

MathSolver – manual

Qué puede resolver MathSolver, cómo introducir un problema y cómo es el resultado.

MathSolver resuelve problemas a partir de una foto o escritos a mano y, para cada resultado, muestra el procedimiento tal como se hace en clase – paso a paso, con explicaciones y, cuando tiene sentido, con una gráfica.

Cada capítulo trata un tipo de problemas: qué esperar de la solución, cómo introducir el problema y ejemplos de resultados reales de la aplicación. Las limitaciones conocidas, si las hay, aparecen al final del capítulo.

Índice

1. Cómo introducir un problema
2. Ecuaciones e inecuaciones lineales
3. Ecuaciones de segundo grado
4. Ecuaciones de grado superior
5. Ecuaciones racionales
6. Ecuaciones irracionales
7. Ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas
8. Valor absoluto
9. Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas
10. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones
11. Sistemas de ecuaciones
12. Ecuaciones e inecuaciones con parámetro
13. Operaciones con expresiones
14. Límites
15. Derivadas
16. Estudio de una función
17. Polinomio de Taylor
18. Integrales indefinidas
 - Integrales inmediatas y cambio de variable
 - Integración por partes

Funciones racionales

Funciones trigonométricas

Funciones hiperbólicas

Raíces

19. Integrales definidas y sus aplicaciones

Integral definida

Integrales impropias

Área bajo una curva y entre curvas

Longitud de una curva

Volumen de un sólido de revolución

Área lateral de un sólido de revolución

Curvas paramétricas y en coordenadas polares

Curvas dadas por una ecuación

20. Series infinitas

Series numéricas

Series de potencias

Serie de Taylor

21. Series de Fourier

22. Ecuaciones diferenciales

23. Recurrencias y funciones generatrices

24. Aplicaciones de ecuaciones diferenciales

25. Próximamente

Cómo introducir un problema

Puedes fotografiar el problema – antes de enviarlo, recorta la foto para que solo quede el enunciado. La aplicación lo reconoce y muestra una vista previa; si la transcripción no es correcta, corrígela en el campo bajo la vista previa. En ese mismo campo también puedes escribir el problema directamente.

Si el enunciado es una expresión sin signo igual, eliges con un chip qué hacer con ella: simplificar, desarrollar, factorizar, descomponer en fracciones parciales, derivar, hacer el estudio de la función, calcular un polinomio de Taylor, integrar, sumar una serie o calcular una serie de Fourier. Ajusta la opción «Enfoque» de la pantalla de inicio a lo que estés practicando – preselecciona el chip adecuado.

Las ecuaciones y las inecuaciones se resuelven directamente. Cuando hay más de un método (el método para un sistema, para valores absolutos, la derivada por definición), lo eliges con un chip; el resultado se recalcula al instante. Las ecuaciones e inecuaciones se resuelven en los números reales; con el chip «Resolver en» se elige en su lugar $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}^+$. En un límite, un chip elige si la indeterminación se resuelve transformando o directamente con la regla de L'Hôpital.

Cómo introducirlo

$x^2 + 3x - 4$	Las potencias se escriben con ^; la multiplicación por un número o una variable puede omitirse (3x, 2xy).
$(x+1)/(x-2)$	Fracciones con barra; pon entre paréntesis un numerador o denominador que no sea un solo número o letra.
$\sqrt{x+1}$, $x^{1/3}$	Raíz cuadrada sqrt(...), las demás raíces como potencia con exponente fraccionario.
$ 2x - 1 $	Valor absoluto entre barras verticales. Si la entrada se puede leer de varias maneras ($ x y z $), la aplicación ofrece las lecturas para elegir; para que sea inequívoca, pon el valor absoluto entre paréntesis: $2x(x - 1)$.
$\ln x$, $\log x$, $\log_2 x$	ln es el logaritmo natural, log (o lg) el decimal, log_2 el de base 2.
$\sin x$, $\cos 2x$, $\tan x$, $\cot x$	Funciones trigonométricas; un argumento sin paréntesis es el término justo después de la función

$(\cos 2x = \cos(2x))$.

$\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\operatorname{arsinh} x$

Funciones hiperbólicas $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, $\coth$ y sus inversas arsinh , arcosh , artanh , arcoth (también asinh , $\operatorname{arcsinh}$, ...).

$\sin \alpha = 1/2$, $\sin(x + 30^\circ)$

Un ángulo en grados: una letra griega como incógnita (α , β , ... o directamente α), o grados en un número; las letras latinas están en radianes.

$\sin x = 1/2$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Raíces en un intervalo – después de una coma o en la línea siguiente ($x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ o $0 \leq x < 2\pi$).

π , e , ∞

El número π , el número e , infinito ∞ .

$x \sin x$, $2x(x+1)$

Deja un espacio entre una variable y una función ($x \sin x$) – $x \sin x$ se lee como un producto de letras.

$2x + 3y = 7$

$x - y = 1$

Escribe un sistema de ecuaciones o inecuaciones por líneas, una en cada línea.

$(3+4i)/(1-2i)$

Números complejos: i es la unidad imaginaria (en expresiones y ecuaciones).

$x^2 < 10$, $x \in \mathbb{Z}$

El conjunto tras una coma: $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$ (o $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$, «en $\mathbb{N}$ »); $\mathbb{N}$ sin el cero.

Limitaciones conocidas

- El resultado se da en forma exacta (fracciones, raíces, π) con un valor aproximado; aún no hay un modo puramente numérico.

Ecuaciones e inecuaciones lineales

La aplicación transforma una ecuación lineal como se hace en clase – quita los paréntesis, pasa la incógnita a un lado y divide. En una inecuación vigila el cambio de sentido al multiplicar por un número negativo y escribe el resultado como intervalo; la gráfica muestra ambos miembros como rectas y marca la solución en el eje x.

Ejemplos

Una ecuación con paréntesis.

Enunciado: $3(x - 2) = 2x + 5$

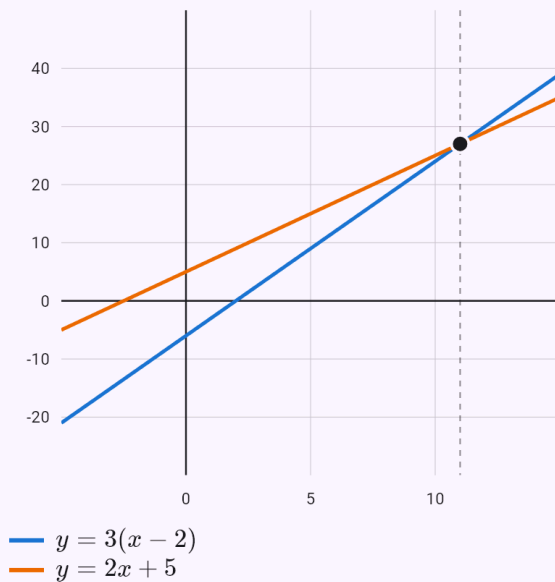
Resultado

$$x = 11$$

Pasos

- Pasamos todo a un lado: $x - 11 = 0$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $x = 11$

Gráfica



Intersecciones de las gráficas:

- (11; 27)

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Una inecuación – dividir por un número negativo cambia el sentido.

Enunciado: $2x - 3 < 5x + 6$

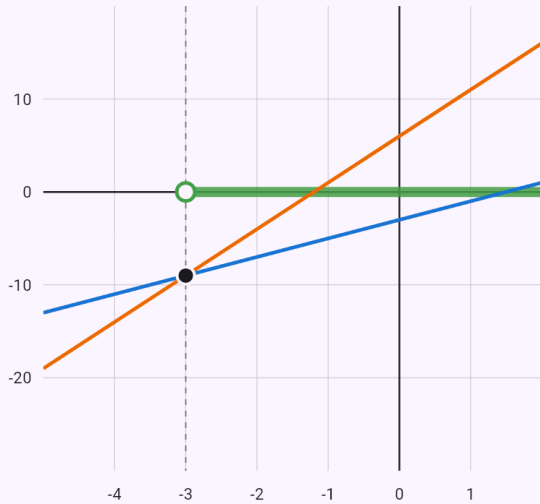
Resultado

$$x \in (-3, \infty)$$

Pasos

- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $-3x < 9$
- Dividimos entre el número negativo -3 ; el signo de la desigualdad se invierte: $x > -3$

Gráfica



$y = 2x - 3$
 $y = 5x + 6$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

● $(-3; -9)$

Ecuaciones de segundo grado

La aplicación lleva una ecuación de segundo grado a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y la resuelve con el discriminante y la fórmula general; también reconoce una raíz doble. Si la ecuación no tiene solución real, lo dice, y el botón «Mostrar solución compleja» muestra las raíces complejas.

Ejemplos

Dos raíces reales.

Enunciado: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Resultado

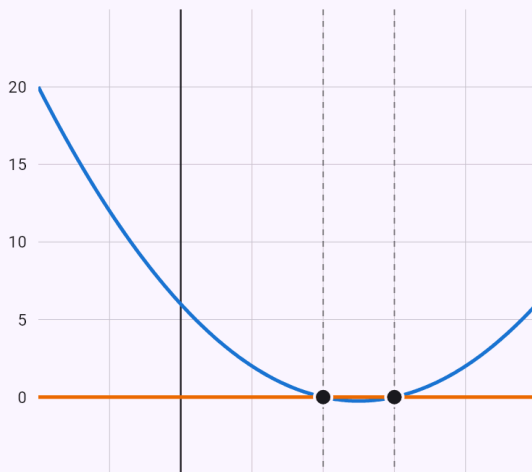
$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

Pasos

- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Gráfica



-1 0 1 2 3 4

— $y = x^2 - 5x + 6$
— $y = 0$

Intersecciones de las gráficas:

• (2; 0) • (3; 0)

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Discriminante negativo – raíces complejas.

Enunciado: $x^2 + 2x + 5 = 0$

Mostrar solución compleja

Resultado

$$x_1 = -1 + 2i$$

$$x_2 = -1 - 2i$$

Pasos

- Calculamos el discriminante:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

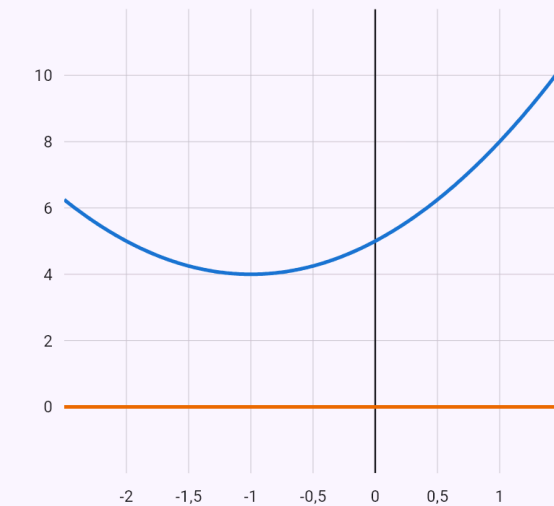
- El discriminante es negativo; en los números complejos:

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$$

- Sustituimos en la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

Gráfica



— $y = x^2 + 2x + 5$
— $y = 0$

Las gráficas no se cortan: la ecuación no tiene solución real.

Ecuaciones de grado superior

Una ecuación bicuadrada la aplicación la convierte en una de segundo grado mediante un cambio de variable. Una ecuación general de grado superior la factoriza con la regla de Ruffini: busca las raíces entre los divisores del término independiente y divide por cada raíz encontrada hasta que queda una ecuación de segundo grado.

Ejemplos

Una ecuación bicuadrada con el cambio $y = x^2$.

Enunciado: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Resultado

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -1$$

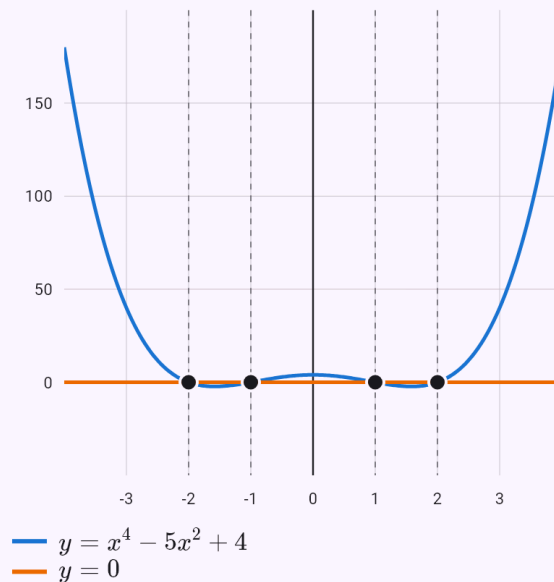
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 2$$

Pasos

- El cambio de variable $u = x^2$ la convierte en una ecuación cuadrática: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$$
- Deshacemos el cambio de variable: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Deshacemos el cambio de variable: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Gráfica



Intersecciones de las gráficas:

- $(-2; 0)$ • $(-1; 0)$ • $(1; 0)$ • $(2; 0)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Regla de Ruffini – raíces entre los divisores del término independiente.

Enunciado: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Resultado

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

Pasos

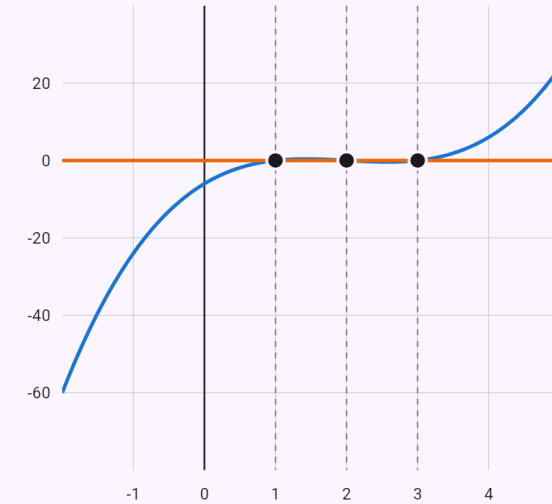
- Las raíces racionales solo pueden ser divisores del término independiente -6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
- Con la regla de Ruffini comprobamos la raíz $x = 1$ y dividimos el polinomio:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Gráfica



— $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
— $y = 0$

Intersecciones de las gráficas:

• $(1; 0)$ • $(2; 0)$ • $(3; 0)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Ecuaciones racionales

En una ecuación con la incógnita en un denominador la aplicación establece primero las condiciones, luego multiplica por el denominador común y resuelve. Compara las raíces con las condiciones y descarta las que no las cumplen.

Ejemplos

Condiciones, denominador común, ecuación de segundo grado.

Enunciado: $(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x$

Resultado

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$

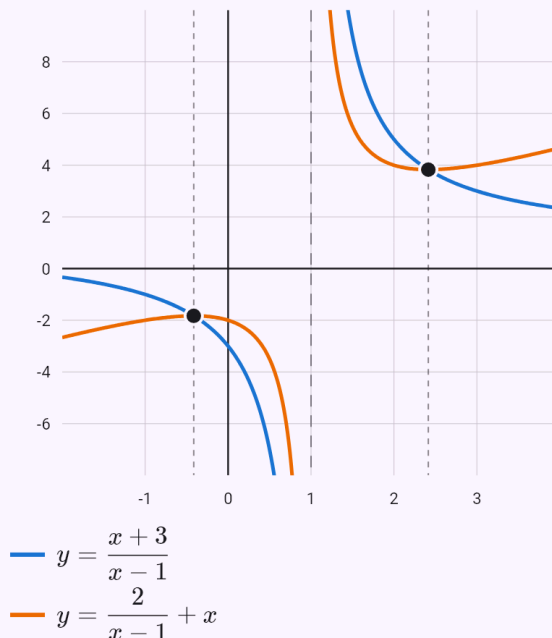
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Condiciones: $x \neq 1$

Pasos

- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $x \neq 1$
- Multiplicamos ambos lados por el denominador $x - 1$:
 $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
- La raíz $x = 1 - \sqrt{2}$ cumple las condiciones.
- La raíz $x = 1 + \sqrt{2}$ cumple las condiciones.

Gráfica



Intersecciones de las gráficas:

$$\bullet \left(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right) \quad \bullet \left(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Ecuaciones irracionales

Una ecuación con la incógnita bajo una raíz la aplicamos la resolvemos aislando la raíz y elevando al cuadrado. Elevar al cuadrado puede añadir raíces que no cumplen la ecuación – por eso siempre sigue una comprobación y se descartan las raíces que no la superan.

Ejemplos

Elevar al cuadrado y comprobar – una de las raíces no cumple la ecuación.

Enunciado: $\sqrt{x+5} = x - 1$

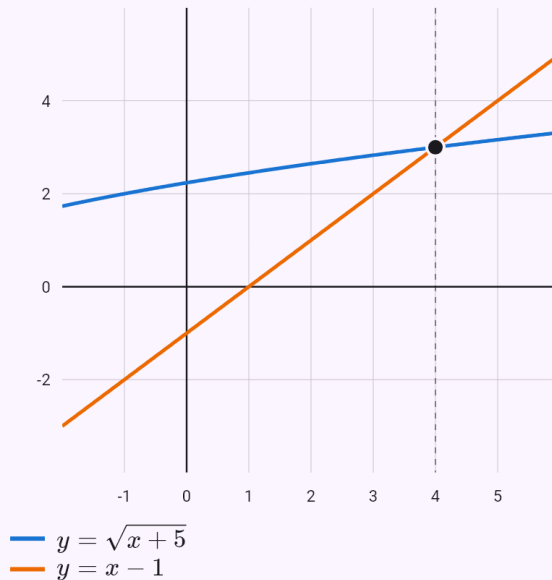
Resultado

$$x = 4$$

Pasos

- Elevamos ambos lados al cuadrado (no es una transformación equivalente, así que comprobamos las raíces): $x + 5 = (x - 1)^2$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- Comprobación para $x = -1$: Izq. = 2, Der. = -2, Izq. $\neq$ Der.: la raíz no es válida.
- Comprobación para $x = 4$: Izq. = 3, Der. = 3, Izq. = Der.: la raíz es válida.

Gráfica



Intersecciones de las gráficas:

● (4; 3)

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Limitaciones conocidas

- Las inecuaciones irracionales todavía no se resuelven.

Ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas

Una ecuación exponencial la aplicación la resuelve pasando a la misma base, tomando logaritmos o con un cambio de variable; una logarítmica, juntando los logaritmos según sus propiedades y eliminando el logaritmo, siempre con las condiciones. Las inecuaciones las resuelve mediante la monotonía – con una base menor que 1 el sentido cambia.

Ecuaciones con bases distintas: $a^x + b^x = c^x$ con bases de dos primos ($25^x + 10^x = 4^x$) se dividen por una potencia y con $t = (5/2)^x$ pasan a cuadráticas; los logaritmos de bases distintas se pasan a una sola ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Los logaritmos cuyas bases son potencias de un mismo número ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$) se pasan a una sola base ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), se multiplica la ecuación y se agrupan los logaritmos. Un logaritmo con la incógnita en la base ($\log_x 8 = 3$) se elimina por la definición ($x^3 = 8$) con las condiciones $x > 0$, $x \neq 1$. Una ecuación con la incógnita en la base y en el exponente ($x^{\log x} = 100$) se resuelve tomando logaritmos y con la sustitución $t = \log x$. Las inecuaciones con la sustitución $t = \log(x + 1)$ y los sistemas de inecuaciones logarítmicas y exponenciales se resuelven como inecuaciones sueltas, mediante la monotonía.

Las ecuaciones e inecuaciones con funciones hiperbólicas se reescriben según la definición ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, ...) como exponenciales y se resuelven con la sustitución $t = e^x$; $\operatorname{arsinh} x = c$, con la función inversa ($x = \sinh c$).

