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln |x - 1| - x \ln |x + 1|)$$

Étapes

- Une équation linéaire du second ordre à coefficients

$$\text{variables : } y'' + \frac{2x}{x^2 - 1} y' + \frac{2}{1 - x^2} y = 0$$

- On devine une solution et on la vérifie en la substituant : $y_1 = x$. La seconde par réduction de l'ordre (d'Alembert, $y = y_1 \cdot u$)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = x \ln |x - 1|$$

- On décompose la fraction rationnelle en un polynôme et des éléments simples

$$\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

- L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales

$$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)} dx$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int \frac{1}{2(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln |x-1|$$

- On sort la constante de l'intégrale :

$$\int -\frac{1}{2(x+1)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

- D'après la table des primitives usuelles :

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1|$$

- On sort la constante de l'intégrale :

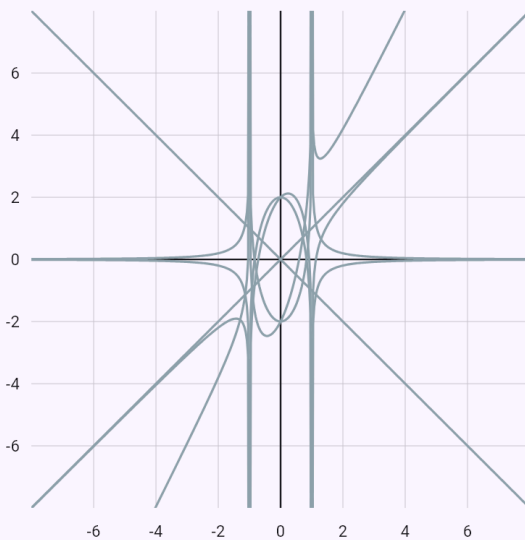
$$\int -\frac{1}{x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

- D'après la table des primitives usuelles : $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$

- La solution générale :

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln |x - 1| - x \ln |x + 1| + 2)$$

Graphique



— solutions pour différents C

Les courbes grises sont des solutions pour diverses valeurs des constantes.

Limitations connues

- Une équation qui demande une indication de l'énoncé (autre que $z = \ln y$) n'est pas encore résolue.
- Pour une équation à paramètre (k, λ, ω), l'application ne trace pas de graphe et prend les paramètres positifs.
- Quand la solution ne s'exprime pas explicitement, elle reste implicite.
- La transformée de Laplace ne connaît pas encore la fonction de Heaviside, les décalages ni les seconds membres périodiques.

Récurrances et fonctions génératrices

L'application résout les récurrances linéaires à coefficients constants de tout ordre par l'équation caractéristique – racines multiples et complexes comprises (la forme complexe de la solution et son passage à la forme réelle par la formule de Moivre) – et avec un second membre de la forme $P(n) \cdot q^n$ (aussi $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, résonance et somme de seconds membres). Les conditions initiales déterminent les constantes ; pour vérifier, l'application calcule d'autres termes par la récurrance et les compare à la formule.

La puce « Méthode » propose aussi la fonction génératrice ($A(x) = \sum a_n x^n$, éléments simples, séries géométriques), les puissances d'une matrice (diagonalisation) ou, à l'ordre 1, la sommation. Une récurrance d'ordre 1 à coefficient variable ($a_{n+1} = (n+1)a_n$) se résout par un produit (factorielles), les récurrances non linéaires convertibles par la substitution $b_n = 1/a_n$ ou $b_n = \ln a_n$. Un système de deux récurrances se résout en éliminant une suite ou par la matrice, une récurrance « diviser pour régner » $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ par $n = b^k$ – avec l'estimation du théorème maître.

Avec l'opération « Fonction génératrice », l'application trouve la fonction génératrice d'une suite donnée par une formule ($n^2 + 2^n$) ou par ses premiers termes (1, 0, 1, 0, ...), et inversement la formule de a_n à partir d'une fonction $A(x)$. Le nombre de solutions entières positives ou nulles de $x_1 + x_2 + \dots = N$ (aussi avec des bornes ou des coefficients – payer avec des pièces) est un coefficient d'une fonction génératrice.

Le graphique montre les termes de la suite sous forme de points (les deux suites d'un système).

Comment le saisir

$$a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), \quad a(0) = 1, \\ a(1) = 4$$

Avec des parenthèses, les conditions après une virgule.

$$a_{\{n+2\}} = 5a_{\{n+1\}} - 6a_n$$

Avec des indices (aussi depuis une photo). Sans conditions : la solution générale avec les constantes C_1, C_2 .

$$F_n = F_{\{n-1\}} + F_{\{n-2\}}, \quad F_1 = F_2 = 1$$

L'indice peut descendre (a_{n-1}, a_{n-2}) ; une même valeur peut être donnée à plusieurs termes.

$$a_{\{n+1\}} = a_n + 2b_n \\ b_{\{n+1\}} = 3a_n + b_n \\ a_0 = 1, \quad b_0 = 0$$

Un système – les équations sur des lignes, les conditions sur la dernière.

$T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1$	Diviser pour régner – un terme en n/b .
$n^2 + 2^n$	La formule d'une suite avec l'opération « Fonction génératrice » (aussi $a_n = \dots$).
1, 0, 1, 0, ...	Les premiers termes séparés par des virgules.
$1/(1 - x - x^2)$	Une fonction génératrice en x (aussi $A(x) = \dots$) – la formule de a_n .
nombre de solutions $x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 \leq 3$	Le nombre de solutions entières positives ou nulles avec des bornes.

Exemples

Deux racines réelles distinctes, la vérification par d'autres termes.

Énoncé: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 1, a_1 = 4$

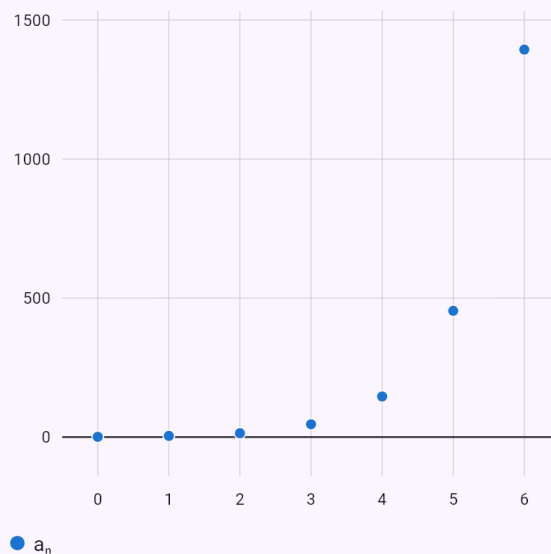
Résultat

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- On cherche des solutions $a_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n , on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Le discriminant $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; les racines :
 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
- La solution générale : $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = -1, C_2 = 2$
 $C_1 + C_2 = 1$
 $2C_1 + 3C_2 = 4$
- La solution qui vérifie les conditions données :
 $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Vérification : la récurrence donne
 $a_2 = 14, a_3 = 46, a_4 = 146$ – comme la formule.

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

La suite de Fibonacci – la formule de Binet.

Énoncé: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

Résultat

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

- On cherche des solutions $F_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^{n-2} , on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

- Le discriminant $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; les racines :
 $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- La solution générale

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- On substitue les conditions dans la solution générale

$$\text{d'où } C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$C_1 + C_2 = 0$$

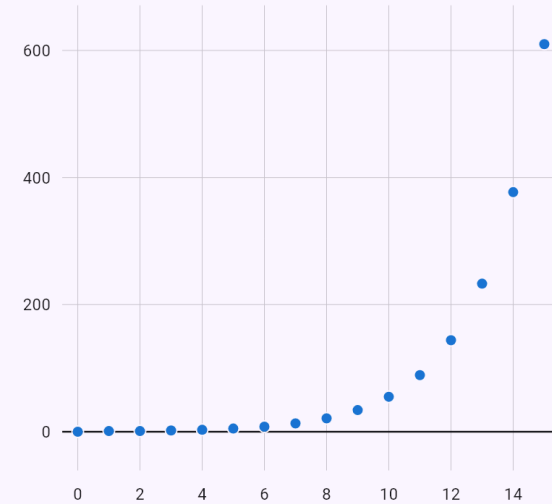
$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} C_2 = 1$$

- La solution qui vérifie les conditions données

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Vérification : la récurrence donne
 $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ – comme la formule.

Graphique



● F_n

Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Racines complexes $1 \pm i$ – la forme complexe et la formule de Moivre.

Énoncé: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Résultat

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

Étapes

- Réurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$

- On cherche des solutions $a_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n , on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

- Le discriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; les racines :
 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

- On écrit les racines complexes $1 \pm i$ sous forme trigonométrique : $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, donc $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. D'après la formule de Moivre $\lambda^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$

- La solution générale sous forme complexe (constantes complexes) : $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. En ajoutant les termes conjugués, avec de nouvelles constantes réelles, on obtient la forme réelle

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 1$, $C_2 = 1$

$$C_1 = 1$$

$$C_1 + C_2 = 2$$

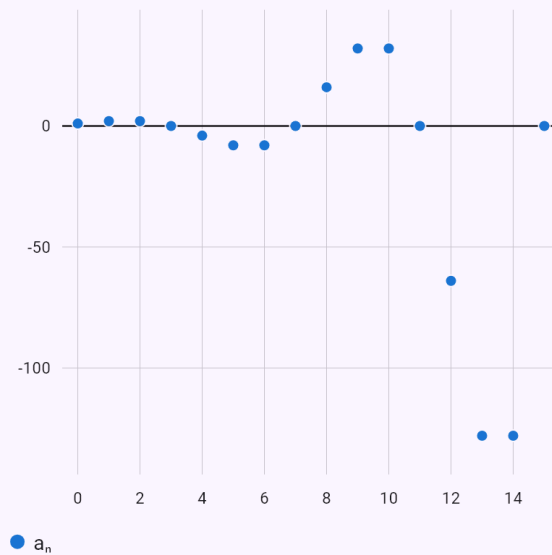
- La solution qui vérifie les conditions données

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

- Vérification : la récurrence donne

$$a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = -4 \text{ -- comme la formule.}$$

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Le second membre n , une racine double 2.

Énoncé: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$

Résultat

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Étapes

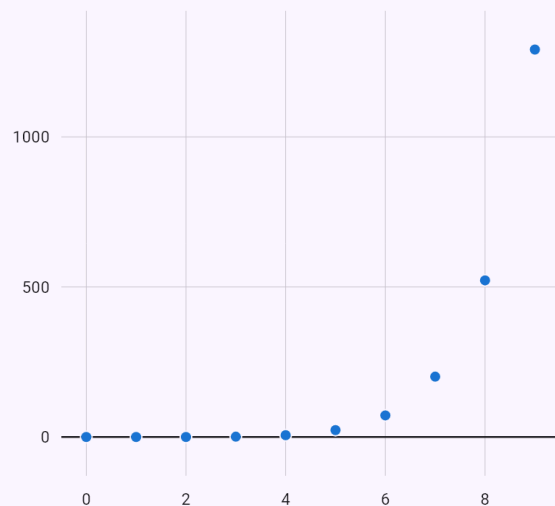
- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- On résout d'abord la récurrence homogène (second membre nul) : $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- On cherche des solutions $a_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n , on obtient l'équation caractéristique :
 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Le discriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; les racines :
 $\lambda_{1,2} = 2$
- La solution générale de la récurrence homogène :
 $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Le second membre n est de forme particulière ; le nombre 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière
 $a_n^{(p)} = An + B$
- On substitue dans la récurrence et on regroupe les termes : $An + B - 2A = n$
- On identifie les coefficients des termes semblables des deux côtés d'où $A = 1$, $B = 2$

$$A = 1$$

$$B - 2A = 0$$

- Une solution particulière : $a_n^{(p)} = n + 2$
- La solution générale :
 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- On substitue les conditions dans la solution générale
d'où $C_1 = -2$, $C_2 = \frac{1}{2}$
 $C_1 + 2 = 0$
 $2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$
- La solution qui vérifie les conditions données :
 $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Vérification : la récurrence donne
 $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 6$ – comme la formule.

Graphique



• a_n

Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

La même récurrence par la fonction génératrice.

Énoncé: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Fonction génératrice

Résultat

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

- On introduit la fonction génératrice $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

- On multiplie la récurrence par x^{n+2} et on somme pour tout $n \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- On exprime les sommes à l'aide de la fonction génératrice et des valeurs initiales :

$$A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$$

- On exprime la fonction génératrice et on factorise le dénominateur : $A(x) = \frac{1-x}{(1-2x)(1-3x)}$

- Décomposition en éléments simples :

$$A(x) = -\frac{1}{1-2x} + \frac{2}{1-3x}$$

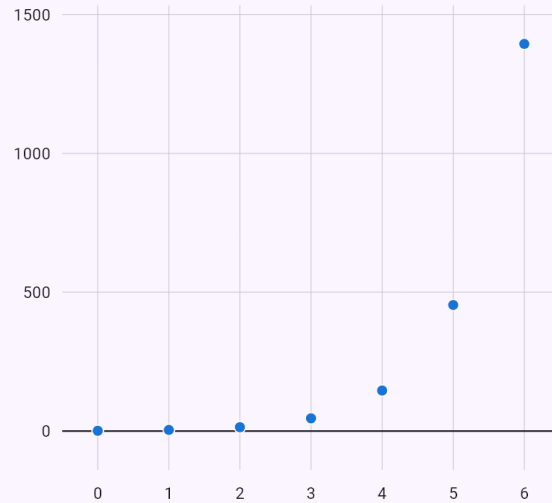
- On développe les fractions en séries géométriques

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- Le coefficient de x^n est le terme cherché :

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Graphique



• a_n

Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

La même récurrence par les puissances d'une matrice.