Ejemplos

El cambio de variable $t = 2^x$.

Enunciado: $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

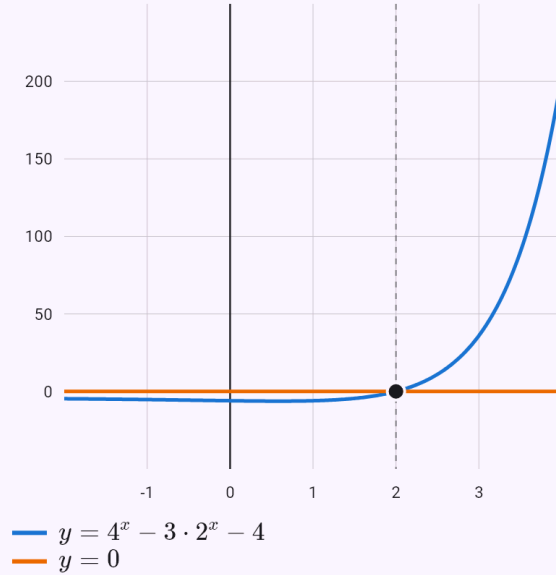
Resultado

$$x = 2$$

Pasos

- Hacemos el cambio de variable $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- La ecuación $2^x = -1$ no tiene solución real.
- Deshacemos el cambio de variable: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Gráfica



Intersecciones de las gráficas:

- $(2; 0)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Juntar logaritmos, condiciones.

Enunciado: $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

Resultado

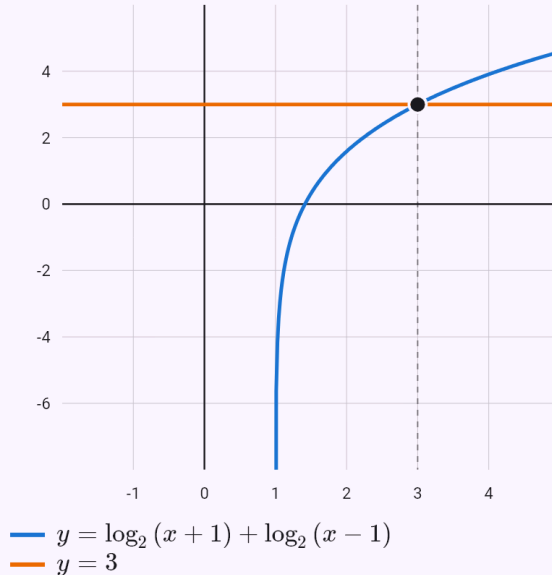
$$x = 3$$

Condiciones: $x > 1$

Pasos

- Dominio – condiciones: $x > -1, x > 1 \Rightarrow x > 1$
- Juntamos los logaritmos según sus propiedades:
 $\log_2((x-1)(x+1)) = 3$
- Eliminamos el logaritmo: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 9 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Sustituimos en la fórmula general:
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 6}{2}$
- La raíz $x = -3$ no cumple la condición $x > 1$, así que no es solución.
- La raíz $x = 3$ cumple las condiciones.

Gráfica



Intersecciones de las gráficas:

- $(3; 3)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x.

Bases distintas: dividimos entre 4^d y sustituimos $t = (5/2)^d$.

Enunciado: $25^d + 10^d = 4^d$

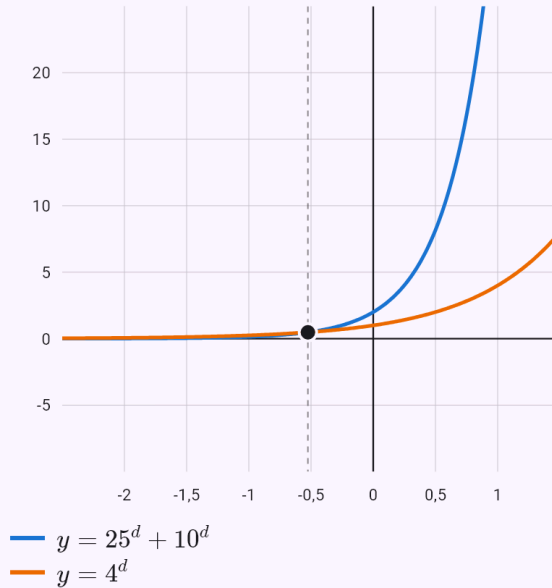
Resultado

$$d = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Pasos

- Dividimos la ecuación entre la expresión positiva 4^d :
 $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^d = 1$
- Hacemos el cambio de variable $t = \left(\frac{5}{2}\right)^d$:
 $t^2 + t - 1 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Sustituimos en la fórmula general:
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- La ecuación $\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ no tiene solución real.
- Deshacemos el cambio de variable
 $\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$

Gráfica



Intersecciones de las gráficas:

- $\left(\log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right); 0,4829\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de d.

Base menor que 1 – el sentido de la desigualdad cambia.

Enunciado: $(1/2)^x > 8$

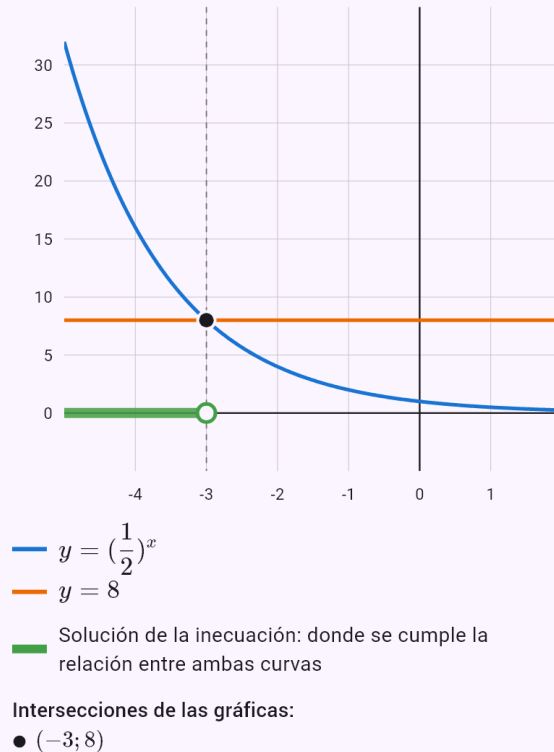
Resultado

$$x \in (-\infty, -3)$$

Pasos

- Escribimos ambos lados como potencias de la misma base: $2^{-x} > 2^3$
- La función exponencial de base 2 es creciente: los exponentes cumplen la desigualdad con el mismo signo: $-x > 3$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $-x > 3$
- Dividimos entre el número negativo -1 ; el signo de la desigualdad se invierte: $x < -3$
- La solución de esta inecuación es $x \in (-\infty, -3)$

Gráfica



Tangente hiperbólica por la definición – sustitución $t = e^{2x}$.

Enunciado: $\tanh x = 1/2$

Resultado

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Pasos

- Sustituimos las definiciones

$$\tanh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Hacemos el cambio de variable $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Resolvemos: $t = 3$
- Deshacemos el cambio de variable:
 $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

La incógnita en la base – por la definición; la raíz -1 no cumple las condiciones.

Enunciado: $\log_x (2x+3) = 2$

Resultado

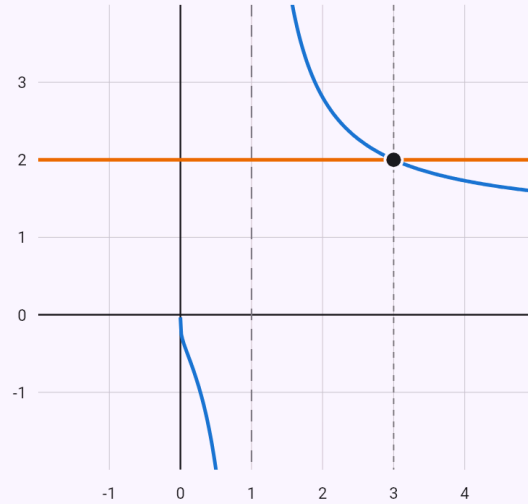
$$x = 3$$

Condiciones: $x > 0$, $x \neq 1$

Pasos

- Dominio – condiciones: $x > 0$, $x \neq 1$
- Eliminamos el logaritmo: $x^2 = 2x + 3$
- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
- La raíz $x = -1$ no cumple la condición $x > 0$, $x \neq 1$, así que no es solución.
- La raíz $x = 3$ cumple las condiciones.

Gráfica



— $y = \log_x (2x + 3)$
— $y = 2$

Intersecciones de las gráficas:

• $(3; 2)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

La incógnita en la base y el exponente – tomamos logaritmos, sustitución $t = \log x$.

Enunciado: $x^{(\log x)} = 100$

Resultado

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

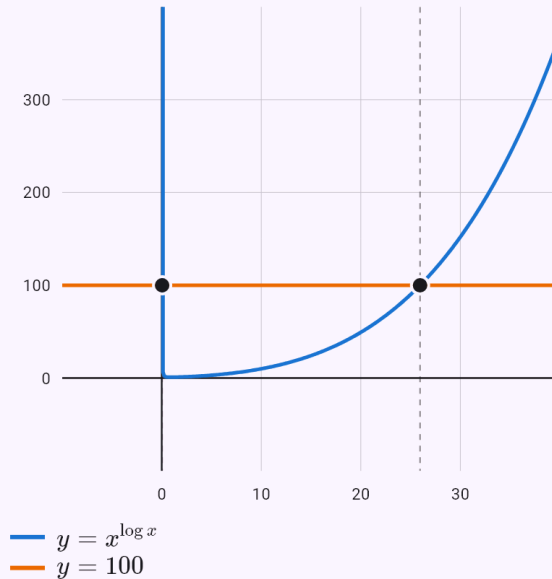
$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Condiciones: $x > 0$

Pasos

- Tomamos logaritmos en ambos lados:
 $\log(x^{\log x}) = 2 \Rightarrow \log x \cdot \log x = 2$
- Dominio – condiciones: $x > 0$
- Hacemos el cambio de variable $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Sustituimos en la fórmula general:
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Deshacemos el cambio de variable:
 $\log x = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Deshacemos el cambio de variable:
 $\log x = \sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{\sqrt{2}}$
- La raíz $x = 10^{-\sqrt{2}}$ cumple las condiciones.
- La raíz $x = 10^{\sqrt{2}}$ cumple las condiciones.

Gráfica



Intersecciones de las gráficas:

$$\bullet \left(10^{-\sqrt{2}}; 100\right) \quad \bullet \left(10^{\sqrt{2}}; 100\right)$$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Limitaciones conocidas

- Los logaritmos de bases distintas que no son potencias de un mismo número ($\log_2 x + \log_3(x + 1) = 2$) se resuelven solo numéricamente.
- Las ecuaciones hiperbólicas que llevan a una ecuación de 4.º grado en e^x ($\cosh^2 x - 3 \sinh x = 3$) solo se resuelven numéricamente; las inecuaciones con funciones hiperbólicas inversas todavía no se admiten.

Valor absoluto

Las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto la aplicación las resuelve de dos maneras, que eliges con un chip: «Por definición» – un atajo que desarrolla $|a| = b$ o $|a| < b$ – y «Puntos críticos» – dividiendo la recta numérica en intervalos en los que cada valor absoluto tiene signo fijo. Si no eliges, escoge ella misma la más adecuada.

Los valores absolutos anidados ($||x| - 2| = 1$) los resuelve igual: por definición paso a paso de fuera hacia dentro, por puntos críticos de dentro hacia fuera – primero los puntos críticos de los valores absolutos interiores y luego, en cada intervalo, el valor absoluto que queda.

Una inecuación $|f| < |g|$ (solo un valor absoluto en cada lado) también se puede resolver con el chip «Elevando al cuadrado»: ambos lados son no negativos, así que se eleva al cuadrado y se resuelve como cuadrática. Una expresión con valores absolutos sola ($|x - 1| + |x + 2|$) se simplifica por tramos: puntos críticos, tabla de signos y, en cada intervalo, la expresión sin valores absolutos.

Ejemplos

Un valor absoluto – desarrollado por definición.

Enunciado: $|2x - 1| = 5$

Resultado

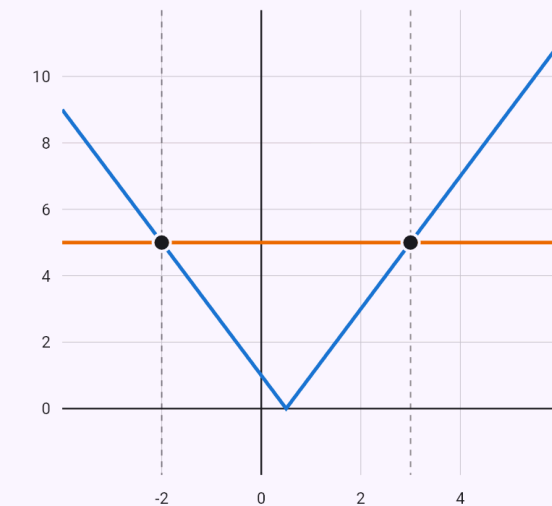
$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3$$

Pasos

- Hay un solo valor absoluto y al otro lado un número: basta con aplicar la definición.
- Por la definición, $|2x - 1| = 5$ se cumple si y solo si $2x - 1 = 5$ o $2x - 1 = -5$
- Resolvemos: $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Resolvemos: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Gráfica



$y = |2x - 1|$
 $y = 5$

Intersecciones de las gráficas:

• $(-2; 5)$ • $(3; 5)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Dos valores absolutos – el método de los puntos críticos.

Enunciado: $|x - 1| + |x + 2| < 5$

Resultado

$$x \in (-3, 2)$$

Pasos

- Quitamos los valores absolutos con el método de los puntos críticos: dividen la recta numérica en intervalos y en cada uno las expresiones de dentro mantienen el signo.

- Puntos críticos de las expresiones dentro de los valores absolutos:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty, -2)$	$[-2, 1)$	$[1, \infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$

- Resolvemos: $-2x - 1 < 5$

- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $-2x < 6$

- Dividimos entre el número negativo -2 ; el signo de la desigualdad se invierte: $x > -3$

- La solución de esta inecuación es $x \in (-3, \infty)$

- Intersección con el intervalo $(-\infty, -2)$: $x \in (-3, -2)$

- En el intervalo $[-2, 1)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(1 - x) + (x + 2) < 5$

- La incógnita se ha cancelado y queda la afirmación verdadera $3 < 5$: todo el intervalo $[-2, 1)$ es solución.

- En el intervalo $[1, \infty)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(x - 1) + (x + 2) < 5$

- Resolvemos: $2x + 1 < 5$

- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $2x < 4$

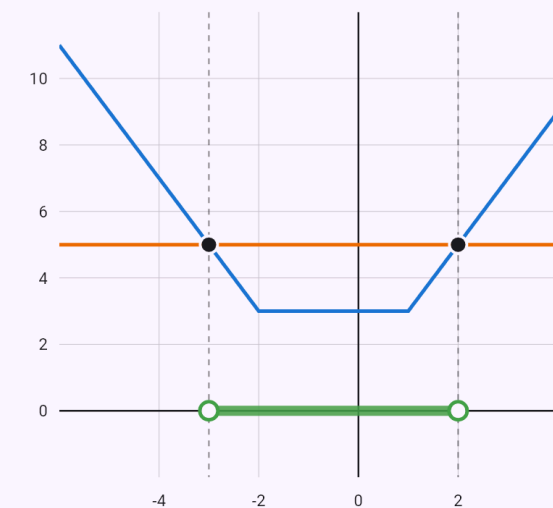
- Dividimos entre el número positivo 2 ; el signo de la desigualdad se mantiene: $x < 2$

- La solución de esta inecuación es $x \in (-\infty, 2)$

- Intersección con el intervalo $[1, \infty)$: $x \in [1, 2)$

- La solución es la unión de los resultados: $x \in (-3, 2)$

Gráfica



— $y = |x - 1| + |x + 2|$
— $y = 5$

— Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

• $(-3; 5)$ • $(2; 5)$

Valor absoluto anidado – por definición de fuera hacia dentro.

Enunciado: $||x| - 2| = 1$

Resultado

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -1$$

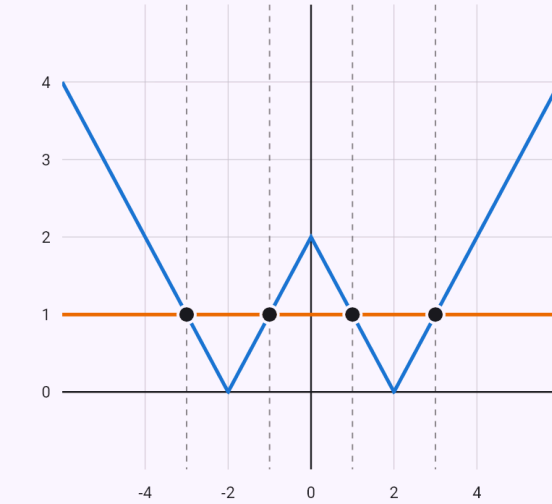
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 3$$

Pasos

- Hay un solo valor absoluto y al otro lado un número: basta con aplicar la definición.
- Por la definición, $||x| - 2| = 1$ se cumple si y solo si $|x| - 2 = 1$ o $|x| - 2 = -1$
- Despejamos el valor absoluto: $|x| = 3$
- Por la definición, $|x| = 3$ se cumple si y solo si $x = 3$ o $x = -3$
- Despejamos el valor absoluto: $|x| = 1$
- Por la definición, $|x| = 1$ se cumple si y solo si $x = 1$ o $x = -1$

Gráfica



$$\begin{aligned} \text{— } y &= ||x| - 2| \\ \text{— } y &= 1 \end{aligned}$$

Intersecciones de las gráficas:

$$\bullet (-3; 1) \quad \bullet (-1; 1) \quad \bullet (1; 1) \quad \bullet (3; 1)$$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Valores absolutos en ambos lados – elevar al cuadrado.

Enunciado: $|x - 1| < |2x + 3|$ Elevando al cuadrado

Resultado

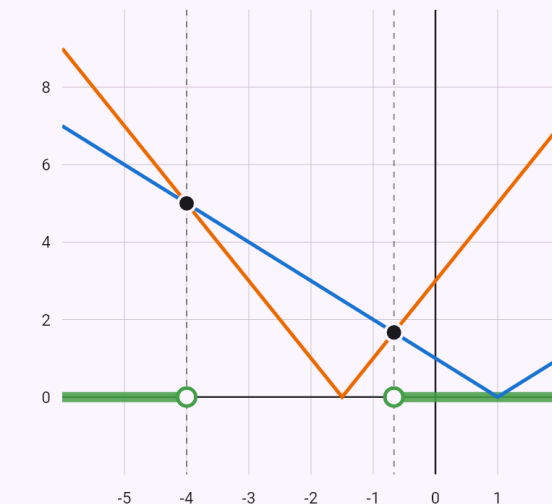
$$x \in (-\infty, -4) \cup \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$$

Pasos

- En ambos lados hay solo un valor absoluto: ambos son no negativos, así que podemos elevar la desigualdad al cuadrado (es una transformación equivalente).
- Elevamos ambos lados al cuadrado:
 $(x - 1)^2 < (2x + 3)^2$
- Pasamos todo a un lado: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Factorizamos: $-(x + 4)(3x + 2) < 0$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{2}{3}$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \infty)$
-1	—	—	—
$x + 4$	—	+	+
$3x + 2$	—	—	+
$-(x + 4)(3x + 2)$	—	+	—

Gráfica



$$\begin{aligned} \text{— } y &= |x - 1| \\ \text{— } y &= |2x + 3| \end{aligned}$$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

$$\bullet (-4; 5) \quad \bullet \left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Expresión con valores absolutos – por tramos en los intervalos.