Énoncé: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Puissances d'une matrice

Résultat

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

- La récurrence sous forme matricielle soit $v_{n+1} = M \cdot v_n$ avec

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Par substitutions successives, $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Les valeurs propres de la matrice :

$$\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \text{ d'où } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

- Les vecteurs propres – solutions de $(M - \lambda E)u = 0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- On diagonalise la matrice, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- La puissance de la matrice les coefficients donc $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1}v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

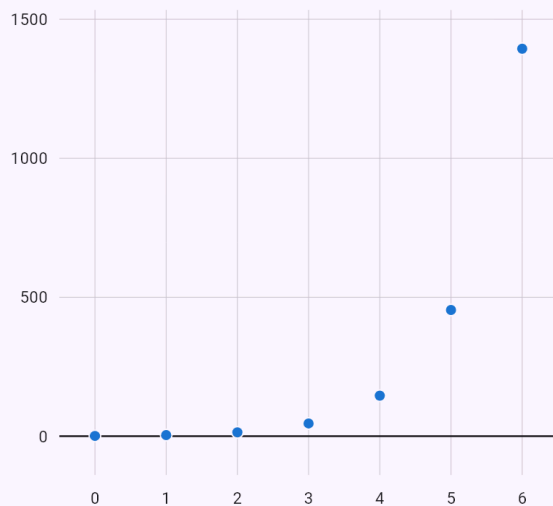
- La solution qui vérifie les conditions données :

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

- Vérification : la récurrence donne

$$a_2 = 14, \quad a_3 = 46, \quad a_4 = 146 - \text{comme la formule.}$$

Graphique



● a_n

Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Une récurrence d'ordre 1 par sommation.

Énoncé: $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_0 = 0$

Sommation

Résultat

$$a_n = 2^n - 1$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants :

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

- On substitue la récurrence en elle-même à plusieurs reprises : $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \dots$, en général

$$a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$$

- On calcule la somme : $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$

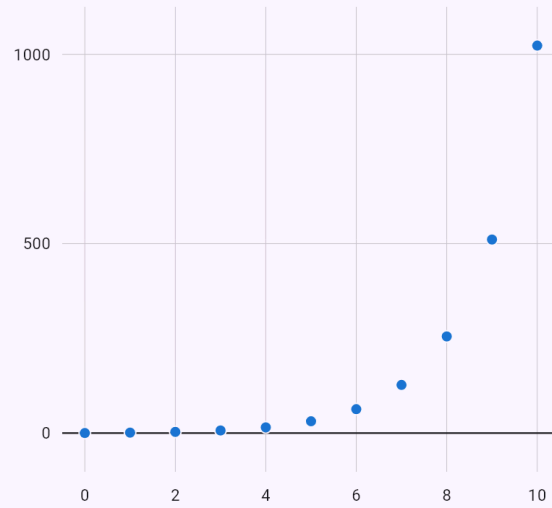
- La solution qui vérifie les conditions données :

$$a_n = 2^n - 1$$

- Vérification : la récurrence donne

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7 \text{ – comme la formule.}$$

Graphique



• a_n

Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Un coefficient variable – le produit donne une factorielle.

Énoncé: $a_{n+1} = (n+1)a_n, a_0 = 1$

Résultat

$$a_n = n!$$

Étapes

- Récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficient variable :

$$a_{n+1} = a_n(n+1)$$

- En substituant la récurrence en elle-même, le terme est un produit

$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \dots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1)$$

- On simplifie le produit (les factorielles se simplifient) :

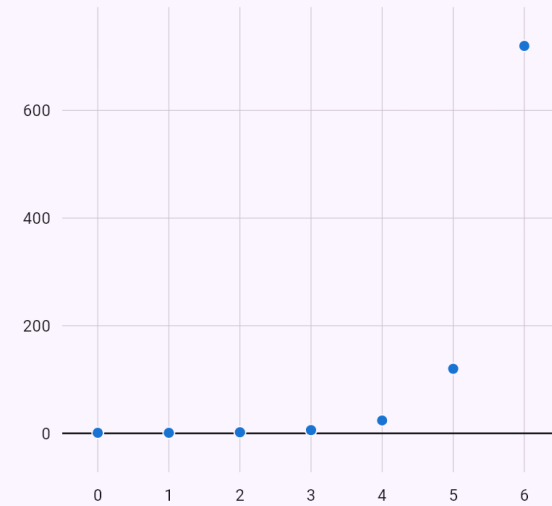
$$\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$$

- La solution qui vérifie les conditions données : $a_n = n!$

- Vérification : la récurrence donne

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6 \text{ – comme la formule.}$$

Graphique



• a_n

Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Une récurrence non linéaire – la substitution $b_n = 1/a_n$.

Énoncé: $a_{n+1} = a_n / (1 + a_n)$, $a_0 = 1$

Résultat

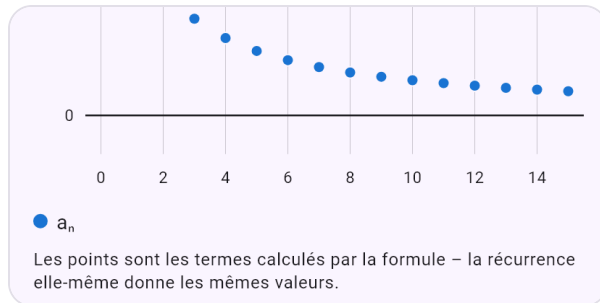
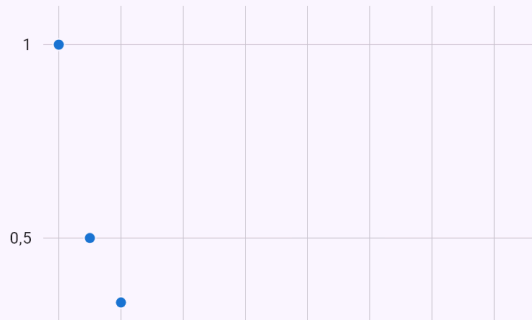
$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Étapes

- Une récurrence non linéaire – les inverses des termes la rendent linéaire : $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- On inverse les deux membres : $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; la substitution $b_n = \frac{1}{a_n}$ rend ainsi la récurrence linéaire : $b_{n+1} = b_n + 1$
- Les conditions initiales de la nouvelle suite : $b_0 = 1$
- On résout d'abord la récurrence homogène (second membre nul) : $b_{n+1} - b_n = 0$
- On cherche des solutions $b_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n , on obtient l'équation caractéristique : $\lambda - 1 = 0$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_1 = 1$
- La solution générale de la récurrence homogène : $b_n^{(h)} = C_1$
- Le second membre 1 est de forme particulière ; le nombre 1 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par n : $b_n^{(p)} = An$

- On substitue dans la récurrence et on regroupe les termes : $A = 1$
- Une solution particulière : $b_n^{(p)} = n$
- La solution générale : $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 1$
 $C_1 = 1$
- La solution qui vérifie les conditions données : $b_n = 1 + n$
- Vérification : la récurrence donne $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$ – comme la formule.
- On revient à la suite initiale : $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Graphique



Un système de deux récurrences en éliminant la suite b_n .