Enunciado: $|x - 1| + |x + 2|$

Resultado

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty, -2) \\ 3, & x \in [-2, 1) \\ 2x + 1, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Pasos

- Quitamos los valores absolutos con el método de los puntos críticos: dividen la recta numérica en intervalos y en cada uno las expresiones de dentro mantienen el signo.

- Puntos críticos de las expresiones dentro de los valores absolutos:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty, -2)$	$[-2, 1)$	$[1, \infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ quitamos los valores absolutos según los signos:

$$(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$$

- En el intervalo $[-2, 1)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(1 - x) + (x + 2) = 3$

- En el intervalo $[1, \infty)$ quitamos los valores absolutos según los signos: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Limitaciones conocidas

- Una expresión con valores absolutos se simplifica solo en toda la recta numérica, no en un intervalo dado; elevar al cuadrado se ofrece solo en una inecuación con un único valor absoluto en cada lado.

Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

La aplicación reduce la ecuación a ecuaciones básicas como $\sin x = a$ y las resuelve en la circunferencia unitaria: halla los ángulos de una vuelta y les suma múltiplos del periodo ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). La circunferencia aparece dibujada en el procedimiento.

Prefiere las fórmulas conocidas – ángulo doble y mitad, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, suma a producto –, después la factorización, el cambio $t = \sin x$, la división de una ecuación homogénea entre $\cos^n x$ y el ángulo auxiliar en $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Además comprueba el resultado numéricamente en un periodo completo.

Una incógnita con letra latina (x , t) está en radianes, con letra griega (α , β , ...) en grados – igual que una entrada con el signo $^\circ$ ($\sin(x + 30^\circ)$). Para obtener las raíces en un intervalo, escríbalo después de una coma o en la línea siguiente.

Una inecuación se resuelve con un arco de la circunferencia unitaria, una más compleja con los ceros en un periodo; el resultado son intervalos con el periodo.

Ejemplos

Dos ramas de soluciones, los ángulos en la circunferencia unitaria.

Enunciado: $\sin x = 1/2$

Resultado

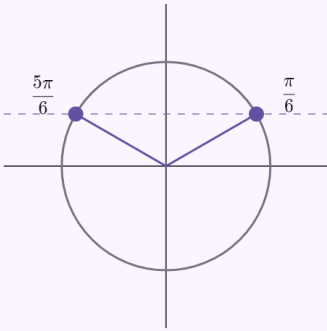
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

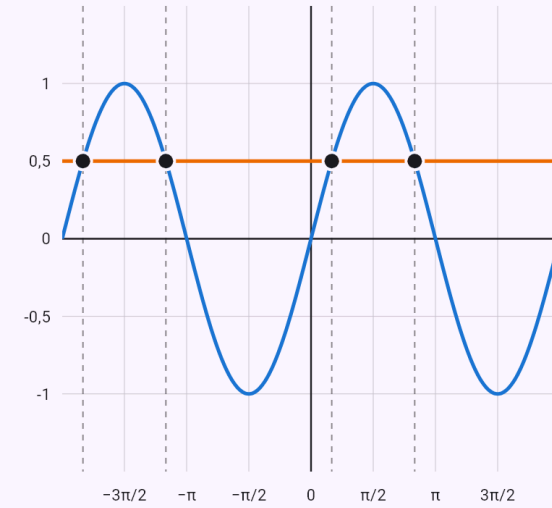
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Ecuación básica $\sin x = \frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones:
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Gráfica



— $y = \sin x$
— $y = \frac{1}{2}$

Intersecciones de las gráficas:

• $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ • $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ • $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
• $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

El cambio $t = \sin x$ y una ecuación de segundo grado.

Enunciado: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Hacemos el cambio de variable $t = \sin x$:

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

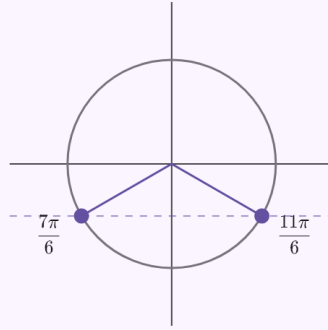
- Calculamos el discriminante:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

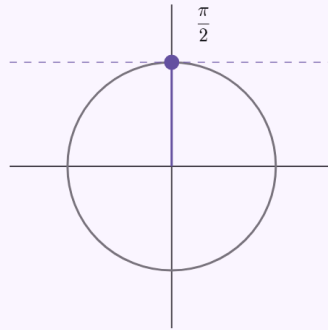
- Sustituimos en la fórmula general:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

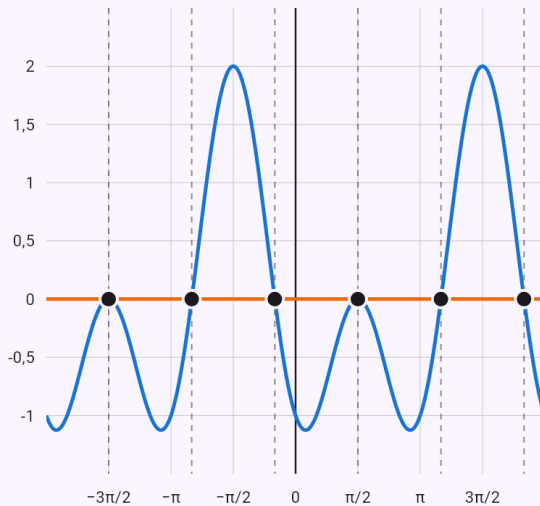
- Ecuación básica $\sin x = -\frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Ecuación básica $\sin x = 1$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{2}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Gráfica



$$y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$$

$$y = 0$$

Intersecciones de las gráficas:

$$\bullet \left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right) \bullet \left(-\frac{5\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(-\frac{\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

$$\bullet \left(\frac{7\pi}{6}; 0\right) \bullet \left(\frac{11\pi}{6}; 0\right)$$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

La fórmula de sin 2x y la factorización.

Enunciado: $\sin 2x = \cos x$

Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

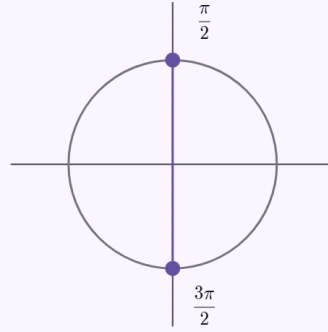
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

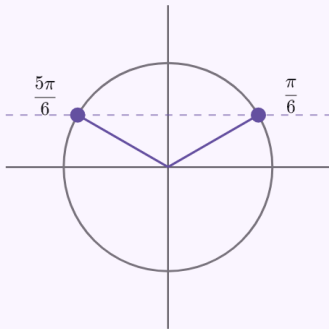
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

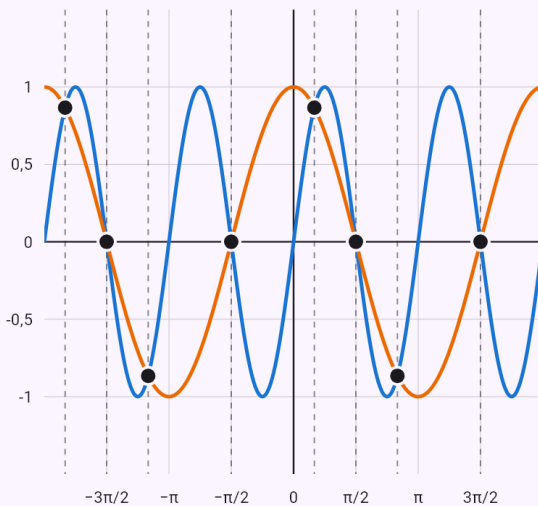
- Pasamos todo a un lado: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Aplicamos la fórmula $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:
 $2 \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Factorizamos: un producto es cero si y solo si lo es alguno de sus factores: $(2 \sin x - 1) \cos x = 0$
- Resolvemos la ecuación $\cos x = 0$
- Ecuación básica $\cos x = 0$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones:
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Resolvemos la ecuación $2 \sin x - 1 = 0$
- Despejamos la función trigonométrica: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Ecuación básica $\sin x = \frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones:
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Gráfica



$$\begin{aligned} \text{---} y &= \sin 2x \\ \text{---} y &= \cos x \end{aligned}$$

Intersecciones de las gráficas:

- $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ • $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ • $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ • $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ • $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ • $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

El ángulo auxiliar: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \pi/4)$.

Enunciado: $\sin x + \cos x = 1$

Resultado

$$x_1 = 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Pasamos todo a un lado: $\cos x + \sin x - 1 = 0$

- Introducimos un ángulo auxiliar φ :
 $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, donde

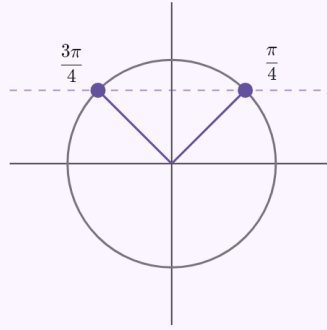
$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

- Despejamos la función trigonométrica:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Ecuación básica $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones:

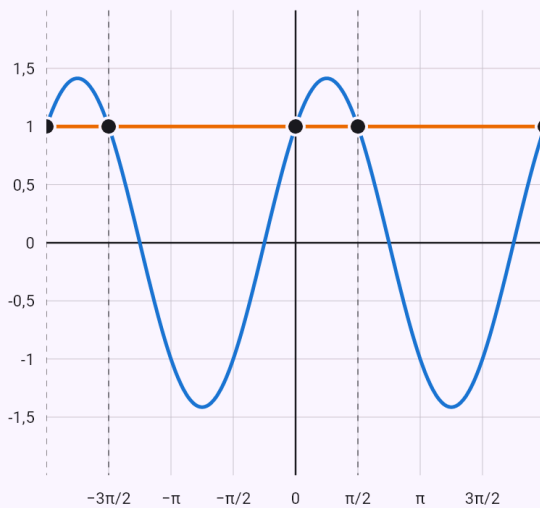
$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$



- Despejamos la incógnita

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Gráfica



— $y = \sin x + \cos x$

— $y = 1$

Intersecciones de las gráficas:

- $(-2\pi; 1)$ • $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$ • $(0; 1)$ • $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
- $(2\pi; 1)$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Una letra griega – el resultado en grados.

Enunciado: $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$

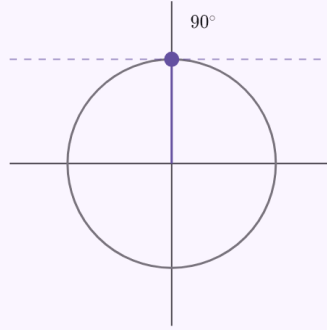
Resultado

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

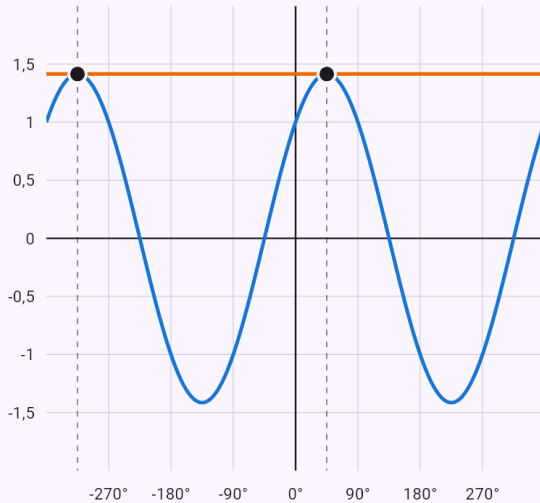
Pasos

- Pasamos todo a un lado: $\cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{2} = 0$
- Introducimos un ángulo auxiliar φ :
 $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$, donde
 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Despejamos la función trigonométrica:
 $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Ecuación básica $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos 90° ; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Despejamos la incógnita
 $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Gráfica



— $y = \sin \alpha + \cos \alpha$

— $y = \sqrt{2}$

Intersecciones de las gráficas:

• $(-315^\circ; \sqrt{2})$ • $(45^\circ; \sqrt{2})$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Solo las raíces en el intervalo dado.

Enunciado: $\sin x = 1/2$, $x \in [0; 4\pi)$

Resultado

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

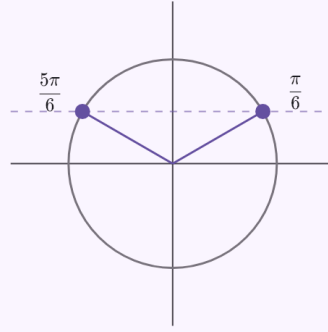
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$

$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

Pasos

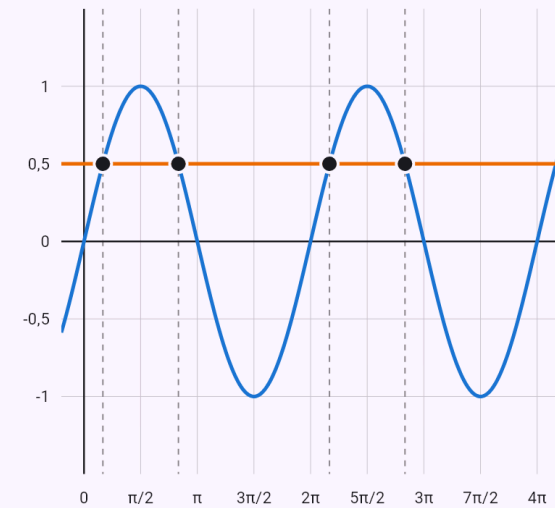
- Ecuación básica $\sin x = \frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones:
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- Las soluciones en el intervalo $x \in [0, 4\pi)$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{13\pi}{6}, x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

Gráfica



— $y = \sin x$

— $y = \frac{1}{2}$

Intersecciones de las gráficas:

$$\bullet \left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \bullet \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \bullet \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2}\right) \bullet \left(\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$$

Cada intersección corresponde a una solución de la ecuación: su primera coordenada es el valor de x .

Un arco de la circunferencia unitaria, un intervalo alrededor de cero.

Enunciado: $\cos x > 1/2$

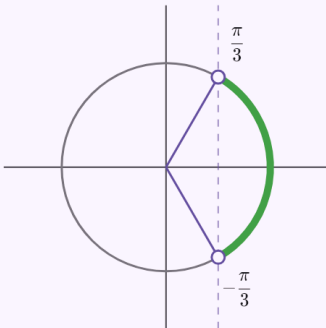
Resultado

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

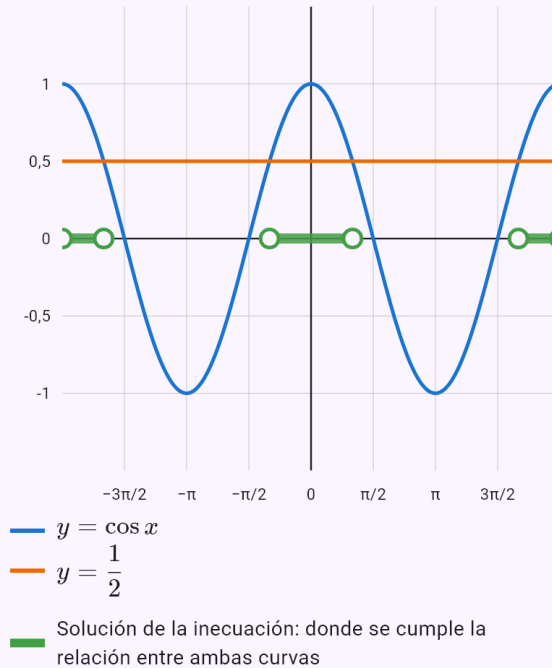
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Inecuación básica $\cos x > \frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria se cumple en el arco marcado; con el periodo:
 $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Gráfica



Los ceros en un periodo y el signo entre ellos.

Enunciado: $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$

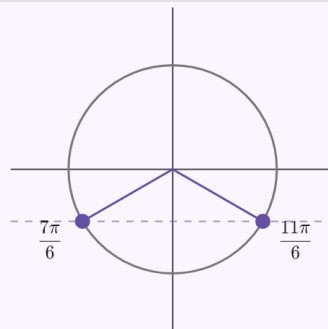
Resultado

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

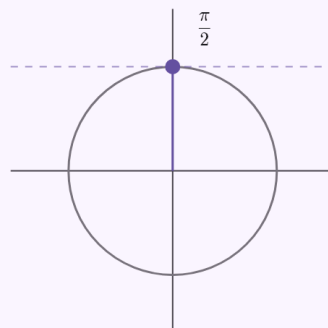
$$k \in \mathbb{Z}$$

Pasos

- Primero resolvemos la ecuación
 $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Hacemos el cambio de variable $t = \sin x$:
 $2t^2 - t - 1 = 0$
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Sustituimos en la fórmula general:
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Ecuación básica $\sin x = -\frac{1}{2}$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

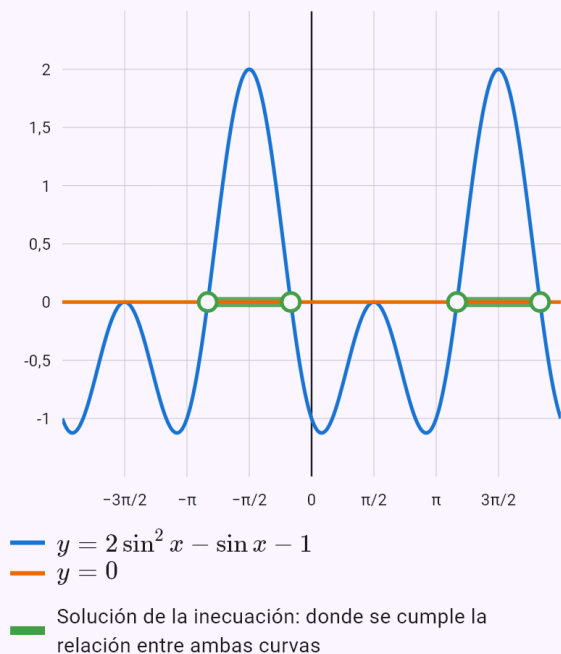


- Ecuación básica $\sin x = 1$: en la circunferencia unitaria la cumplen, en una vuelta, los ángulos $\frac{\pi}{2}$; sumando múltiplos del periodo obtenemos todas las soluciones:
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- La función tiene periodo 2π . Sus ceros (y los puntos donde no está definida) $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ dividen un periodo en intervalos; según el signo en ellos, la inecuación se cumple para: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$

Gráfica



Limitaciones conocidas

- Las ecuaciones con la incógnita también fuera de una función trigonométrica ($x = \cos x$) se resuelven solo numéricamente, sin el periodo.
- Todavía no se admiten las inecuaciones trigonométricas dobles ($-1/2 < \sin x < 1/2$) ni las funciones trigonométricas dentro de un valor absoluto.

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

Las inecuaciones de segundo grado y racionales la aplicación las resuelve con los puntos críticos y una tabla de signos. Una inecuación doble y un sistema de inecuaciones los resuelve como la intersección de las soluciones de cada inecuación, que muestra en la recta numérica. Un sistema de inecuaciones con dos incógnitas lo resuelve como una región del plano y la colorea en la gráfica.

En un sistema de inecuaciones con dos incógnitas la aplicación también indica los vértices de la región: las intersecciones de los bordes con coordenadas exactas. Un sistema de una ecuación e inecuaciones con una incógnita se resuelve resolviendo la ecuación y sustituyendo sus raíces en las inecuaciones; con dos incógnitas la solución es la parte de la curva de la ecuación que está en la región de las inecuaciones, resaltada en el gráfico y con sus extremos calculados exactamente. Un sistema también se puede escribir en una línea, separado por punto y coma ($2^x > 4$; $3^x < 81$).

Ejemplos

Una inecuación de segundo grado – puntos críticos y signos.

Enunciado: $x^2 - x - 6 > 0$

Resultado

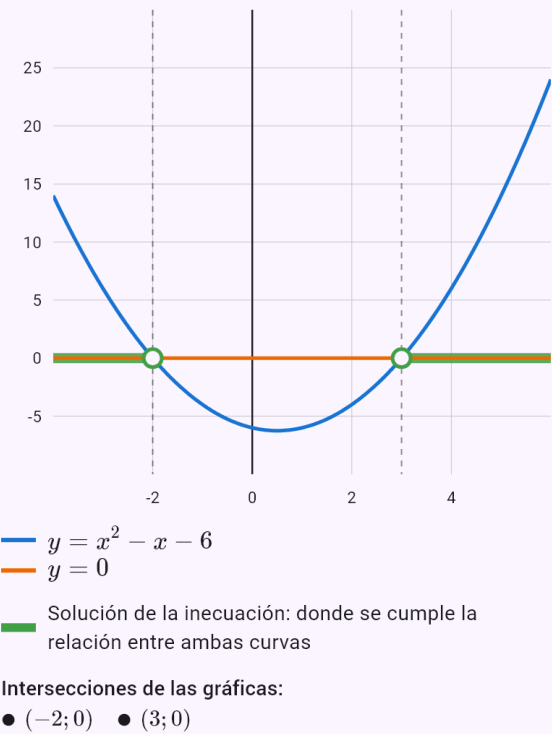
$$x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

Pasos

- Factorizamos: $(x - 3)(x + 2) > 0$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 3$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$(x - 3)(x + 2)$	+	-	+

Gráfica



Una inecuación racional – el denominador no puede ser cero.

Enunciado: $(x+1)/(x-3) \leq 0$

Resultado

$x \in [-1, 3)$

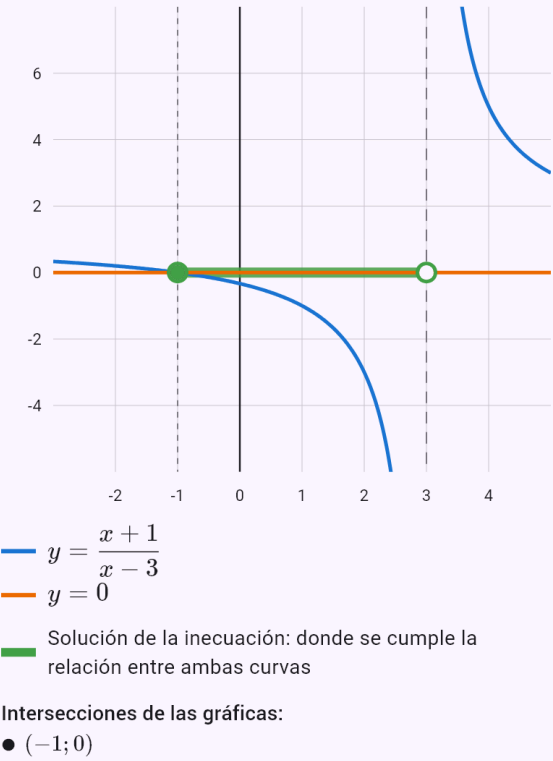
Condiciones: $x \neq 3$

Pasos

- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $x \neq 3$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -1, x_2 = 3$
- Signos en cada intervalo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 3$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$\frac{x+1}{x-3}$	+	-	+

Gráfica



Una inecuación doble.

Enunciado: $-1 \leq 2x + 1 < 5$

Resultado

$$x \in [-1, 2)$$

Pasos

- Inecuación 1: $-1 \leq 2x + 1$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $-2x \leq 2$
- Dividimos entre el número negativo -2 ; el signo de la desigualdad se invierte: $x \geq -1$
- La solución de esta inecuación es $x \in [-1, \infty)$
- Inecuación 2: $2x + 1 < 5$
- Dejamos los términos con la incógnita a la izquierda y pasamos el resto a la derecha: $2x < 4$
- Dividimos entre el número positivo 2 ; el signo de la desigualdad se mantiene: $x < 2$
- La solución de esta inecuación es $x \in (-\infty, 2)$
- La solución del sistema es la intersección de las soluciones de las inecuaciones: $x \in [-1, 2)$

Gráfica



Solución del sistema (intersección)



Cada inecuación tiene su propia fila en la recta numérica; su intersección está en verde. Un punto relleno pertenece a la solución, uno vacío no.

Sistema de inecuaciones con dos incógnitas – una región del plano y sus vértices.

Enunciado: $x + y \leq 4$

$x - y \geq 0$

$$y \geq 0$$

Resultado

$$y \leq 4 - x$$

$$y \leq x$$

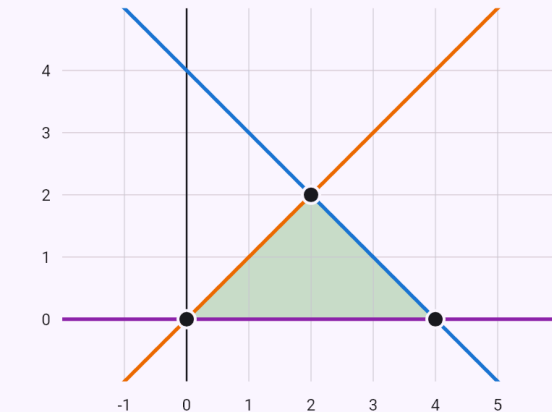
$$y \in [0, \infty)$$

Pasos

- Inecuación 1: $x + y \leq 4$
- La frontera es la curva $x + y = 4$; se dibuja continua, sus puntos pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[0; 0]$: $0 \leq 4$ se cumple; la solución es la parte del plano que contiene el punto.
- Inecuación 2: $x - y \geq 0$
- La frontera es la curva $x - y = 0$; se dibuja continua, sus puntos pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[1; 0]$: $1 \geq 0$ se cumple; la solución es la parte del plano que contiene el punto.
- Inecuación 3: $y \geq 0$
- La frontera es la curva $y = 0$; se dibuja continua, sus puntos pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[0; 1]$: $1 \geq 0$ se cumple; la solución es la parte del plano que contiene el punto.
- La solución del sistema es la parte común de estas regiones, sombreada en la gráfica.

- Vértices de la región (intersecciones de los bordes): $[0; 0]$, $[2; 2]$, $[4; 0]$

Gráfica



$$\begin{aligned} \text{--- azul --- } x + y &\leq 4 \Leftrightarrow y \leq 4 - x \\ \text{--- naranja --- } x - y &\geq 0 \Leftrightarrow y \leq x \\ \text{--- púrpura --- } y &\geq 0 \Leftrightarrow y \in [0, \infty) \end{aligned}$$

La solución es la región sombreada. Una frontera continua pertenece a ella, una discontinua no.

Vértices de la región:

$$\bullet (0; 0) \quad \bullet (2; 2) \quad \bullet (4; 0)$$

Una inecuación en los enteros – se enumeran los enteros del intervalo.

Enunciado: $x^2 < 10$

Resultado

$$x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

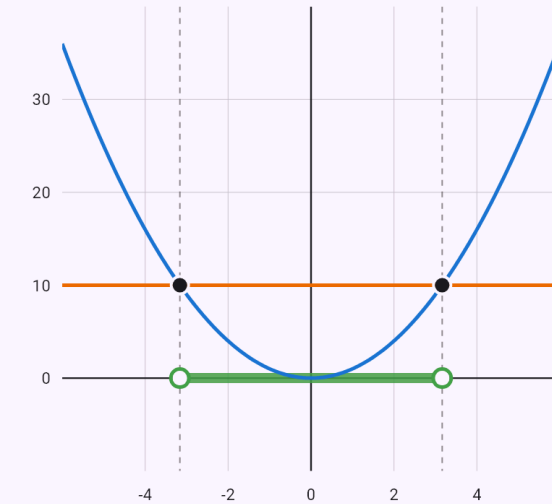
Pasos

- Pasamos todo a un lado: $x^2 - 10 < 0$
- Los puntos críticos dividen la recta numérica en intervalos: $x_1 = -\sqrt{10}$, $x_2 = \sqrt{10}$
- Signos en cada intervalo:

$x^2 - 10$	$(-\infty, -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10}, \sqrt{10})$	$(\sqrt{10}, \infty)$
	+	-	+

- En los reales $x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$; en $\mathbb{Z}$:
 $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Gráfica



$y = x^2$
 $y = 10$

Solución de la inecuación: donde se cumple la relación entre ambas curvas

Intersecciones de las gráficas:

$\bullet (-\sqrt{10}; 10)$ $\bullet (\sqrt{10}; 10)$

Ecuación e inecuación – las raíces de la ecuación sustituidas en la inecuación.

Enunciado: $x^2 - x - 6 = 0$

$x > 0$

Resultado

$$x = 3$$

Pasos

- Primero resolvemos la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ y luego sustituimos sus raíces en las desigualdades.
- Calculamos el discriminante:
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- Sustituimos en la fórmula general:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
- La raíz $x = -2$ no cumple la condición $x > 0$, así que no es solución.
- La raíz $x = 3$ cumple las condiciones.

Circunferencia y semiplano – la solución es un arco; sus extremos no pertenecen a ella.

Enunciado: $x^2 + y^2 = 4$

$$y > x$$

Resultado

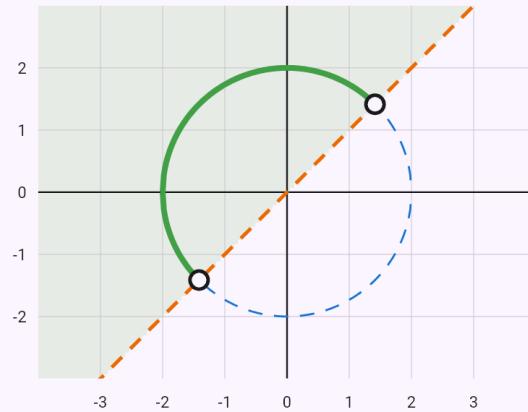
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y > x$$

Pasos

- La solución son los puntos de la curva $x^2 + y^2 = 4$ que están en la región dada por las desigualdades. Primero hallamos esa región:
- La frontera es la curva $y = x$: se dibuja discontinua, sus puntos no pertenecen a la solución.
- Sustituimos el punto $[1; 0]$: $0 > 1$ no se cumple; la solución es la parte del plano que no contiene el punto.
- Extremos del tramo de la curva:
 $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; están en un borde discontinuo, no pertenecen a la solución.

Gráfica



$\text{---} x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{4 - x^2}$
 $\text{---} y > x$

La solución es la parte de la curva resaltada en verde: la que está en la región sombreada. Un extremo relleno pertenece a la solución; uno hueco, no.

Extremos:

$$\circ (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \quad \circ (\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

Limitaciones conocidas

- Un sistema con dos o más ecuaciones junto con inecuaciones todavía no se resuelve; escribe los decimales con punto ($x > 2.5$).

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas lo resuelve por reducción o por sustitución, y los sistemas mayores por eliminación de Gauss – también en forma matricial. El método lo eliges con un chip. Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene además una gráfica en la que las soluciones son los puntos de corte de las rectas o curvas.

Un sistema no lineal (por ejemplo una circunferencia y una recta) se resuelve y se dibuja, por ahora sin procedimiento.

Ejemplos

El método de reducción.

Enunciado: $2x + 3y = 7$

$x - y = 1$

Reducción

Resultado

$$x = 2$$

$$y = 1$$

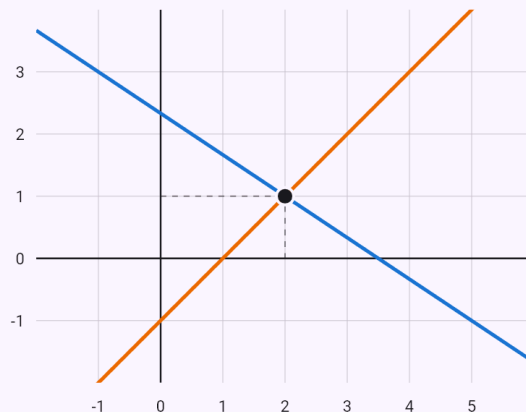
Pasos

- Multiplicamos la primera ecuación por 1 y la segunda por -2 para que x se anule al sumarla

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- Sumamos las ecuaciones, x se anula: $5y = 5$
- Resolvemos: $5y = 5 \Rightarrow y = 1$
- Sustituimos en la ecuación 2: $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Gráfica



$$\begin{aligned} \text{— } 2x + 3y = 7 &\Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3} \\ \text{— } x - y = 1 &\Leftrightarrow y = x - 1 \end{aligned}$$

Intersecciones de las gráficas:

- $(2; 1)$

Cada intersección corresponde a una solución del sistema: sus coordenadas son los valores de x y y .

Tres ecuaciones – eliminación de Gauss.

Enunciado: $x + y + z = 6$

$2x - y + z = 3$

$$x + 2y - z = 2$$

Eliminación de Gauss

Resultado

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

Pasos

- Eliminamos x de las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Eliminamos y de las ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Resolvemos: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Sustituimos en la ecuación 2: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Sustituimos en la ecuación 1: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Una circunferencia y una recta.

Enunciado: $x^2 + y^2 = 25$

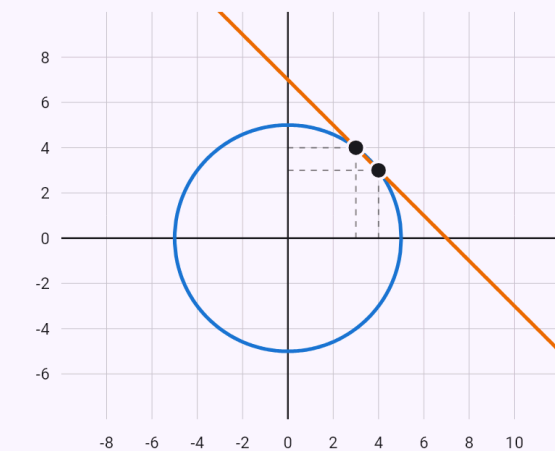
$$x + y = 7$$

Resultado

$$x_1 = 3, y_1 = 4$$

$$x_2 = 4, y_2 = 3$$

Gráfica



$$\text{— } x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{— } x + y = 7 \Leftrightarrow y = 7 - x$$

Intersecciones de las gráficas:

$$\bullet (3; 4) \quad \bullet (4; 3)$$

Cada intersección corresponde a una solución del sistema: sus coordenadas son los valores de x y y .

Limitaciones conocidas

- Los sistemas no lineales aparecen por ahora sin procedimiento.

Ecuaciones e inecuaciones con parámetro

Una letra de la ecuación además de la incógnita es un parámetro: cualquier número real del que depende la solución. La aplicación pasa la ecuación a la forma $A \cdot x = B$ (una cuadrática a $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$) y discute la solución según los valores del parámetro: dónde el coeficiente de la incógnita es cero, dónde el discriminante es positivo, cero o negativo, dónde las condiciones excluyen una raíz y para qué valores el problema no tiene sentido. El resultado resume los casos.

La aplicación toma la incógnita en el orden x, y, z, u, v, w, t ; las demás letras son parámetros. Puedes elegir otra incógnita con la etiqueta «Incógnita» o escribirla tras una coma. La gráfica muestra todas las soluciones como una curva (una región en una inecuación) en el plano parámetro–incógnita; elige el valor del parámetro con el deslizador y lee las soluciones en la recta vertical.

En una integral indefinida las demás letras son constantes; la aplicación indica cuáles no pueden ser cero ($\int dx/(a - bx)^3$ para $b \neq 0$).

Cómo introducirlo

$$2ax + a = 4x$$

Cada letra adicional es un parámetro; la incógnita es x (o $y, z, \dots$).

$$(q+3)x = 2x + q, \text{ incógnita } q$$

Puedes indicar la incógnita o el parámetro tras una coma (« a es parámetro», «incógnita q »).

Ejemplos

Ecuación lineal: para $a = 2$ no tiene solución.

Enunciado: $2ax + a = 4x$

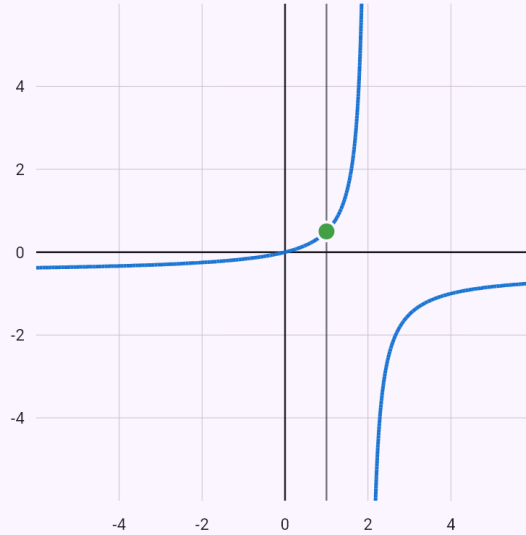
Resultado

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Pasos

- La incógnita es x , el parámetro a es cualquier número real. La solución depende de su valor, por eso analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Pasamos a la forma básica: $2(a-2)x = -a$
- Para $a \neq 2$, $2(a-2)$ es distinto de cero y podemos dividir: $x = \frac{a}{2(2-a)}$
- Para $a = 2$, el coeficiente de la incógnita es cero: $0 \cdot x = -2$, por tanto $x \in \emptyset$

Gráfica



— $2xa + a = 4x$

Cada punto $[a; x]$ de la curva es una solución. Para un valor elegido de a , las soluciones están en la recta vertical; muévela con el deslizador.



$a = 1 : x \approx 0,5$

Ecuación cuadrática: discusión según el discriminante.

Enunciado: $x^2 + 6x + p = 0$

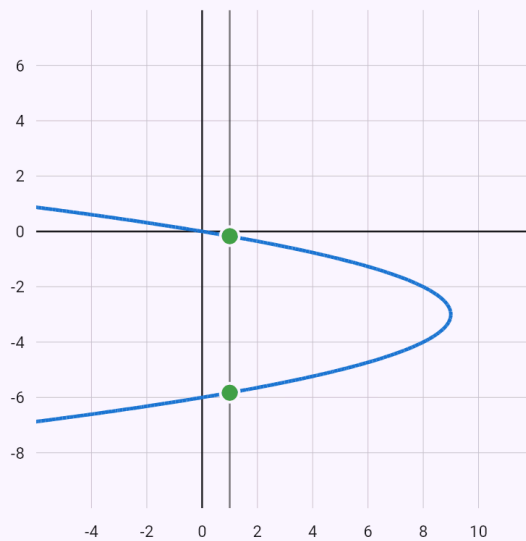
Resultado

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Pasos

- La incógnita es x , el parámetro p es cualquier número real. La solución depende de su valor, por eso analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Pasamos a la forma básica: $x^2 + 6x + p = 0$
- El discriminante en función del parámetro:
 $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9 - p)$
- Para $p < 9$, $D > 0$ y la ecuación tiene dos raíces distintas:
 $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}$
- Para $p > 9$, $D < 0$ y la ecuación no tiene solución real.
- Para $p = 9$, $D = 0$ y la ecuación tiene una raíz doble:
 $x = -3$

Gráfica



$$x^2 + 6x + p = 0$$

Cada punto $[p; x]$ de la curva es una solución. Para un valor elegido de p , las soluciones están en la recta vertical; muévela con el deslizador.

$$p = 1 : \quad x \approx -5,83; -0,17$$

Inecuación: el signo del coeficiente decide el sentido.