Énoncé: $a_{n+1} = a_n + 2b_n$

$b_{n+1} = 3a_n + b_n$

$$a_0 = 1, b_0 = 0$$

Résultat

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

Étapes

- Un système de deux récurrences linéaires

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$b_{n+1} = 3a_n + b_n$$

- De la première équation $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, donc

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}; \text{ en reportant dans la seconde, on}$$

obtient une récurrence pour une seule suite :

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$$

- La seconde condition initiale vient de la première équation : $a_1 = 1 + 0 = 1$

- On cherche des solutions $a_n = \lambda^n$; en substituant et en divisant par λ^n , on obtient l'équation caractéristique : $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$

- Le discriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; les racines : $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6}$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$

- La solution générale :

$$a_n = C_1 (1 - \sqrt{6})^n + C_2 (1 + \sqrt{6})^n$$

- On substitue les conditions dans la solution générale

$$\text{d'où } C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$(1 - \sqrt{6})C_1 + (1 + \sqrt{6})C_2 = 1$$

- La solution qui vérifie les conditions données :

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

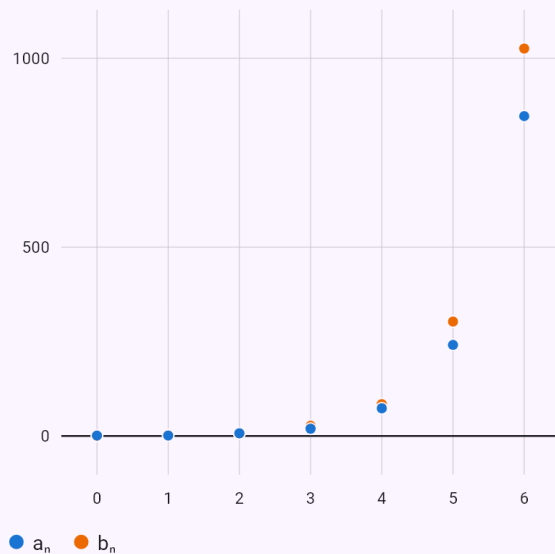
- Vérification : la récurrence donne

$$a_2 = 7, a_3 = 19, a_4 = 73 \text{ - comme la formule.}$$

- L'autre suite à partir de l'expression

$$b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

Graphique



Les points sont les termes calculés par la formule - la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Diviser pour régner (tri fusion) – $n = 2^k$ et le théorème maître.

Énoncé: $T(n) = 2T(n/2) + n$, $T(1) = 1$

Résultat

$$T(n) = n + n \log_2 n$$

Conditions : $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$

Étapes

- Une récurrence de type « diviser pour régner » :
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$
- Pour n puissance de la base : la substitution $n = 2^k$, $S_k = T(2^k)$ donne une récurrence linéaire d'ordre 1 : $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Les conditions initiales de la nouvelle suite : $S_0 = 1$
- On résout d'abord la récurrence homogène (second membre nul) : $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- On cherche des solutions $S_k = \lambda^k$; en substituant et en divisant par λ^k , on obtient l'équation caractéristique :
$$\lambda - 2 = 0$$
- Les racines de l'équation caractéristique : $\lambda_1 = 2$
- La solution générale de la récurrence homogène :
$$S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$$
- Le second membre 2^{k+1} est de forme particulière ; le nombre 2 est racine de l'équation caractéristique (multiplicité 1), on multiplie donc la forme par k :
$$S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$$

- On substitue dans la récurrence, on divise par 2^k et on regroupe les termes : $2A = 2$
- D'où $A = 1$
- Une solution particulière : $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- La solution générale :
$$S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$$
- On substitue les conditions dans la solution générale d'où $C_1 = 1$
$$C_1 = 1$$
- La solution qui vérifie les conditions données :
$$S_k = 2^k + k \cdot 2^k$$
- Vérification : la récurrence donne
$$S_1 = 4, S_2 = 12, S_3 = 32$$
 – comme la formule.
- On revient à n ($k = \log_2 n$) : $T(n) = n + n \log_2 n$
- Le théorème maître ($a = 2$, $b = 2$, $f(n) = \Theta(n)$) : $2 = 2^1$, donc $T(n) = \Theta(n \log n)$

La fonction génératrice de la suite $n^2 + 2^n$.

Énoncé: $n^2 + 2^n$ Fonction génératrice

Résultat

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Étapes

- On introduit la fonction génératrice

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n) x^n$$

- On sépare la série par linéarité :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

- Une série connue : $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$

- Une série connue : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

- Multiplier les termes par n revient à dériver puis multiplier par x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- Multiplier les termes par n revient à dériver puis multiplier par x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

- La fonction génératrice : $A(x) = \frac{1-2x+2x^2-3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Vérification – le développement commence par les termes de la suite : $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \dots$

La formule de a_n à partir d'une fonction génératrice – éléments simples avec des racines irrationnelles.

Énoncé: $1/(1 - x - x^2)$

Fonction génératrice

Résultat

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Étapes

- On exprime la fonction génératrice et on factorise le dénominateur

$$A(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Décomposition en éléments simples

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- On développe les fractions en séries géométriques

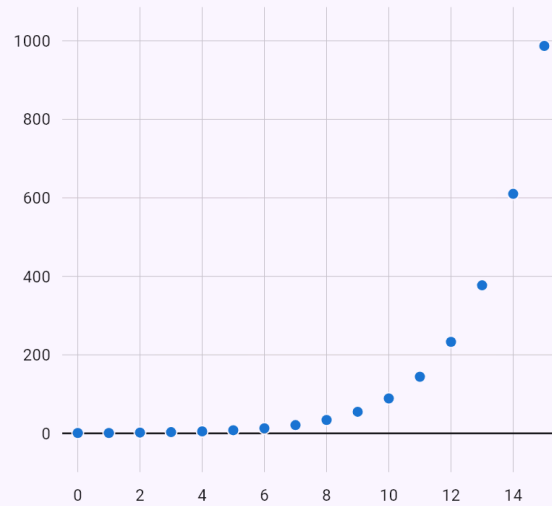
$$\frac{1}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n, \quad \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n$$

- Le coefficient de x^n est le terme cherché

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Vérification – le développement commence par les termes de la suite : $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

Graphique



• a_n

Les points sont les termes calculés par la formule – la récurrence elle-même donne les mêmes valeurs.

Le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ avec $x_1 \leq 3$.

Énoncé: nombre de solutions $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 \leq 3$

Résultat

38

Étapes

- L'inconnue x_1 ($0 \leq x_1 \leq 3$) donne la série

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

- L'inconnue x_2 ($x_2 \geq 0$) donne la série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- L'inconnue x_3 ($x_3 \geq 0$) donne la série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- La fonction génératrice est leur produit – le coefficient

$$\text{de } x^N \text{ compte les solutions : } G(x) = \frac{1 - x^4}{(1 - x)^3}$$

- Le nombre de solutions est le coefficient de x^{10} : 38

Limitations connues

- Pas encore : les récurrences linéaires d'ordre supérieur à coefficients variables, les systèmes de trois récurrences ou plus, « diviser pour régner » avec plusieurs termes ($T(n/2)$ et $T(n/3)$) et les récurrences non linéaires que ces substitutions ne rendent pas linéaires.