Enunciado: $2x + 2p - 5 < 2px + 7$

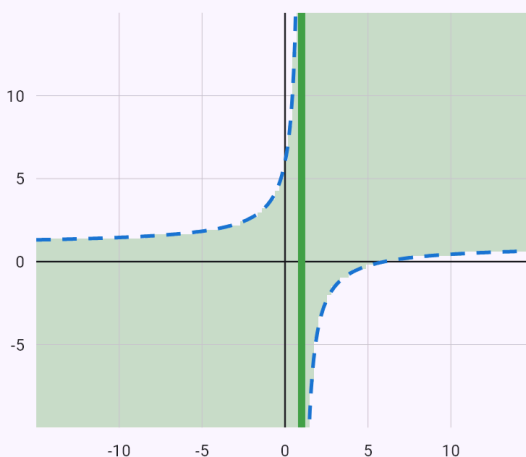
Resultado

$$\begin{cases} x < \frac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \frac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Pasos

- La incógnita es x , el parámetro p es cualquier número real. La solución depende de su valor, por eso analizamos los distintos casos (discusión de la solución).
- Pasamos a la forma básica: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Para $p < 1$, $2(1-p)$ es positivo: al dividir el signo de la desigualdad se mantiene: $x < \frac{p-6}{p-1}$
- Para $p > 1$, $2(1-p)$ es negativo: al dividir el signo de la desigualdad se invierte: $x > \frac{p-6}{p-1}$
- Para $p = 1$, el coeficiente de la incógnita es cero:
 $0 \cdot x < 10$, por tanto $x \in \mathbb{R}$

Gráfica



$$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \frac{p-6}{p-1}$$

La región sombreada contiene todas las soluciones $[p; x]$. Para un valor elegido de p , la solución es la parte resaltada de la recta vertical; muévela con el deslizador.

$$p = 1$$

Limitaciones conocidas

- Por ahora ecuaciones lineales y cuadráticas e inecuaciones lineales; la discusión completa por intervalos solo con un parámetro, con varios los casos generales.
- Las preguntas del tipo «para qué p tiene la ecuación una raíz positiva» y los sistemas con parámetro aún no están disponibles.

Operaciones con expresiones

Una expresión sin signo igual la aplicación la transforma según el chip elegido: la simplifica (una fracción algebraica con denominador común y simplificada, con condiciones), la desarrolla, la factoriza (sacando factor común, con identidades notables y con la regla de Ruffini) o la descompone en fracciones parciales – como en papel, con ecuaciones para los coeficientes desconocidos. La factorización es en los enteros; si la expresión se puede factorizar más en los reales (con raíces irracionales), lo muestra el paso siguiente. La raíz de un monomio se extrae en parte – con raíz par como valor absoluto donde la base puede ser negativa. También funcionan los números complejos – la división multiplicando por el conjugado.

Ejemplos

Simplificar una fracción algebraica.

Enunciado: $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)$

Simplificar

Resultado

$$\frac{x - 1}{x + 1}$$

Condiciones: $x \neq -1$

Pasos

- Condiciones: el denominador no puede ser cero: $x \neq -1$
- Factorizamos el numerador y el denominador:
$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2}$$
- Simplificamos el factor común $x + 1$: $\frac{x - 1}{x + 1}$

Desarrollar.

Enunciado: $(x + 2)^3$

Desarrollar

Resultado

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Pasos

- Desarrollamos los paréntesis y agrupamos términos semejantes: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Factorizar con la regla de Ruffini.

Enunciado: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Factorizar

Resultado

$$(x - 3)(x - 2)(x - 1)$$

Pasos

- Las raíces racionales solo pueden ser divisores del término independiente -6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

- Con la regla de Ruffini comprobamos la raíz $x = 1$ y dividimos el polinomio:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

- Sustituyendo comprobamos que estos candidatos no son raíces: $P(-1) = -24 \neq 0$

- Con la regla de Ruffini comprobamos la raíz $x = 2$ y dividimos el polinomio:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Descomposición en fracciones parciales.

Enunciado: $(3x + 5)/(x^2 + x - 2)$

Fracciones parciales

Resultado

$$\frac{8}{3(x - 1)} + \frac{1}{3(x + 2)}$$

Condiciones: $x \neq -2, x \neq 1$

Pasos

- Condiciones: el denominador no puede ser cero:
 $x \neq -2, x \neq 1$

- Factorizamos el denominador: $(x - 1)(x + 2)$

- Buscamos una descomposición de la forma:

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

- Multiplicamos ambos lados por el denominador $(x - 1)(x + 2)$: $3x + 5 = A(x + 2) + B(x - 1)$

- Sustituimos $x = 1$: $8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$

- Sustituimos $x = -2$: $-1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

Extracción parcial de la raíz con valor absoluto.

Enunciado: $\sqrt{8a^5 b^2}$ [Simplificar](#)

Resultado

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Pasos

- Extraemos de la raíz lo que se puede – las potencias salen delante (con raíz par como valor absoluto donde la base puede ser negativa): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

División de números complejos.

Enunciado: $(3+4i)/(1-2i)$ [Simplificar](#)

Resultado

$$-1 + 2i$$

Pasos

- Multiplicamos la fracción por el conjugado del denominador, $1 + 2i$

$$\frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

Límites

MathSolver calcula el límite de una función de una variable en un punto, en el infinito y los límites laterales, y procede como en clase: primero intenta sustituir en la función. El límite de una sucesión ($n \rightarrow \infty$) se calcula igual – también la forma 1^∞ o una suma de potencias, de la que se saca el término que crece más rápido.

Si al sustituir sale una indeterminación ($0/0$, ∞/∞ , ...), elige una transformación según la forma de la función – factorizar y simplificar, multiplicar por el conjugado, dividir por la mayor potencia, un límite notable ($\sin x / x$) o la regla de L'Hôpital, también repetidamente.

Un límite infinito o un límite que no existe (los límites laterales son distintos) nunca se presenta como un número – lo dice con palabras y muestra los límites laterales. El resultado incluye una gráfica de la función cerca del punto con el valor del límite marcado.

En el límite de una sucesión la gráfica muestra los puntos $a_1, a_2, a_3, \dots$ en lugar de una curva continua.

Cómo introducirlo

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) / (x - 2)$	Un límite escrito: tras la palabra <code>lim</code> , entre paréntesis la variable, la flecha <code>-></code> y el punto, y luego la función.
$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) / (x^2 - 5)$	Un límite en el infinito: infinito se escribe <code>oo</code> (menos infinito <code>-oo</code>).
$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x$	Un límite lateral: <code>+</code> (por la derecha) o <code>-</code> (por la izquierda) tras el punto.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	Desde una foto, o en LaTeX tal como lo reconoce la cámara.
$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+2)/(n+1))^{(2n+3)}$	El límite de una sucesión en el infinito.

Ejemplos

La indeterminación 0/0 – factorizamos el numerador y simplificamos.

Enunciado: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Pasos

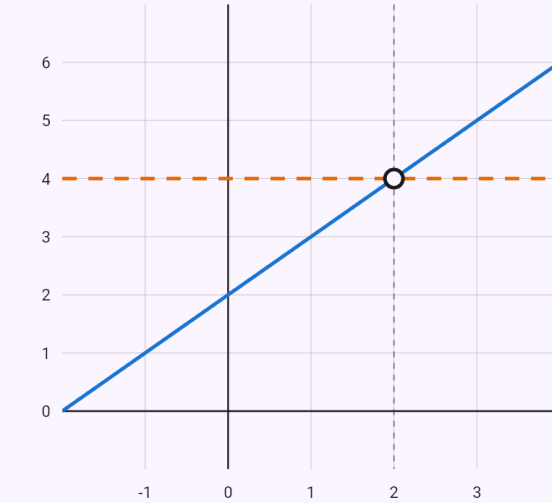
- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.

- Transformamos y simplificamos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$

- Sustituimos: $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Gráfica



$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$
$$y = 4$$

Límite:

• (2; 4)

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

Un límite en el infinito – numerador y denominador divididos por la mayor potencia.

Enunciado: $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) / (x^2 - 5)$

Resultado

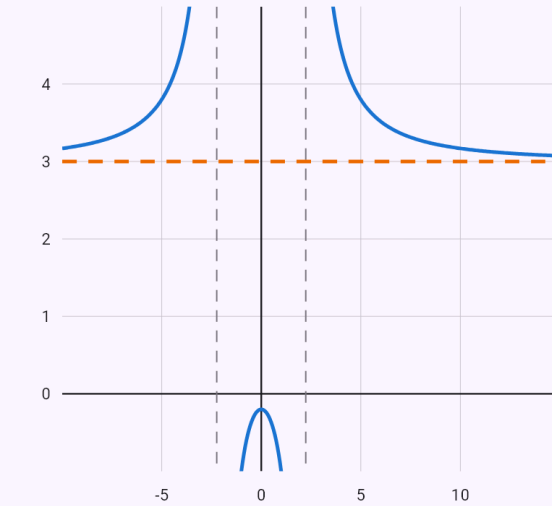
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = 3$$

Pasos

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: hay que transformar la expresión.
- Dividimos numerador y denominador entre x^2 : los términos del tipo c/x^n tienden a cero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{5}{x^2}} = 3$$

Gráfica



$$\begin{aligned} \text{— } y &= \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} \\ \text{--- } y &= 3 \end{aligned}$$

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

El límite notable $\sin x / x$.

Enunciado: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x) / x$

Resultado

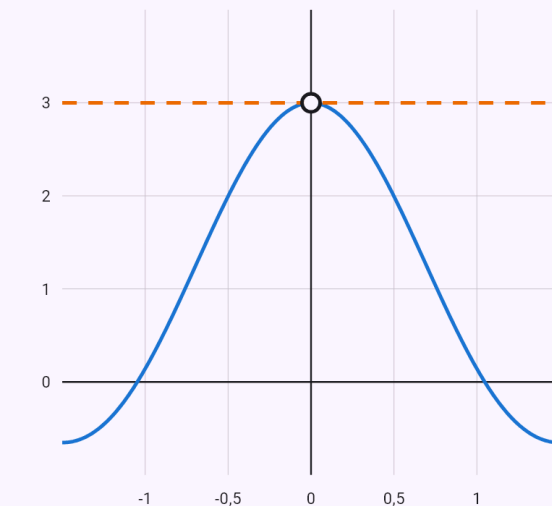
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Pasos

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- Usamos el límite conocido $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Gráfica



$$\begin{aligned} \text{— } y &= \frac{\sin(3x)}{x} \\ \text{--- } y &= 3 \end{aligned}$$

Límite:

● (0; 3)

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

La regla de L'Hôpital, aplicada dos veces seguidas.

Enunciado: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x) / x^2$

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Pasos

- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.

- Regla de L'Hôpital: derivamos numerador y denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x + e^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

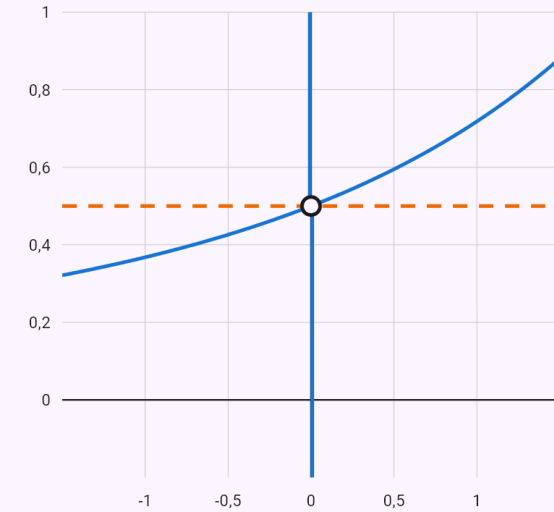
- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.

- Regla de L'Hôpital: derivamos numerador y denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2}$$

- Sustituimos: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$

Gráfica



$$y = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Límite:

$$\bullet \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Círculo vacío: el valor al que se acerca la función (en el punto mismo puede no estar definida); en discontinuo, el límite.

Los límites laterales son distintos – el límite no existe.

Enunciado: $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$

Resultado

El límite no existe: los límites laterales son distintos.

Pasos

- Al sustituir sale un número no nulo entre cero: el límite es infinito, el signo por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{0}$$

- Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Gráfica



$$y = \frac{1}{x}$$

Límite de una sucesión – sacamos el término que crece más rápido, 9^n.

Enunciado: $\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}}$

Resultado

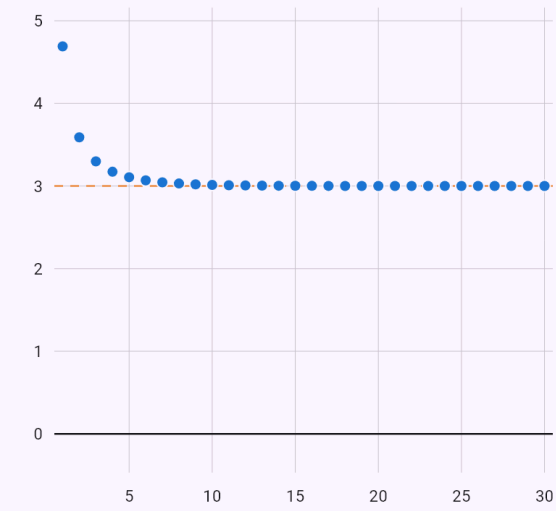
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Pasos

- Sacamos el término que crece más rápido, 9^n – los demás divididos por él tienden a cero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{9 \cdot \left(\frac{6^n}{9^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1\right)} =$$

Gráfica



● términos a_n — límite de la sucesión

Los puntos son los términos a_n para n = 1, 2, 3, ... Si la sucesión tiene límite, los términos se acercan a él (a trazos).

Derivadas

La aplicación deriva según las reglas – de la suma, de la constante, del producto, del cociente y de la cadena – y dice en cada paso qué regla ha usado. También calcula derivadas sucesivas y el valor de la derivada en un punto. Las funciones elementales (x^2 , $\sin x$, e^x , ...) también las deriva por definición, como límite del cociente incremental. El resultado incluye una gráfica de la función y de su derivada.

Para una función dada implícitamente por una ecuación en x e y ($x^3 + y^3 = 3xy$) deriva ambos miembros respecto a x (y como función de x) y despeja y' , o usa la fórmula $y' = -F_x / F_y$; también calcula y'' y, en un punto dado, la tangente y la normal, y dibuja la curva.

En un punto singular (la curva se corta o tiene un pico) halla las tangentes a partir de los términos de menor grado – en el folium, en el origen, $x = 0$ e $y = 0$.

Cómo introducirlo

$(x^2 \sin x)'$	La derivada con una prima tras el paréntesis.
$d/dx (e^x / x)$	La notación d/dx , también desde una foto ($\frac{d}{dx}$).
$(x^3 \ln x)''$	Derivadas sucesivas con varias primas, o con el orden en el chip «Derivar».
$(x^2 + 1)' _{x=2}$	La derivada en un punto, o indica el punto en el chip.
$x^2 \sin x$	Una expresión con el chip «Derivar» – allí eliges también el orden, el punto y el método (por reglas / por definición).
$x^3 + y^3 = 3xy$	Una ecuación en x e y – el chip «Derivada implícita» (orden 1 o 2, el método, un punto $[x_0; y_0]$) o «Gráfica de la curva»; escrito $\text{diff}(x^3+y^3=3xy, x)$.

Ejemplos

La regla del producto.

Enunciado: $(x^2 \sin x)'$

Resultado

$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

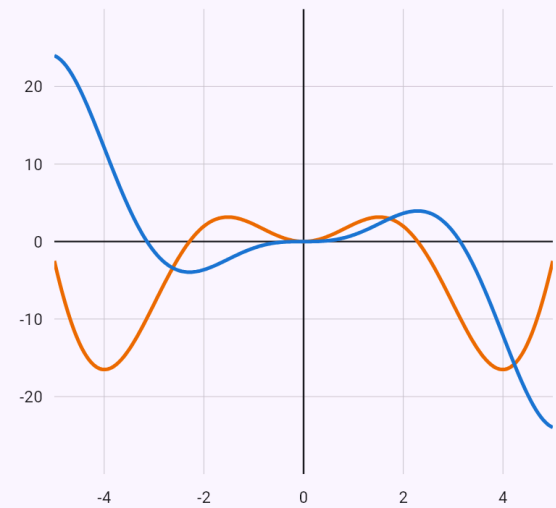
Pasos

- Regla del producto $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Donde la derivada es positiva, la función crece; donde es negativa, decrece. En los ceros de la derivada la función tiene tangente horizontal.

Gráfica



— $y = x^2 \sin x$
— $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

La regla del cociente.

Enunciado: $d/dx (e^x / x)$

Resultado

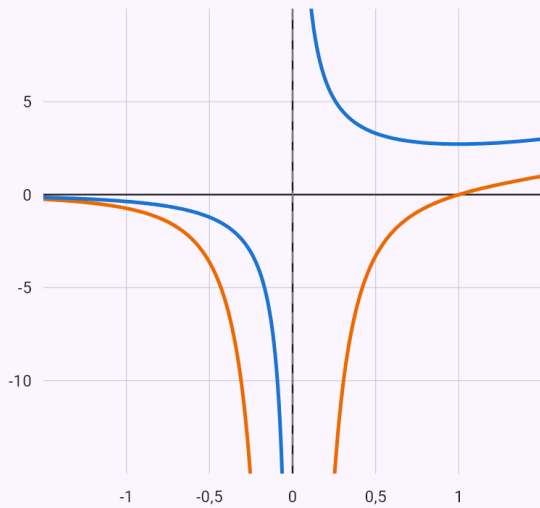
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Pasos

- Regla del cociente $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Gráfica



$$y = \frac{e^x}{x}$$
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Donde la derivada es positiva, la función crece; donde es negativa, decrece. En los ceros de la derivada la función tiene tangente horizontal.

La segunda derivada.

Enunciado: $(x^3 \ln x)''$

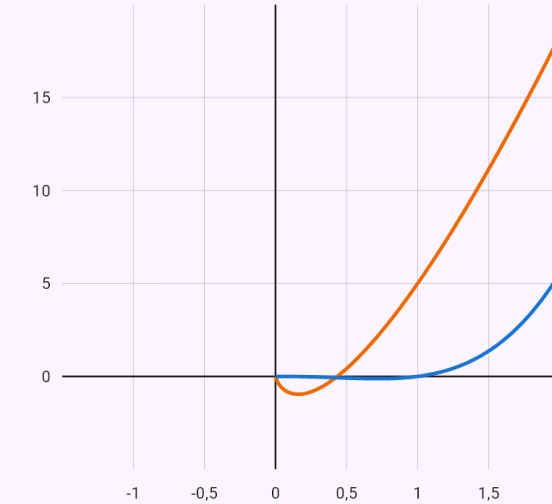
Resultado

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

Pasos

- Derivada de orden 1: $y' = (x^3 \ln x)'$
- Regla del producto $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $(x^3 \ln x)' = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- Derivada de orden 2: $y'' = (x^2 + 3x^2 \ln x)'$
- La derivada de una suma es la suma de las derivadas:
 $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = (x^2)' + (3x^2 \ln x)'$
- Sacamos la constante fuera de la derivada:
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x^2 \ln x)'$
- Regla del producto $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $(x^2 \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Sustituimos:
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Sustituimos: $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Simplificamos: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Gráfica



$y = x^3 \ln x$
 $y'' = 5x + 6x \ln x$

Donde la segunda derivada es positiva, la función es convexa (curvada hacia arriba); donde es negativa, es cóncava (curvada hacia abajo).

La derivada por definición, como límite.