Applications des équations différentielles

Le bouton « Applications des équations différentielles » de l'écran d'accueil ouvre un formulaire de 23 modèles : carbone 14, désintégration et demi-vie, croissance exponentielle, chaîne de désintégration, refroidissement de Newton (aussi l'heure du décès à partir de deux mesures), cinétique chimique d'ordre 0 à 2, médicament dans le sang, alcoolémie, épargne et crédit, circuits RC, RL et RLC, ressort, chute avec frottement, vidange d'un réservoir, mélange, croissance logistique et de Gompertz, population exploitée, épidémie SIR, proie et prédateur, compétition de deux espèces et chémostat.

Vous choisissez le modèle, sa variante et ce que vous cherchez ; les constantes sont préremplies et modifiables. Chaque grandeur et le résultat ont une unité au choix : l'application convertit les valeurs (la conversion est une étape). Le « ? » à côté du modèle explique d'où vient son équation.

Les étapes posent le modèle, résolvent l'équation (séparation des variables, facteur intégrant, équation caractéristique), utilisent les conditions, expriment la grandeur cherchée et remplacent par les nombres. Les systèmes sont résolus numériquement par Runge–Kutta, leurs équilibres et leur stabilité exactement. Le graphique montre les grandeurs au cours du temps, pour les systèmes aussi le plan de phase.

Exemples

Âge d'une découverte contenant encore 35 % de ^{14}C .

Énoncé: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Résultat

$t \approx 8700$ ans

Étapes

- On cherche t ; données : $T_{1/2} = 5730$ ans, $\frac{N}{N_0} = 35\%$
- On convertit les unités : $\frac{N}{N_0} = 35\% = 0,35$
- Les êtres vivants absorbent le carbone de l'air et contiennent donc la même proportion de l'isotope radioactif ^{14}C que l'atmosphère. Après la mort, l'absorption cesse et le ^{14}C se désintègre. Le nombre de désintégrations par unité de temps est proportionnel au nombre de noyaux restants : $dN/dt = -\lambda N$, λ étant la constante radioactive. La solution est $N = N_0 \cdot e^{(-\lambda t)}$; après la demi-vie $T_{1/2} = 5730$ ans il en reste la moitié, donc $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$. De la proportion de ^{14}C restante (ou de l'activité mesurée comparée à celle d'un échantillon vivant) on tire l'âge. Équation du modèle : $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Séparation des variables : $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$
- Intégration des deux membres : $\ln |N| = -\lambda t + C$
- On passe à l'exponentielle – la constante $\pm e^C$ est de nouveau notée C : $N = C e^{-\lambda t}$
- On substitue la condition initiale $N(0) = N_0$: $N_0 = C$

- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $N = N_0 e^{-\lambda t}$

- En une demi-vie la quantité est divisée par deux – constante radioactive

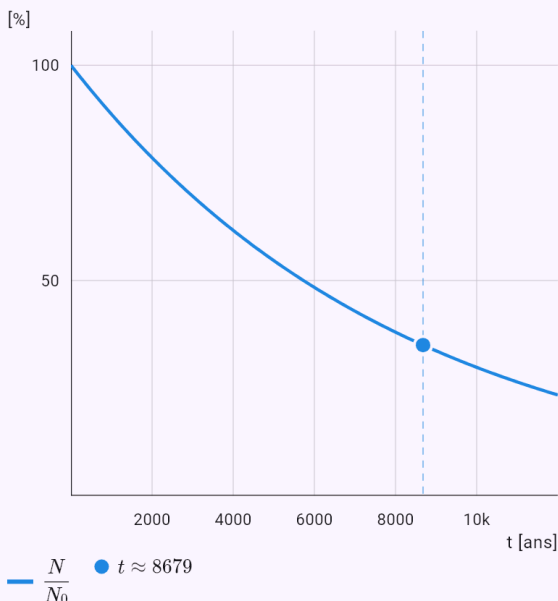
$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ an}^{-1}$$

- On exprime la grandeur cherchée :

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}$$

- On remplace : $t = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{1}{0,35} \approx 8679$ ans
- Les laboratoires donnent « l'âge radiocarbone » avec la demi-vie de Libby de 5568 ans et le convertissent avec une courbe d'étalonnage (le ^{14}C atmosphérique n'a pas toujours été le même); l'âge réel peut donc différer un peu.

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution; la réponse est marquée.

Heure du décès : 30 °C à la découverte, 28 °C une heure plus tard, pièce à 20 °C.

Énoncé: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC]; Tt=37[degC]; k=measured)`

Résultat

$$t \approx -2,38 \text{ h}$$

Étapes

- On cherche t ; données
 $T_0 = 30^\circ\text{C}$, $T_a = 20^\circ\text{C}$, $t_1 = 1 \text{ h}$, $T_1 = 28^\circ\text{C}$,
- Un corps cède la chaleur d'autant plus vite que l'écart de température est grand : $dT/dt = -k(T - T_a)$, T_a étant la température ambiante et k dépendant du corps. La solution est $T = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{(-kt)}$. On détermine k à partir de deux mesures. C'est ainsi que la médecine légale estime l'heure du décès : on mesure la température du corps à sa découverte puis un peu plus tard et on calcule quand il était à 37°C . Équation du modèle : $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Séparation des variables : $\frac{dT}{T - T_a} = -k dt$
- Intégration des deux membres : $\ln |T - T_a| = -kt + C$
- On passe à l'exponentielle – la constante $\pm e^C$ est de nouveau notée C : $T = T_a + C e^{-kt}$
- On substitue la condition initiale $T(0) = T_0$:
 $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) :
 $T = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt}$
- k d'après la deuxième mesure

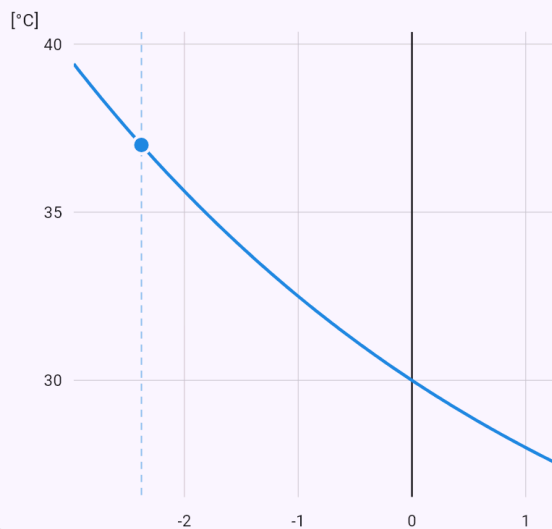
$$T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1} \ln \frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$$

- On exprime la grandeur cherchée

$$T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$$

- On remplace : $t = -\frac{1}{0,2231} \ln \frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2,378 \text{ h}$
- Un temps négatif signifie avant la première mesure (pour l'heure du décès : autant d'heures avant la découverte).

Graphique



— T • $t \approx -2,378$ t [h]

Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

500 mg toutes les 8 heures : le taux stationnaire.