Enunciado: x^2 Derivar → Por definición

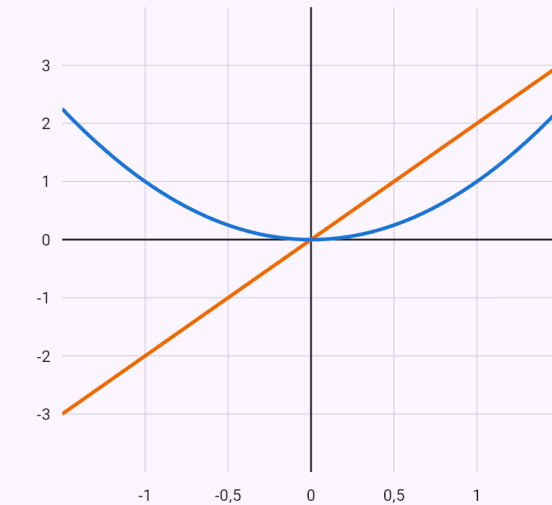
Resultado

$$y' = 2x$$

Pasos

- Derivada por definición
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
- Al sustituir sale la indeterminación $\frac{0}{0}$: hay que transformar la expresión.
- Transformamos y simplificamos
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)$$
- Sustituimos: $\lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$

Gráfica



$y = x^2$
 $y' = 2x$

Donde la derivada es positiva, la función crece; donde es negativa, decrece. En los ceros de la derivada la función tiene tangente horizontal.

Derivada implícita – el folium de Descartes, la tangente y la normal en $[3/2; 3/2]$, la segunda derivada.

Enunciado: $x^3 + y^3 = 3xy$

Derivada implícita, orden 2, punto $[3/2; 3/2]$

Resultado

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$$

$$y'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

$$t: y = 3 - x$$

$$n: y = x$$

$$y''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{3}$$

Condiciones: $y^2 - x \neq 0$

Pasos

- La función $y = y(x)$ viene dada por la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ – derivamos ambos miembros respecto a x , tomando y como función de x (regla de la cadena: p. ej. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Derivamos ambos miembros:
 $(x^3 + y^3)' = (3xy)' \Rightarrow 3y^2 y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Los términos con y' a la izquierda, el resto a la derecha, y sacamos y' factor común: $y'(3y^2 - 3x) = -3x^2 + 3y$

- Despejamos y' : $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$

- La segunda derivada – derivamos y' otra vez respecto a x (y e y' son funciones de x)

$$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)' = \frac{2x^2 y y' - 2xy^2 - y^2 y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

- Sustituimos y'

$$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{(y^2 - x)^3}$$

- Sobre la curva se cumple $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – lo que simplifica la expresión: $y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$

- El punto $\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ está en la curva:
 $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}} = 0$

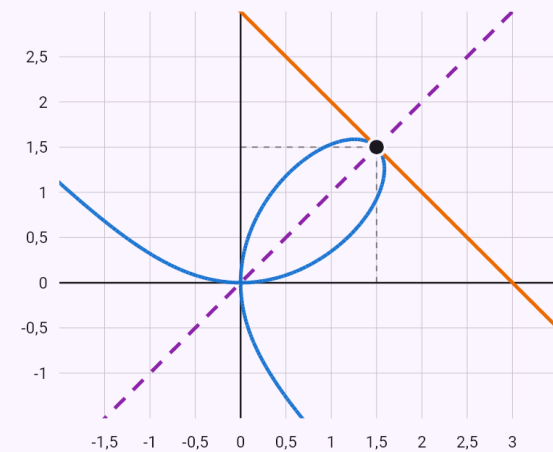
- La derivada en el punto $\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ – la pendiente de la tangente: $y'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$

- La tangente: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$

- La normal es perpendicular a la tangente, su pendiente es 1: $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$

- La segunda derivada en el punto: $y''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{3}$

Gráfica



— $x^3 + y^3 = 3xy$
 — $t: y = 3 - x$
 - - - $n: y = x$

La curva dada por la ecuación. En el punto dado, la tangente (continua) y la normal (discontinua).

Estudio de una función

La aplicación estudia una función en el orden habitual: dominio, simetría (par o impar), cortes con los ejes, signo de la función, límites en los extremos del dominio y asíntotas, primera derivada – monotonía y extremos (también con derivadas de orden superior), segunda derivada – concavidad y puntos de inflexión, y por último el recorrido. Lo resume todo y dibuja una gráfica con los puntos marcados.

En una función trigonométrica la aplicación halla el periodo, estudia la función en un periodo y escribe los resultados con el periodo (un máximo en $x = \pi/2 + 2k\pi$); si solo la derivada es periódica ($x + 2 \sin x$), los extremos y la monotonía se repiten con el periodo. Los valores absolutos se quitan según los signos en los intervalos y en los picos se comparan las derivadas laterales; donde la derivada es infinita, se muestra una tangente vertical. Los valores absolutos anidados y las sumas de valores absolutos se estudian por tramos; donde la función es constante en un intervalo, se indica con su valor (un mínimo en cada punto del intervalo).

Cómo introducirlo

<code>estudio y = x^3 - 3x</code>	Con la palabra «estudio» delante de la función.
<code>x^3 - 3x</code>	Una función con el chip «Estudio de la función».

Ejemplos

Un polinomio – extremos y un punto de inflexión.

Enunciado: $x^3 - 3x$ Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Paridad: impar

Cortes con el eje x: $[-\sqrt{3}; 0]$, $[0; 0]$, $[\sqrt{3}; 0]$

Creciente: $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$

Decreciente: $[-1, 1]$

Máximo local: $[-1; 2]$

Mínimo local: $[1; -2]$

Convexa: $[0, \infty)$

Cóncava: $(-\infty, 0]$

Puntos de inflexión: $[0; 0]$

Pasos

- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ - la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).
- Cortes con el eje x:
 $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$, es decir $[-\sqrt{3}; 0]$, $[0; 0]$, $[\sqrt{3}; 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0; 0]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

$f(x)$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
	-	+	-	+

La función es positiva para $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
y negativa para $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

- Límites en los extremos del dominio
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- La función no tiene asíntotas verticales.
- No hay asíntota en $\pm\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
- Primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$
- Puntos estacionarios: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

• Signo de la primera derivada - donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

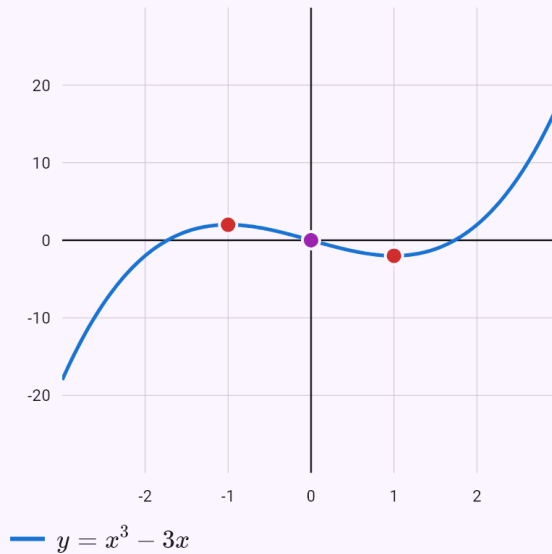
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

La función es creciente en $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ y decreciente en $[-1, 1]$

- En $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ - máximo local.
- En $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ - mínimo local.
- Máximo local $[-1; 2]$, mínimo local $[1; -2]$

- Segunda derivada: $f''(x) = 6x$
 - Candidatos a puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
 - Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:
- | | | |
|----------|----------------|---------------|
| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
| $f''(x)$ | - | + |
| $f(x)$ | ∩ | ∪ |
- La función es convexa en $[0, \infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0]$
- En $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – la primera derivada no nula (desde la tercera) es de orden impar: punto de inflexión.
 - Puntos de inflexión: $[0; 0]$
 - Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Gráfica



Puntos notables:

- máximo $(-1; 2)$
- inflexión $(0; 0)$
- mínimo $(1; -2)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Una función racional – asíntotas.

Enunciado: $x^2/(x - 1)$ Estudio de la función

Resultado

Domino: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Imagen: $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

Paridad: ni par ni impar

Cortes con el eje x: $[0; 0]$

Creciente: $(-\infty, 0], [2, \infty)$

Decreciente: $[0, 1), (1, 2]$

Máximo local: $[0; 0]$

Mínimo local: $[2; 4]$

Convexa: $(1, \infty)$

Cóncava: $(-\infty, 1)$

Asíntotas: $x = 1$, $y = x + 1$

Pasos

- Dominio – condiciones $x \neq 1$: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- El dominio $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ no es simétrico respecto a cero – la función no es par ni impar.
- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir $[0; 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0; 0]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	-	-	+

La función es positiva para $x \in (1, \infty)$ y negativa para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Asíntotas verticales (allí el límite es infinito): $x = 1$

- Asíntota en $\pm\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – la recta $y = x + 1$

- Primera derivada

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

- Puntos estacionarios: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$
- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

La función es creciente en $(-\infty, 0], [2, \infty)$ y decreciente en $[0, 1), (1, 2]$

- En $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – máximo local.

- En $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – mínimo local.

- Máximo local $[0; 0]$, mínimo local $[2; 4]$

- Segunda derivada: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

- La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene solución.

- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

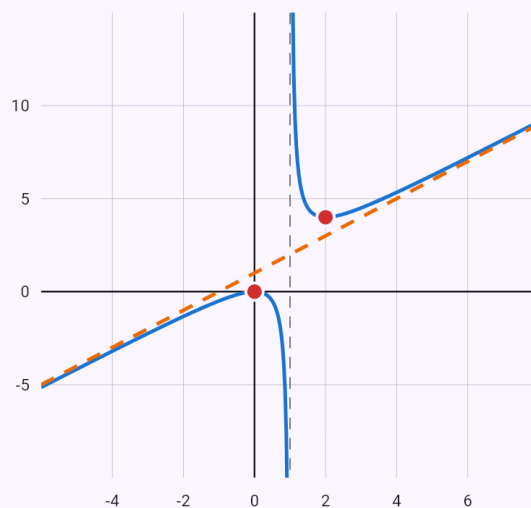
	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

La función es convexa en $(1, \infty)$ y cóncava en $(-\infty, 1)$

- La función no tiene puntos de inflexión.

- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

Gráfica



$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$y = x + 1$$

Puntos notables:

● máximo $(0; 0)$ ● mínimo $(2; 4)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Función periódica: todo en un periodo, los resultados con el periodo.

Enunciado: $\sin 2x + 2\cos x$

Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Paridad: ni par ni impar

Periodo: $p = 2\pi$

Cortes con el eje x: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$

Creciente: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Decreciente: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Máximo local: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Mínimo local: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Convexa:

$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$

Cóncava:

$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi,$

Puntos de inflexión:

$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Pasos

• Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

• La función es periódica de periodo 2π : la estudiamos en un periodo (de 0 a 2π) y repetimos los resultados con el periodo, $k \in \mathbb{Z}$.

• $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ - no es $f(x)$ ni $-f(x)$: la función no es par ni impar.

• Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, es decir $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$

• Corte con el eje y: $f(0) = 2$, es decir $[0; 2]$

• El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$f(x)$	+	-	+

La función es positiva para $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

y negativa para $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

• Una función periódica (que no es constante) no tiene límite en $\pm\infty$.

• Primera derivada: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$

• Puntos estacionarios

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2}$

- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(0, \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

La función es creciente en $[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$ y decreciente en $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$

- Máximo local $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$, mínimo local $[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$

- Segunda derivada: $f''(x) = -2\cos x - 4\sin(2x)$

- Candidatos a puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$$

- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi + \arcsin(\frac{1}{4}))$	$(\pi + \arcsin(\frac{1}{4}), \frac{3\pi}{2})$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	∩	∪	∩

La función es convexa en y cóncava en

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi, \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right]$$

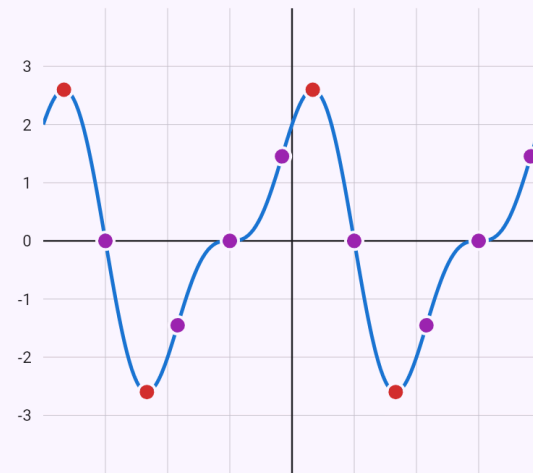
- Puntos de inflexión

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right], \left[2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3\sqrt{15}}{8}\right]$$

- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los

$$\text{Im}(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

Gráfica



$$-3\pi/2 \quad -\pi \quad -\pi/2 \quad 0 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 3\pi/2$$

$$y = \sin 2x + 2\cos x$$

Puntos notables:

- máximo $\left(-\frac{11\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ • inflexión $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- mínimo $\left(-\frac{7\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexión $\left(-\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexión $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- inflexión $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- máximo $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ • inflexión $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
- mínimo $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- inflexión $\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- inflexión $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$
- inflexión $\left(2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right); \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Tangente: asíntotas verticales, imagen $\mathbb{R}$.

Enunciado: [tg x](#) [Estudio de la función](#)

Resultado

Domino: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Paridad: impar

Periodo: $p = \pi$

Cortes con el eje x: $[k\pi; 0]$

Creciente: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Convexa: $\left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Cóncava: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi \right]$

Puntos de inflexión: $[k\pi; 0]$

Asíntotas: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pasos

- Dominio – condiciones $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- La función es periódica de periodo π ; la estudiamos en un periodo (de 0 a π) y repetimos los resultados con el periodo, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\tan x = -f(x)$ – la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).

- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$, es decir $[k\pi; 0]$

- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0; 0]$

- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f(x)$	+	-

La función es positiva para $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ y

negativa para $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi \right)$

- Una función periódica (que no es constante) no tiene límite en $\pm\infty$.

- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

- Asíntotas verticales (allí el límite es infinito):

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

- Primera derivada: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

- La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución – no hay puntos estacionarios.

- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

La función es creciente en $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

- La función no tiene extremos locales.

- Segunda derivada: $f''(x) = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$

- Candidatos a puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

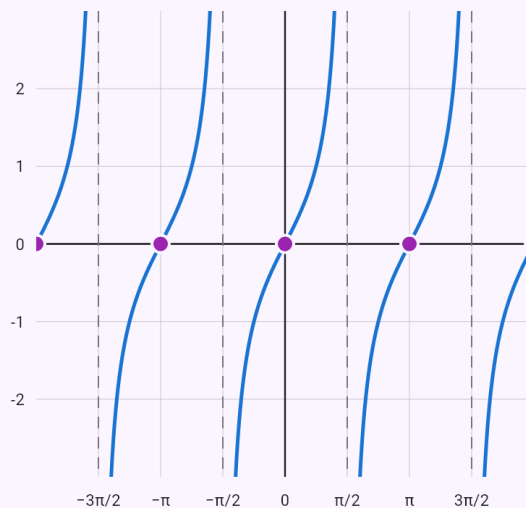
	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

La función es convexa en $\left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ y cóncava en $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi \right]$

- Puntos de inflexión: $[k\pi; 0]$

- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Gráfica



$$y = \tan x$$

Puntos notables:

- inflexión $(-2\pi; 0)$ • inflexión $(-\pi; 0)$
- inflexión $(0; 0)$ • inflexión $(\pi; 0)$ • inflexión $(2\pi; 0)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Tangente hiperbólica – asíntotas horizontales $y = \pm 1$.

Enunciado: $\tanh x$ Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = (-1, 1)$

Paridad: impar

Cortes con el eje x: $[0; 0]$

Creciente: $\mathbb{R}$

Convexa: $(-\infty, 0]$

Cóncava: $[0, \infty)$

Puntos de inflexión: $[0; 0]$

Asíntotas: $y = -1$, $y = 1$

Pasos

- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).
- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir $[0; 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0; 0]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x)$	–	+

La función es positiva para $x \in (0, \infty)$ y negativa para $x \in (-\infty, 0)$

- Límites en los extremos del dominio

función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	+	–
$f(x)$	∪	∩

La función es convexa en $(-\infty, 0]$ y cóncava en $[0, \infty)$

- En $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – la primera derivada no nula (desde la tercera) es de orden impar: punto de inflexión.
- Puntos de inflexión: $[0; 0]$
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\text{Im}(f) = (-1, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

- La función no tiene asíntotas verticales.
- Asíntota en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ – la recta $y = -1$
- Asíntota en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ – la recta $y = 1$

• Primera derivada: $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$

- La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución – no hay puntos estacionarios.

- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty, \infty)$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

La función es creciente en $\mathbb{R}$

- La función no tiene extremos locales.
- Segunda derivada: $f''(x) = -\frac{2 \tanh x}{\cosh^2 x}$
- Candidatos a puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la

Solo la derivada es periódica: los valores de los extremos crecen con k.

Enunciado: $x + 2\sin x$

Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Paridad: impar

Periodo: $p = 2\pi$

Cortes con el eje x: $[0; 0]$

Creciente: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Decreciente: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Máximo local: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Mínimo local: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Convexa: $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$

Cóncava: $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$

Puntos de inflexión:

$[2k\pi; 2k\pi], [\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Pasos

- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- La función no es periódica, pero su derivada sí (periodo 2π): la monotonía, los extremos y la concavidad se repiten con este periodo, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).

• Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir $[0; 0]$

• Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0; 0]$

• Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Primera derivada: $f'(x) = 2 \cos x + 1$

• Puntos estacionarios

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

• Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(0, \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

La función es creciente en $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ y
decreciente en $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

• Máximo local $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, mínimo
local $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

• Segunda derivada: $f''(x) = -2 \sin x$

• Candidatos a puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

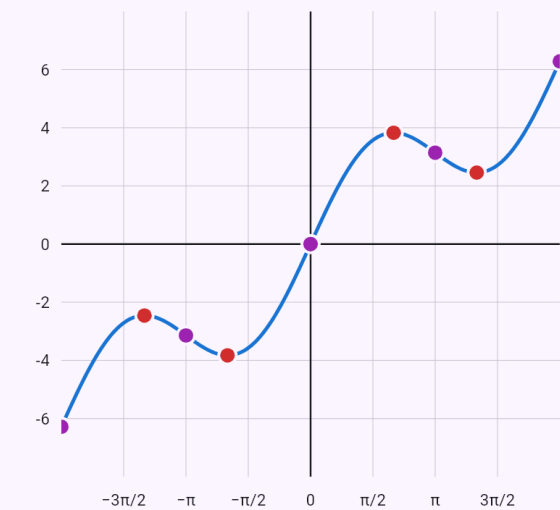
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

La función es convexa en $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ y cóncava en $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$

- Puntos de inflexión: $[2k\pi; 2k\pi]$, $[\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Gráfica



$y = x + 2 \sin x$

Puntos notables:

- inflexión $(-2\pi; -2\pi)$
- máximo $\left(-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- inflexión $(-\pi; -\pi)$
- mínimo $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexión $(0; 0)$
- máximo $\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- inflexión $(\pi; \pi)$
- mínimo $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- inflexión $(2\pi; 2\pi)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Valor absoluto: picos, derivadas laterales.