Énoncé: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

Résultat

$$c_{max} \approx 20,7 \text{ mg/l}$$

$$c_{min} \approx 8,22 \text{ mg/l}$$

Étapes

- On cherche c_{max} ; données

$$D = 500 \text{ mg}, \quad V = 40 \text{ l}, \quad T_{1/2} = 6 \text{ h}, \quad \tau = 8 \text{ h}$$

- Un médicament se répartit dans le volume de distribution V ; les reins et le foie l'éliminent à une vitesse proportionnelle à la concentration : $dc/dt = -kc$ avec $k = \ln 2 / T_{1/2}$. Après une dose D , $c = (D/V) \cdot e^{(-kt)}$. Avec des doses répétées toutes les τ , les restes s'additionnent (série géométrique) et le taux se stabilise entre c_{min} et c_{max} . Pour une perfusion de débit R , $dc/dt = R/V - kc$ et la concentration tend vers $R/(kV)$.

$$\text{Équation du modèle : } \frac{dc}{dt} = -kc$$

- Concentration initiale après la dose :

$$c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12,5 \text{ mg/l}$$

- Constante d'élimination d'après la demi-vie biologique :

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0,1155 \text{ h}^{-1}$$

- Séparation des variables : $\frac{dc}{c} = -k dt$

- Intégration des deux membres : $\ln |c| = -kt + C$

- On passe à l'exponentielle – la constante $\pm e^C$ est de nouveau notée C : $c = C e^{-kt}$

- On substitue la condition initiale $c(0) = c_0$: $c_0 = C$

- La solution de la condition initiale (solution particulière) : $c = c_0 e^{-kt}$

- Part du médicament restant à la dose suivante :

$$q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0,1155 \cdot 8} \approx 0,3969$$

- On exprime la grandeur cherchée

$$c_{max} = c_0 (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{c_0}{1 - q}, \quad c_{min} = q c_{max}$$

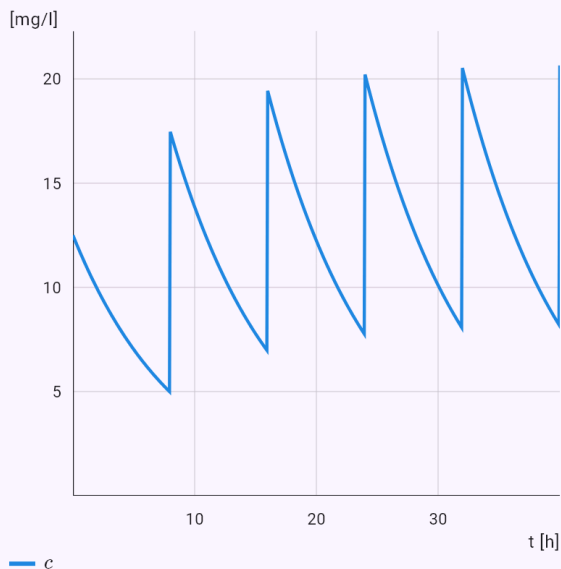
- On remplace : $c_{max} = \frac{12,5}{1 - 0,3969} \approx 20,72 \text{ mg/l}$

- On remplace : $c_{min} = 0,3969 \cdot 20,72 \approx 8,225 \text{ mg/l}$

- Facteur d'accumulation (combien de fois le taux stationnaire dépasse celui d'une dose) :

$$R = \frac{1}{1 - q} \approx 1,658$$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Mensualité d'un crédit de 1 000 000 CZK sur 20 ans à 5 %.

Énoncé: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];`

kind=loan)

Résultat

$$a \approx 6592 \text{ CZK/mois}$$

Étapes

- On cherche a ; données

$$D_0 = 1\,000\,000 \text{ CZK}, \quad r = 5\% \text{ par an}, \quad t = 20 \text{ ans},$$

- On convertit les unités : $r = 5\% \text{ par an} = 0,05 \text{ an}^{-1}$

- Avec des intérêts continus, l'intérêt s'ajoute à chaque instant proportionnellement au solde : $dB/dt = rB$, r étant le taux annuel. Des versements réguliers a augmentent le solde ($dB/dt = rB + a$), les remboursements d'un crédit diminuent la dette ($dD/dt = rD - a$). On sépare les variables ; la solution donne le solde, la durée ou la mensualité (annuité continue). Équation du modèle :

$$\frac{dD}{dt} = rD - a$$

- Séparation des variables : $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r dt$

- Intégration des deux membres : $\ln \left| D - \frac{a}{r} \right| = rt + C$

- On passe à l'exponentielle – la constante $\pm e^C$ est de nouveau notée C : $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$

- On substitue la condition initiale $D(0) = D_0$:
 $C = D_0 - \frac{a}{r}$

- La solution de la condition initiale (solution particulière) :

$$D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r} \right) e^{rt}$$

- Les intérêts continus sont un modèle : les banques capitalisent chaque mois ou chaque année ; l'écart est faible.

- On exprime la grandeur cherchée : $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$

- On remplace

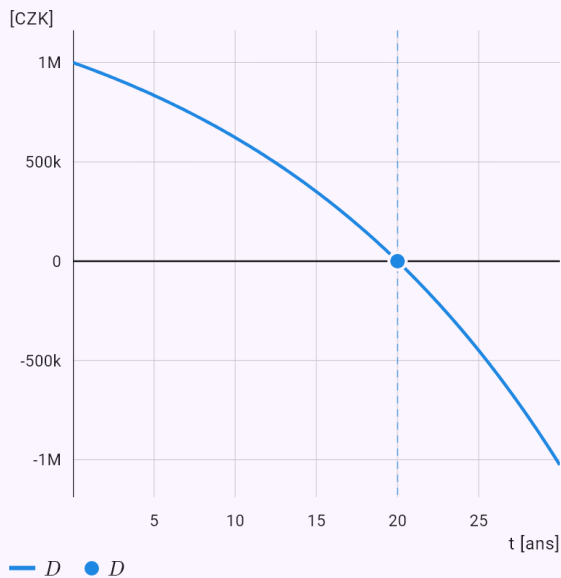
$$a = \frac{0,05(1\,000\,000 e^{0,05 \cdot 20} - 0)}{e^{0,05 \cdot 20} - 1} \approx 79\,100 \text{ CZK/an}$$

- Total payé : $a t = 1\,582\,000 \text{ CZK}$

- On convertit les unités :

$$a \approx 79\,100 \text{ CZK/an} = 6592 \text{ CZK/mois}$$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Temps de charge d'un condensateur jusqu'à la moitié de la tension.

Énoncé: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

Résultat

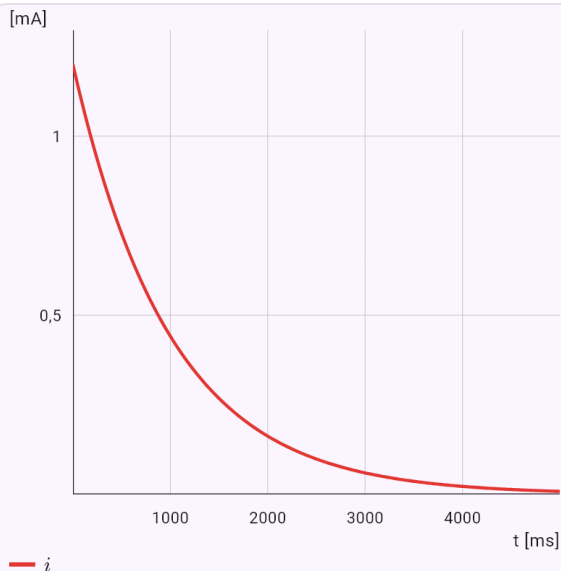
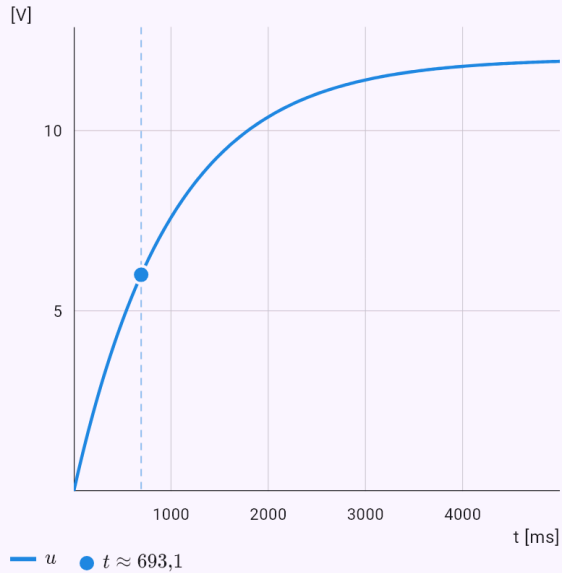
$$t \approx 693 \text{ ms}$$

Étapes

- On cherche t ; données
 $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $U = 12 \text{ V}$, $u = 6 \text{ V}$
- Lors de la charge d'un condensateur à travers une résistance, la loi des mailles donne $U = Ri + u$ et le courant charge le condensateur : $i = C \cdot du/dt$. D'où $RC \cdot du/dt + u = U$. La tension tend vers celle de la source : $u = U(1 - e^{-(t/\tau)})$, $\tau = RC$ étant la constante de temps ; le courant $i = (U/R) \cdot e^{-(t/\tau)}$ diminue. À la décharge, $u = U_0 \cdot e^{-(t/\tau)}$. Équation du modèle : $RC \frac{du}{dt} + u = U$
- Constante de temps : $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000 \text{ ms}$
- Séparation des variables : $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Intégration des deux membres : $\ln |u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- On passe à l'exponentielle - la constante $\pm e^C$ est de nouveau notée C : $u = U + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$
- On substitue la condition initiale $u(0) = 0$:
 $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- La solution de la condition initiale (solution particulière) :
 $u = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

- On exprime la grandeur cherchée : $t = -\tau \ln \left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- On remplace : $t = -1000 \ln \left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693,1 \text{ ms}$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Ressort amorti : élongation à 1 s.

Énoncé: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

$$t=1[s])$$

Résultat

$$x \approx 1,827 \text{ cm}$$

Étapes

- On cherche x ; données

$$m = 0,5 \text{ kg}, \quad k = 20 \text{ N/m}, \quad b = 1 \text{ kg/s}, \quad x_0 = 5 \text{ cm},$$

- On convertit les unités : $x_0 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

- Un corps fixé à un ressort subit la force de rappel $-kx$ (Hooke), le frottement $-b \cdot v$ et éventuellement une force excitatrice $F_0 \cdot \cos \omega t$. Selon la 2e loi de Newton $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$, une équation linéaire du 2e ordre à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique disent si le corps oscille ou revient seulement à l'équilibre. Une excitation proche de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ provoque la résonance.

$$\text{Équation du modèle : } m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- Pulsation propre (sans amortissement) :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} \approx 6,325 \text{ s}^{-1}$$

- Coefficient d'amortissement δ :

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0,5} \approx 1 \text{ s}^{-1}$$

- On cherche des solutions $x = e^{\lambda t}$; en substituant et en divisant par $e^{\lambda t}$, on obtient l'équation caractéristique : $0,5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$

- Les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 6,245i$$

- Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$; $\delta = 1$, $\omega_0 = 6,325$) : racines complexes, oscillations amorties.

- Solution de l'équation homogène :

$$x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6,245t + C_2 \sin 6,245t)$$

- On substitue les conditions dans la solution générale :

$$x(0) = 0,05, \quad x'(0) = 0, \text{ d'où}$$

$$C_1 \approx 0,05, \quad C_2 \approx 0,008006$$

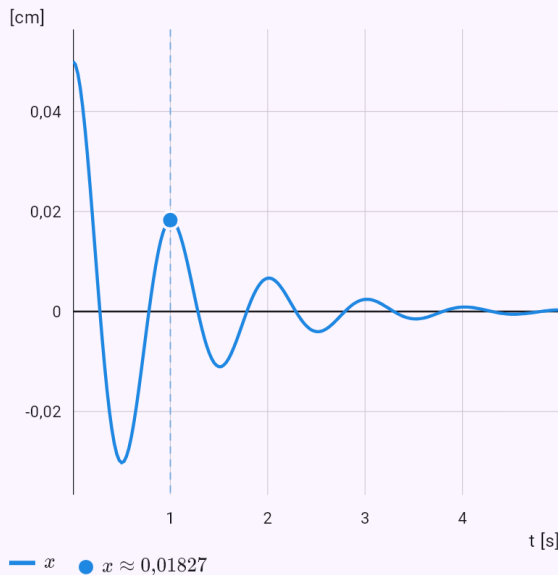
- La solution de la condition initiale (solution particulière) :

$$x = e^{-t}(0,05 \cos 6,245t + 0,008006 \sin 6,245t)$$

- On remplace : $x(1) \approx 0,01827 \text{ m}$

- On convertit les unités : $x \approx 0,01827 \text{ m} = 1,827 \text{ cm}$

Graphique



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Épidémie avec $R_0 = 2,5$: pic et nombre final d'infectés.

Énoncé: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Résultat

$$I_{max} \approx 2340 \text{ ind.}$$

$$t_{max} \approx 34,1 \text{ j}$$

$$R_{\infty} \approx 8930 \text{ ind.}$$

Étapes

- On cherche t_{max} ; données

$$N = 10\,000 \text{ ind.}, \quad I_0 = 10 \text{ ind.}, \quad R_0 = 2,5, \quad D = 7 \text{ j}$$