Enunciado: $|x^2 - 1|$ Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

Paridad: par

Cortes con el eje x: $[-1; 0]$, $[1; 0]$

Creciente: $[-1, 0]$, $[1, \infty)$

Decreciente: $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$

Máximo local: $[0; 1]$

Mínimo local: $[-1; 0]$, $[1; 0]$

Convexa: $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$

Cóncava: $[-1, 1]$

Pasos

- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Quitamos los valores absolutos según el signo de sus argumentos en cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1) \\ 1 - x^2, & x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

- - la función es par (su gráfica es simétrica respecto al eje y).

$$f(-x) = |(-x)^2 - 1| = |x^2 - 1| = f(x)$$

- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$, es decir $[-1; 0]$, $[1; 0]$

- Corte con el eje y: $f(0) = 1$, es decir $[0; 1]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

$$\begin{array}{c|ccc} f(x) & (-\infty, -1) & (-1, 1) & (1, \infty) \\ \hline & + & + & + \end{array}$$

La función es positiva para

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ y negativa para $x \in \emptyset$

- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- La función no tiene asíntotas verticales.

- No hay asíntota en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

- No hay asíntota en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

- Primera derivada

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{|x^2 - 1|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x^2 - 1|}$$

- Puntos estacionarios: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

- En $x = -1$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), la gráfica tiene allí un pico.

- En $x = 1$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), la gráfica tiene allí un pico.

- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	–	+	–	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

La función es creciente en $[-1, 0]$, $[1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$

- En $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – máximo local.
- Máximo local $[0; 1]$, mínimo local $[-1; 0]$, $[1; 0]$
- Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)^3}{|x^2 - 1|^3} = \frac{2(x - 1)^3(x + 1)^3}{|x^2 - 1|^3}$$

- La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene solución.
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

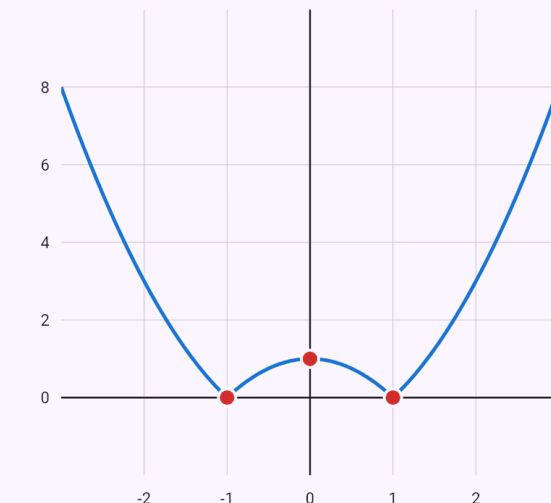
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	+	–	+
$f(x)$	∪	∩	∪

La función es convexa en $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ y cóncava en $[-1, 1]$

- La función no tiene puntos de inflexión.

- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

Gráfica



$$y = |x^2 - 1|$$

Puntos notables:

- mínimo $(-1; 0)$
- máximo $(0; 1)$
- mínimo $(1; 0)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Raíz cúbica: tangente vertical en cero.

Enunciado: $x^{1/3}$

Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Paridad: impar

Cortes con el eje x: $[0; 0]$

Creciente: $\mathbb{R}$

Convexa: $(-\infty, 0]$

Cóncava: $[0, \infty)$

Puntos de inflexión: $[0; 0]$

Pasos

- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$ - la función es impar (su gráfica es simétrica respecto al origen).
- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir $[0; 0]$
- Corte con el eje y: $f(0) = 0$, es decir $[0; 0]$
- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x)$	-	+

La función es positiva para $x \in (0, \infty)$ y negativa para $x \in (-\infty, 0)$

- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- La función no tiene asíntotas verticales.
- No hay asíntota en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, pero $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- No hay asíntota en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, pero $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- Primera derivada: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución - no hay puntos estacionarios.
- En $x = 0$ la derivada es infinita ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$): la gráfica tiene allí una tangente vertical.

- Signo de la primera derivada - donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

La función es creciente en $\mathbb{R}$

- La función no tiene extremos locales.
- Segunda derivada: $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

- La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene solución.

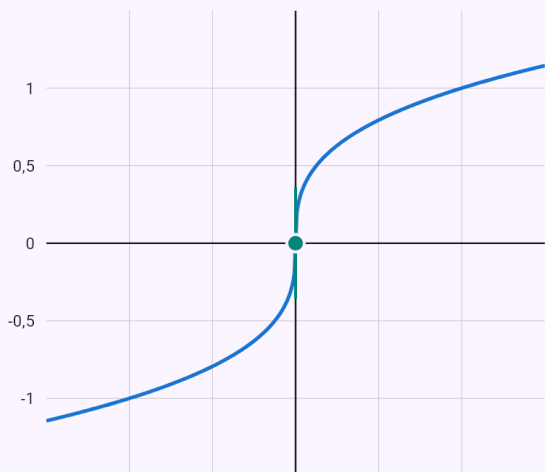
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	∪	∩

La función es convexa en $(-\infty, 0]$ y cóncava en $[0, \infty)$

- Puntos de inflexión: $[0; 0]$
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Gráfica



-1 -0,5 0 0,5 1

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

Puntos notables:

- inflexión $(0; 0)$
- tangente vertical $(0; 0)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Valor absoluto anidado – por tramos, función par.

Enunciado: $|-x^2 + 2|x| + 3|$

Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

Paridad: par

Cortes con el eje x: $[-3; 0], [3; 0]$

Creciente: $[-3, -1], [0, 1], [3, \infty)$

Decreciente: $(-\infty, -3], [-1, 0], [1, 3]$

Máximo local: $[-1; 4], [1; 4]$

Mínimo local: $[-3; 0], [0; 3], [3; 0]$

Convexa: $(-\infty, -3], [3, \infty)$

Cóncava: $[-3, 0], [0, 3]$

Pasos

- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Quitamos los valores absolutos según el signo de sus argumentos en cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty, -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3, 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0, 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

- - la función es par (su gráfica es simétrica respecto al eje y).

$$f(-x) = | -(-x)^2 + 2|(-x)| + 3 | = |-x^2 + 2|x| + 3| :$$

- Cortes con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$, es decir $[-3; 0], [3; 0]$

- Corte con el eje y: $f(0) = 3$, es decir $[0; 3]$

- El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	+	+	+

La función es positiva para

$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$ y negativa para $x \in \emptyset$

- Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- La función no tiene asíntotas verticales.

- No hay asíntota en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

- No hay asíntota en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

- Primera derivada

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x| \cdot |-x^2 + 2|x| + 3|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x| \cdot |-x^2 + 2|x| + 3|}$$

- Puntos estacionarios: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

- En $x = -3$ no existe la derivada: las derivadas laterales

son distintas ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), la gráfica tiene allí un pico.

- En $x = 0$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), la gráfica tiene allí un pico.

- En $x = 3$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), la gráfica tiene allí un pico.

- Signo de la primera derivada – donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$
$f'(x)$	-	+	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

La función es creciente en $[-3, -1]$, $[0, 1]$, $[3, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -3]$, $[-1, 0]$, $[1, 3]$

- En $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – máximo local.
- En $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – máximo local.
- Máximo local $[-1; 4]$, $[1; 4]$, mínimo local $[-3; 0]$, $[0; 3]$, $[3; 0]$
- Segunda derivada

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

- La ecuación $f''(x) = 0$ no tiene solución.
- Signo de la segunda derivada – donde es positiva la

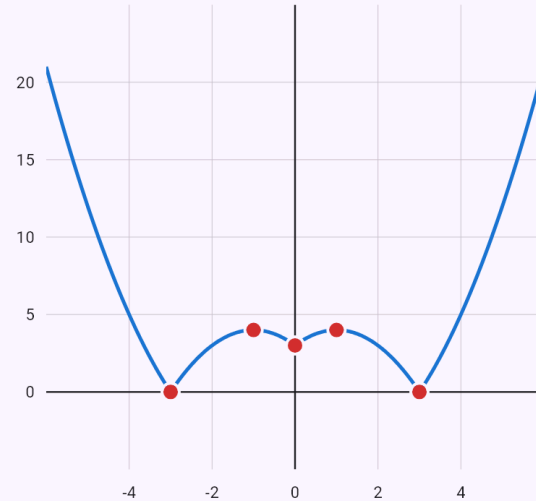
función es convexa, donde es negativa cóncava:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	∪	∩	∩	∪

La función es convexa en $(-\infty, -3]$, $[3, \infty)$ y cóncava en $[-3, 0]$, $[0, 3]$

- La función no tiene puntos de inflexión.
- Imagen – a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

Gráfica



$$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$$

Puntos notables:

- mínimo $(-3; 0)$ máximo $(-1; 4)$ mínimo $(0; 3)$
- máximo $(1; 4)$ mínimo $(3; 0)$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío – un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Suma de valores absolutos – un tramo constante y dos asíntotas oblicuas.

Enunciado: $|x - 2| + |x + 3|$

Estudio de la función

Resultado

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = [5, \infty)$

Paridad: ni par ni impar

Creciente: $[2, \infty)$

Decreciente: $(-\infty, -3]$

Constante: $[-3, 2]$

Mínimo local: $f(x) = 5, x \in [-3, 2]$

Asíntotas: $y = -2x - 1, y = 2x + 1$

Pasos

• Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

• Quitamos los valores absolutos según el signo de sus argumentos en cada intervalo

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty, -3) \\ 5, & x \in [-3, 2] \\ 2x + 1, & x \in [2, \infty) \end{cases}$$

• - no es $f(x)$ ni $-f(x)$: la función no es par ni impar.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x|$$

• La ecuación $f(x) = 0$ no tiene solución - la gráfica no corta el eje x .

• Corte con el eje y : $f(0) = 5$, es decir $[0; 5]$

• El signo de la función entre sus ceros y los puntos fuera del dominio:

• Signo de la primera derivada - donde es positiva la función crece, donde es negativa decrece:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

La función es creciente en $[2, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -3]$. En $[-3, 2]$ es constante ($f' = 0$).

• Mínimo local $f(x) = 5, x \in [-3, 2]$, sin máximo local.

• Segunda derivada: $f''(x) = 0$

• La segunda derivada es cero - la gráfica es (parte de) una recta, ni convexa ni cóncava.

• Imagen - a partir de la monotonía, los extremos y los límites: $\text{Im}(f) = [5, \infty)$

$$\frac{f(x)}{x} \Big| \begin{matrix} (-\infty, \infty) \\ + \end{matrix}$$

La función es positiva para $x \in \mathbb{R}$ y negativa para $x \in \emptyset$

• Límites en los extremos del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• La función no tiene asíntotas verticales.

• Asíntota en $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$,
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ - la recta $y = -2x - 1$

• Asíntota en $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = 1$ - la recta $y = 2x + 1$

• Primera derivada

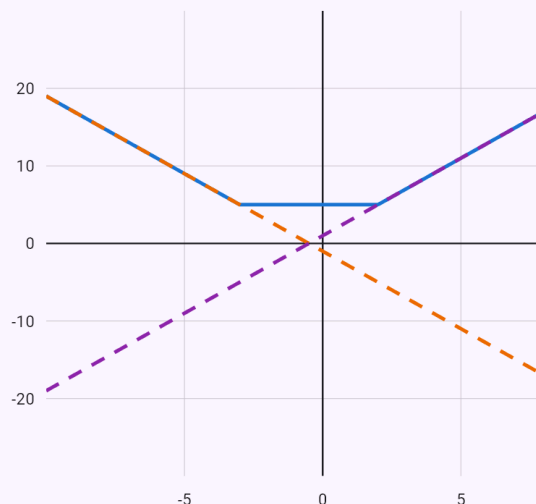
$$f'(x) = \frac{x}{|x-2|} + \frac{x}{|x+3|} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{3}{|x+3|} = \frac{x|x-2|}{|x-2|^2} + \frac{x|x+3|}{|x+3|^2} - \frac{2}{|x-2|} + \frac{3}{|x+3|}$$

• La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene solución - no hay puntos estacionarios.

• En $x = -3$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(-3) = -2, f'_+(-3) = 0$), la gráfica tiene allí un pico.

• En $x = 2$ no existe la derivada: las derivadas laterales son distintas ($f'_-(2) = 0, f'_+(2) = 2$), la gráfica tiene allí un pico.

Gráfica



$$\text{— } y = |x - 2| + |x + 3|$$

$$\text{--- } y = -2x - 1$$

$$\text{--- } y = 2x + 1$$

Extremos locales en rojo, puntos de inflexión en violeta, círculo vacío - un punto donde la función no está definida; asíntotas a trazos.

Limitaciones conocidas

- Una función que ni siquiera tiene derivada periódica ($x \cdot \sin x$) se estudia solo numéricamente en $(-2\pi; 2\pi)$ y sin el periodo; las funciones trigonométricas inversas ($\arcsin$, $\arctan$) aún no se admiten.

Polinomio de Taylor

La aplicación construye el polinomio de Taylor (en 0, el de Maclaurin) del grado indicado: una tabla de las derivadas en el punto, la sustitución en la fórmula y el resto en forma de Lagrange. También puede hallar el grado por sí misma – el menor para el que el error en un punto o en un intervalo no supera una cota dada. La gráfica muestra la función y el polinomio; con un deslizador cambias el grado y ves cómo mejora la aproximación.

Cómo introducirlo

<code>taylor(sin x, 0, 5)</code>	La función, el punto y el grado.
<code>maclaurin(e^x, 4)</code>	El polinomio de Maclaurin – el punto es 0.
<code>taylor(e^x, 0, error=0.001, x=0.5)</code>	El grado según el error en el punto x (en un intervalo, escribe r=... en lugar de x).
<code>ln(1 + x)</code>	Una función con el chip «Polinomio de Taylor» – allí indicas el punto, el grado o la precisión.

Ejemplos

Un polinomio de grado 4 con el resto.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Resultado

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Pasos

- El polinomio de Maclaurin (el polinomio de Taylor en 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Las derivadas y sus valores en a

$$f(x) = \ln(x+1) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \quad f^{(4)}(0) = -6$$

- Sustituimos los valores de las derivadas

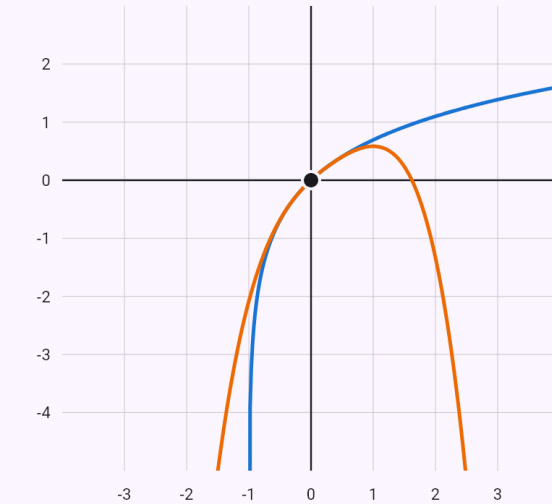
$$\begin{aligned} T_4(x) &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

- El resto (el error) en la forma de Lagrange, ξ entre a y x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!} x^5$$

Gráfica

Grado: 4



— $y = \ln(1+x)$

— $T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

El punto en cuyo entorno el polinomio aproxima la función:

- (0; 0)

Con el control deslizante sobre la gráfica eliges el grado: con un grado mayor el polinomio aproxima la función mejor y más lejos del punto.

El grado según la precisión pedida – un valor aproximado de $e^{0,5}$.

Enunciado: `taylor(e^x, 0, error=0.001, x=0.5)`

Resultado

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0,5) \approx 1,6484$$

Pasos

- El polinomio de Maclaurin (el polinomio de Taylor en 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Las derivadas y sus valores en a

$$f(x) = e^x \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \quad f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \quad f^{(4)}(0) = 1$$

- Sustituimos los valores de las derivadas

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- El resto (el error) en la forma de Lagrange, ξ entre a y x:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^\xi}{5!} x^5$$

- Buscamos el menor grado n cuya estimación del resto

en x no supere el error

$$M_k = \max_{t \in [0, 0,5]} |f^{(k)}(t)|, \quad h = |x - a| = 0,5$$

$$n = 1: |R_1| \leq \frac{1,6487}{2!} \cdot 0,5^2 \approx 0,2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: |R_2| \leq \frac{1,6487}{3!} \cdot 0,5^3 \approx 0,0344 > 10^{-3}$$

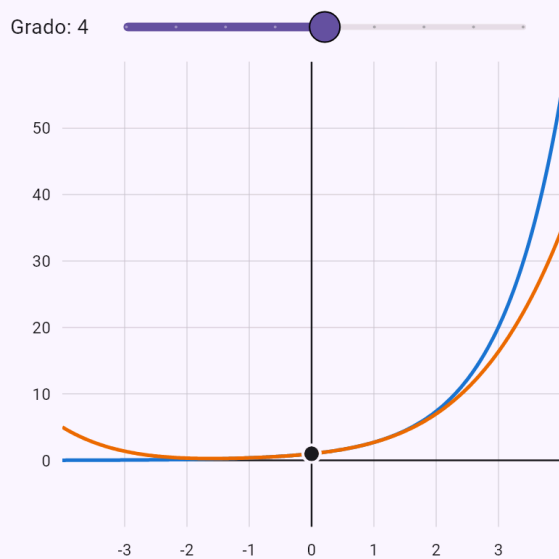
$$n = 3: |R_3| \leq \frac{1,6487}{4!} \cdot 0,5^4 \approx 4,3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: |R_4| \leq \frac{1,6487}{5!} \cdot 0,5^5 \approx 4,3 \cdot 10^{-4} \leq 10^{-3}$$

- El valor aproximado: $f(0,5) \approx T_4(0,5) = \frac{211}{128} \approx 1,6484$

Gráfica

Grado: 4



— $y = e^x$

— $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

El punto en cuyo entorno el polinomio aproxima la función:

● (0; 1)

Con el control deslizable sobre la gráfica eliges el grado: con un grado mayor el polinomio aproxima la función mejor y más lejos del punto.

Integrales indefinidas

La aplicación integra con los métodos que se enseñan en clase y dice en cada paso qué hace. Comprueba el resultado derivando (la comprobación es el último paso) y dibuja el integrando y la primitiva.

Las raíces de potencias de la variable ($\sqrt[3]{x^4}$, $\sqrt{x^3}$) se escriben como potencias de exponente racional; un valor absoluto ($|\cos x|$, $\sqrt{1 - \sin^2 x}$), con la función signo sgn .

Si una integral no tiene primitiva elemental (como e^{-x^2}), la aplicación lo dice y la expresa mediante una función especial (erf , Si , ...).

Cómo introducirlo

<code>int(x e^x, x)</code>	Una integral con la variable.
<code>int(x^2 sin x)</code>	Sin la variable cuando solo hay una.
<code>∫ x^2 dx</code>	Con el signo de integral, también desde una foto.
<code>x e^x</code>	Una función con el chip «Integrar».

Integrales inmediatas y cambio de variable

La integral de una suma término a término, las constantes fuera de la integral, las integrales de la tabla (también con una función interior lineal) y el cambio de variable cuando el integrando contiene una función junto con la derivada de su interior.

Ejemplos

Término a término según la tabla.

Enunciado: $\text{int}(3x^2 - 2/x + e^x)$

Resultado

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = x^3 + e^x - 2 \ln |x|$$

Pasos

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = \int 3x^2 dx + \int e^x dx + \int -\frac{2}{x} dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int e^x dx = e^x$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -\frac{2}{x} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx$$

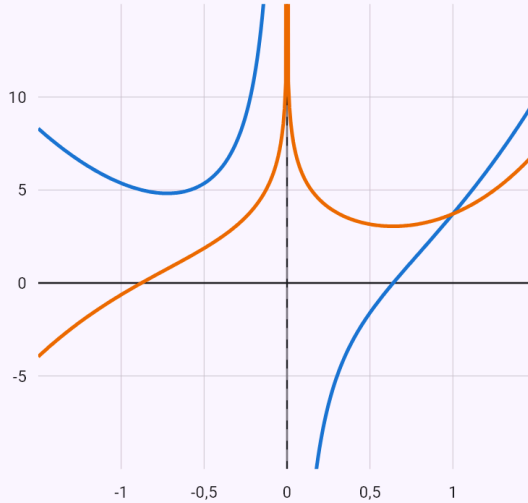
- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

- Comprobación: la derivada del resultado es el

$$\text{integrando: } (x^3 + e^x - 2 \ln |x|)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$$

Gráfica



$$\begin{aligned} \text{— } f(x) &= 3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \\ \text{— } F(x) &= x^3 + e^x - 2 \ln |x| \end{aligned}$$

El integrando f y la primitiva F para $C = 0$ (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

El cambio de variable $t = x^2$.