- La population N se divise en sensibles S , infectés I et rétablis R . Les contaminations sont proportionnelles aux rencontres : $\beta \cdot S \cdot I / N$; les infectés guérissent au taux $\gamma = 1/D$ (D , la durée de la maladie). Le système $S' = -\beta SI/N$, $I' = \beta SI/N - \gamma I$, $R' = \gamma I$ n'a pas de solution élémentaire : on le résout numériquement. On obtient cependant exactement le nombre de reproduction de base $R_0 = \beta/\gamma$, le pic, le nombre final d'infectés et le seuil d'immunité collective $1 - 1/R_0$. Équation du modèle

$$S' = -\frac{\beta SI}{N}$$

$$I' = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

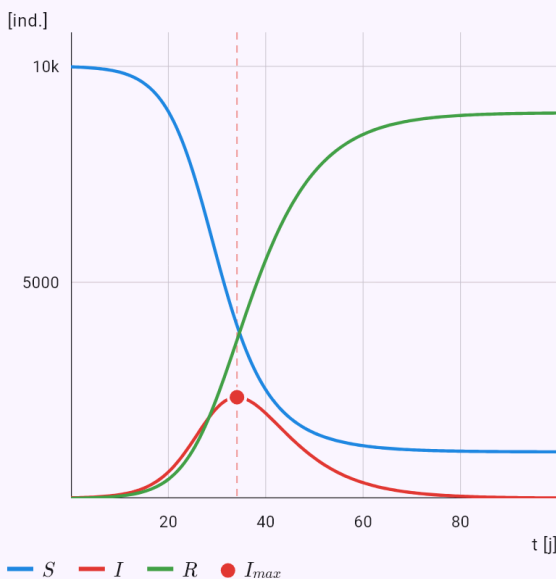
- Taux de guérison : $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0,1429 \text{ j}^{-1}$
- Taux de transmission : $\beta = R_0 \gamma \approx 0,3571 \text{ j}^{-1}$

- La somme $S + I + R = N$ est constante (les équations s'additionnent à zéro).
- Seuil d'immunité collective (part d'immunisés à partir de laquelle la maladie cesse de se propager) : $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\%$
- L'épidémie démarre car au départ $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$
- Le pic a lieu pour $S = N/R_0$; d'après l'équation de dI/dS
$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0} \ln S = C \Rightarrow I_{max} = I$$
- On résout l'équation numériquement (dichotomie)
$$\ln \frac{S_{\infty}}{S_0} = \frac{R_0(S_{\infty} - N)}{N} \Rightarrow S_{\infty} \approx 1072 \text{ ind.}$$
- Au total, tombent malades : $R_{\infty} = N - S_{\infty} \approx 8928 \text{ ind.} \text{ (89,3\%)}$
- Le système n'a pas de solution élémentaire : on le résout numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas 0,05 sur $[0 ; 100]$
- D'après la solution numérique : $t_{max} \approx 34,1 \text{ j}$

Graphique

Au cours du temps

Plan de phase



Les grandeurs du modèle au cours du temps, calculées à partir de la solution ; la réponse est marquée.

Proie et prédateur : équilibre, stabilité et période.

Énoncé: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo]; c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

Résultat

$$[x^*; y^*] \approx [80; 50]$$

$$T \approx 14,9 \text{ mois}$$

Étapes

- On cherche T ; données

$$a = 0,5 \text{ mois}^{-1}, \quad b = 0,01 \text{ (ind.} \cdot \text{mois)}^{-1}, \quad c = 0,4 \text{ m}$$

- Les proies x se multiplient sans prédateurs (ax), les prédateurs y meurent sans proies ($-cy$). Les rencontres, proportionnelles à xy , retirent des proies ($-bxy$) et nourrissent les prédateurs ($+dxy$). Le système $x' = ax - bxy$, $y' = -cy + dxy$ (Lotka, Volterra) a l'équilibre $[c/d; a/b]$, aux valeurs propres imaginaires pures : les populations oscillent périodiquement, les prédateurs avec un retard. Résolution numérique ; équilibres et intégrale première exacts. Équation du modèle

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$

- Équilibres – toutes les dérivées sont nulles

$$x(a - by) = 0, \quad y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0; 0], \quad \left[\frac{c}{d}; \frac{a}{b} \right] \approx [80]$$

- Stabilité par linéarisation – matrice jacobienne du système

$$J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$$

- Au point $[0; 0]$ valeurs propres $\lambda_1 = -0,4$, $\lambda_2 = 0,5$ – col (instable).

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}$$

- Au point $[80; 50]$ valeurs propres $\lambda_{1,2} = \pm 0,4472i$ – centre (oscillations autour de l'équilibre).

$$\begin{pmatrix} 0 & -0,8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

- En divisant les équations et en séparant, on obtient une intégrale première, constante le long d'une trajectoire : $V = dx - c \ln x + by - a \ln y = C$

- Comme V ne varie pas le long d'une trajectoire, les trajectoires sont des courbes fermées : les populations oscillent périodiquement.

- Période des petites oscillations autour de l'équilibre (d'après les valeurs propres) : $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14,05 \text{ mois}$

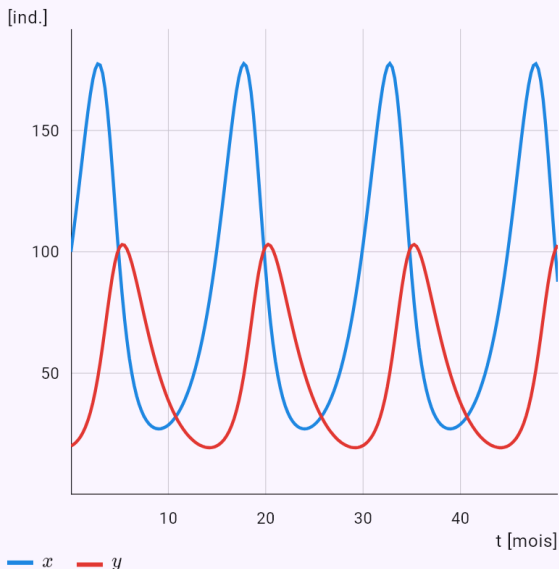
- Le système n'a pas de solution élémentaire : on le résout numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas 0,0125 sur $[0; 50]$

- D'après la solution numérique : $T \approx 14,95 \text{ mois}$

Graphique

Au cours du temps

Plan de phase



Bientôt

Nous travaillons sur ces types d'exercices ou les avons prévus. L'ordre peut changer selon ce dont vous avez le plus besoin.

Équations et inéquations

- Équations du second degré incomplètes par mise en facteur ou racine carrée ($x^2 = 9$) au lieu du discriminant.

Fonctions, dérivées et intégrales

- Applications de l'intégrale avec paramètres – formules générales (sphère de rayon r , ellipse, cône).
- Aire coloriée et solide en 3D pour les courbes paramétrées et polaires.
- Applications physiques des dérivées et des intégrales (vitesse, accélération, travail, centre de gravité).
- La forme complexe de la série de Fourier et le spectre.
- Les intégrales de Riemann et de Lebesgue de fonctions particulières (fonctions de Dirichlet et de Riemann).

Équations différentielles

- Systèmes d'équations différentielles saisis comme équations (les applications les ont déjà) et leur portrait de phase.
- Transformée de Laplace avec la fonction de Heaviside, les décalages et les seconds membres périodiques.

Autres domaines

- Vecteurs – norme, produit scalaire, vectoriel et mixte, angles, aires et volumes.
- Matrices – opérations, déterminant, rang, matrice inverse, valeurs et vecteurs propres.
- Problèmes de construction – triangles, quadrilatères et cercles à partir d'éléments donnés, programme de construction et nombre de solutions.

- Nombres complexes sous forme trigonométrique et exponentielle, la formule de Moivre, racines n -ièmes.
- La règle de Cramer pour les systèmes linéaires.
- Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes et de surface.
- Mode exact et mode numérique (décimaux au lieu de fractions et de racines).
- Problèmes – mettre l'énoncé en équations et les résoudre.