Enunciado: $\text{int}(2x \cos(x^2))$

Resultado

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$

Pasos

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int 2x \cos(x^2) dx = 2 \int x \cos(x^2) dx$$

- Sustitución $t = x^2$, $dt = 2x dx$:

$$\int x \cos(x^2) dx = \int \frac{\cos t}{2} dt$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{\cos t}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt$$

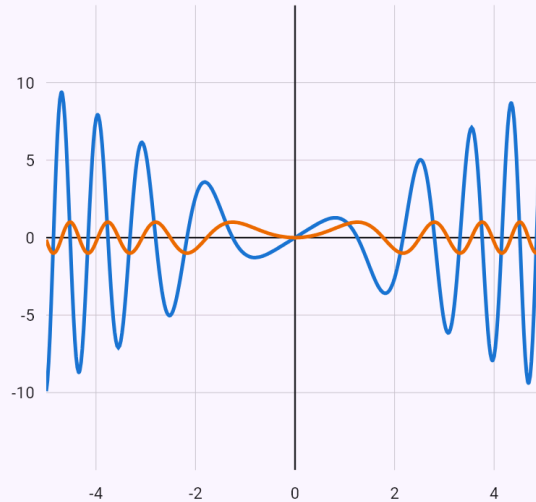
- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \cos t dt = \sin t$$

- Volvemos a la variable original: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin(x^2)}{2}$

- Comprobación: la derivada del resultado es el integrando: $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$

Gráfica



— $f(x) = 2x \cos(x^2)$

— $F(x) = \sin(x^2)$

El integrando f y la primitiva F para $C = 0$ (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Integral con constantes a, b .

Enunciado: $\text{int}(1/(a - bx)^3)$

Resultado

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2} + C$$

Condiciones: $b \neq 0$

Pasos

- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a :

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2}$$

- Comprobación: la derivada del resultado es el

integrando: $\left(\frac{1}{2b(bx - a)^2}\right)' = \frac{1}{(a - bx)^3}$

Integración por partes

El producto de un polinomio por una exponencial, una función trigonométrica o un logaritmo la aplicación lo integra por partes, varias veces si hace falta; integrales como $e^x \sin x$ por partes cíclicamente.

Ejemplos

Por partes dos veces seguidas.

Enunciado: $\int x^2 e^x dx$

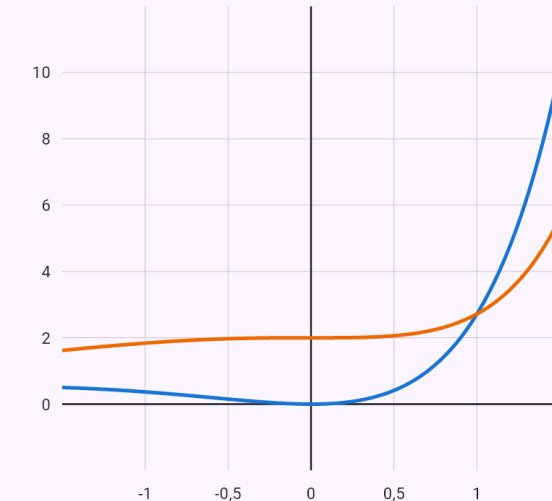
Resultado

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Pasos

- Por partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = e^x$, luego $u' = 2x$, $v = e^x$: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
 $\int 2x e^x dx = 2 \int x e^x dx$
- Por partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = e^x$, luego $u' = 1$, $v = e^x$: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int e^x dx = e^x$
- Comprobación: la derivada del resultado es el integrando: $(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x)' = x^2 e^x$

Gráfica



— $f(x) = x^2 e^x$
— $F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

El integrando f y la primitiva F para $C = 0$ (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Funciones racionales

Una función racional la aplicación la divide si es necesario, factoriza el denominador y la descompone en fracciones simples, que integra en logaritmos y arcotangentes.

Un denominador que no se puede factorizar en los racionales ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$) lo factoriza en los reales: cada par de raíces complejas conjugadas da un factor cuadrático sin raíces reales.

Ejemplos

Descomposición en fracciones simples.

Enunciado: $\text{int}((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))$

Resultado

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|$$

Pasos

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales:

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} \right) dx$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} \right) dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int -\frac{2}{x - 1} dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{3}{x - 2} dx = 3 \int \frac{1}{x - 2} dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{x - 2} dx = \ln |x - 2|$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -\frac{2}{x - 1} dx = -2 \int \frac{1}{x - 1} dx$$

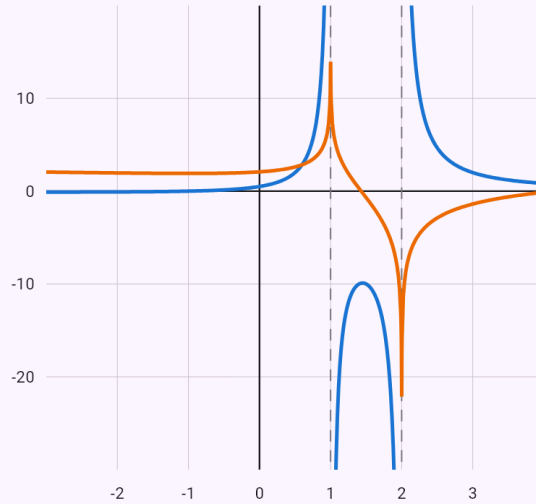
- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{x - 1} dx = \ln |x - 1|$$

- Comprobación: la derivada del resultado es el integrando

$$(3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|)' = \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Gráfica



$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$F(x) = 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|$$

El integrando f y la primitiva F para $C = 0$ (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Factorización del denominador $x^4 + 1$ en los reales.

Enunciado: $\int \frac{1}{x^4 + 1} dx$

Resultado

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x + 1) \right)$$

Pasos

- Factorizamos el denominador en $\mathbb{R}$: sus raíces complejas forman pares conjugados $r, \bar{r}$ y cada par da un factor cuadrático $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2 \operatorname{Re} r \cdot x + |r|^2$ sin raíces reales:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx = \int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx + \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx$$

- El denominador no tiene raíces reales: un múltiplo de su derivada separado del numerador da $\ln$, el resto, completando el cuadrado, da $\arctan$

$$\int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

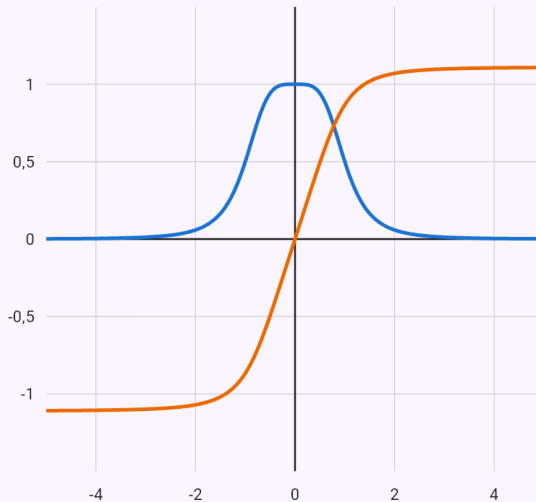
- El denominador no tiene raíces reales: un múltiplo de su derivada separado del numerador da $\ln$, el resto, completando el cuadrado, da $\arctan$

$$\int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx = -\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2 + \sqrt{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$$

- Comprobación: la derivada del resultado es el integrando

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) \right)' + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan' \left(\sqrt{2} (x + 1) \right) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

Gráfica



— $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

— $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x + 1) \right)$

El integrando f y la primitiva F para $C = 0$ (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Funciones trigonométricas

Primero las fórmulas ($\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, productos en sumas), con una potencia impar el cambio $t = \sin x$ o $t = \cos x$, con una función racional de seno y coseno un cambio según la paridad, y el cambio universal $t = \tan(x/2)$ solo al final.

Ejemplos

Una potencia impar del seno – el cambio $t = \cos x$.

Enunciado: $\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$

Resultado

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Pasos

- Una potencia impar: sustitución $t = \cos x$,

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$dt = -\sin x dx$$

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \int (t^4 - t^2) dt$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int (t^4 - t^2) dt = \int t^4 dt + \int -t^2 dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int t^4 dt = \frac{t^5}{5}$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -t^2 dt = -\int t^2 dt$$

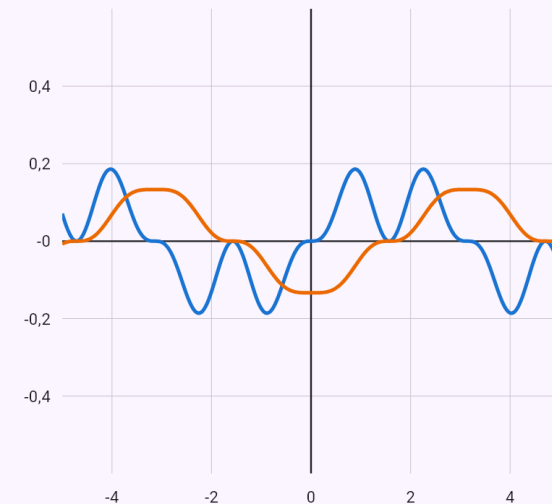
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}$

- Volvemos a la variable original:

$$t = \cos x : \quad \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$$

- Comprobación: la derivada del resultado es el integrando: $\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \right)' = \cos^2 x \sin^3 x$

Gráfica



$$\begin{aligned} \text{— } f(x) &= \cos^2 x \sin^3 x \\ \text{— } F(x) &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \end{aligned}$$

El integrando f y la primitiva F para $C = 0$ (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Funciones hiperbólicas

Integrales de la tabla ($\int \sinh x dx = \cosh x + C$, $\int 1/\cosh^2 x dx = \tanh x + C$, ...), $\int \tanh x dx$ por el logaritmo de la derivada, por partes ($x \sinh x$, $\operatorname{arsinh} x$), cuadrados por las fórmulas $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$, $\tanh^2 x = 1 - 1/\cosh^2 x$; el resto por la definición mediante exponenciales.

Ejemplos

La fórmula $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$.

Enunciado: `int(sinh(x)^2)`

Resultado

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Pasos

- Usamos la fórmula $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:

$$\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$$

- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a :

$$\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$$

- Comprobación: la derivada del resultado es el integrando

$$\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} = \sinh^2 x$$

Raíces

Integrales con la raíz de una función lineal fraccionaria por cambio de variable, con la raíz de un trinomio de segundo grado por un cambio de Euler, e integrales binomias según las condiciones de Chebyshev – si no se cumple ninguna, la aplicación dice que la integral no es elemental.

Ejemplos

Un cambio de Euler.

Enunciado: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Resultado

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$$

Pasos

- Sustitución de Euler (tipo 1) $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$: la integral pasa a ser la de una función racional de t

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$
$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt$$

- Sacamos la constante fuera de la integral

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt$$

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \int t dt + \int \frac{2}{t} dt + \int \frac{1}{t^3} dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int t dt = \frac{t^2}{2}$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{2}{t} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t|$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2}$$

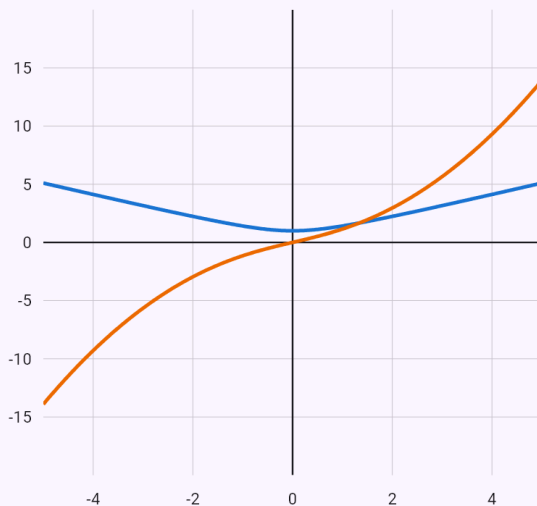
- Volvemos a la variable original

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} : \quad \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} + \frac{(x^2 + 1)}{2}$$

- Comprobación: la derivada del resultado es el integrando

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} \right)' = \sqrt{x^2 + 1}$$

Gráfica



— $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

— $F(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$

El integrando f y la primitiva F para $C = 0$ (otra C la desplaza arriba o abajo). Donde f es positiva, F crece; donde es negativa, F decrece.

Limitaciones conocidas

- Para algunas integrales encontramos el resultado sin procedimiento – la aplicación lo indica en los pasos.
- Un cálculo sin pasos que tarda demasiado se detiene – la aplicación lo indica.

Integrales definidas y sus aplicaciones

La aplicación calcula una integral definida con la regla de Barrow y dibuja el área bajo la gráfica – la parte sobre el eje x de otro color que la de debajo. También resuelve integrales impropias y aplicaciones: área, longitud de curva, volumen y área lateral de un sólido de revolución, también para curvas en forma paramétrica y en coordenadas polares.

Integral definida

La aplicación halla la primitiva como en la integral indefinida y sustituye los límites. Con un cambio de variable transforma los límites directamente. Si la integral no tiene primitiva elemental, la calcula numéricamente.

Cómo introducirlo

<code>int(x^2, x, 0, 3)</code>	Una integral con la variable y los límites.
<code>\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx</code>	Desde una foto o en LaTeX.
<code>x^2</code>	Una función con el chip «Integrar» – escribe los límites en los campos.

Ejemplos

Un cambio de variable con los límites transformados.

Enunciado: $\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx$

Resultado

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = \sin 1 \approx 0,8415$$

Pasos

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int 3x^2 \cos(x^3) dx = 3 \int x^2 \cos(x^3) dx$$

- Sustitución $t = x^3, dt = 3x^2 dx$:

$$\int x^2 \cos(x^3) dx = \int \frac{\cos t}{3} dt$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{\cos t}{3} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \cos t dt = \sin t$$

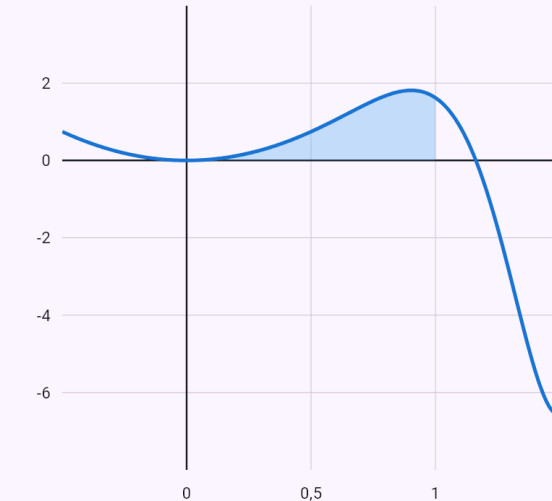
- Con la sustitución recalculamos también los límites – no hace falta volver a la variable original:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$$

- La regla de Barrow (Newton–Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$$

Gráfica



$$f(x) = 3x^2 \cos(x^3)$$

sobre el eje x (+) bajo el eje x (-)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

Integrales impropias

Un límite infinito o una función no acotada la aplicación los trata con un límite de la primitiva y dice si la integral converge o diverge. Si ese límite no se puede calcular, decide con un criterio de comparación.

Ejemplos

Un límite superior infinito.

Enunciado: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Resultado

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

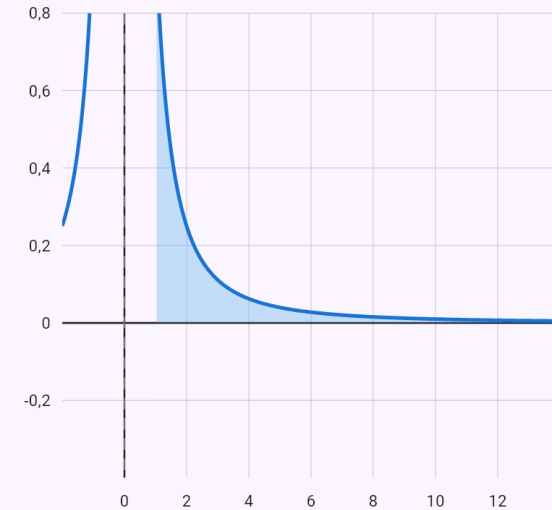
Pasos

• Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$

• Una integral impropia: en un límite infinito y donde la función no está acotada tomamos el límite de la primitiva. Los límites son finitos, la integral converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Gráfica



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

■ sobre el eje x (+) ■ bajo el eje x (-)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

Una función no acotada en el límite inferior.

Enunciado: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Resultado

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Pasos

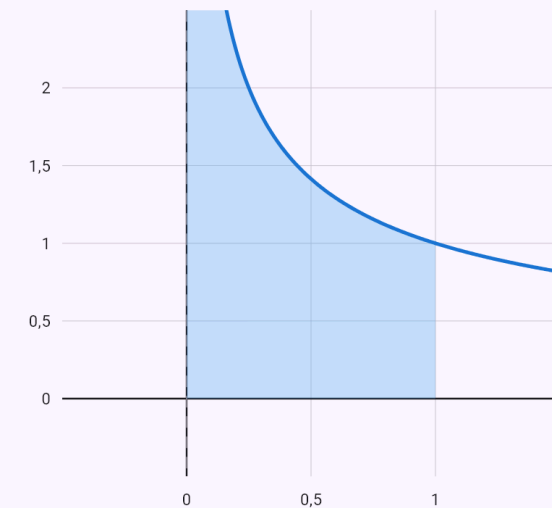
• Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$$

• Una integral impropia: en un límite infinito y donde la función no está acotada tomamos el límite de la primitiva. Los límites son finitos, la integral converge

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Gráfica



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

■ sobre el eje x (+) ■ bajo el eje x (-)

La integral definida es el área entre la gráfica y el eje x: la parte sobre el eje cuenta positiva, la parte debajo negativa.

Área bajo una curva y entre curvas

El área entre una gráfica y el eje x, o entre dos curvas, la aplicación la calcula como la integral del valor absoluto de la diferencia – las partes de arriba y de abajo cuentan ambas en positivo. No hace falta dar los límites: los encuentra como los puntos de corte de las curvas.

Cómo introducirlo

<code>área(x^2, x)</code>	El área entre dos curvas, límites a partir de los puntos de corte.
<code>área(sin x, 0, pi)</code>	El área entre una curva y el eje x en un intervalo.
<code>x^2</code>	Una función con el chip «Integrar» → «Área entre curvas»; escribe la segunda curva y los límites en los campos.

Ejemplos

El área entre una parábola y una recta.

Enunciado: x^2 Área entre curvas, segunda curva x

Resultado

$$S = \frac{1}{6}$$

Pasos

- Los límites son las intersecciones de las curvas:

$$x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$$

- El área entre las curvas (las partes por encima y por debajo cuentan positivas), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$:

$$S = \int_0^1 |x^2 - x| dx$$

- La expresión en valor absoluto no cambia de signo en el intervalo: quitamos el valor absoluto según él:

$$\int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int (-x^2 + x) dx = \int -x^2 dx + \int x dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -x^2 dx = - \int x^2 dx$$

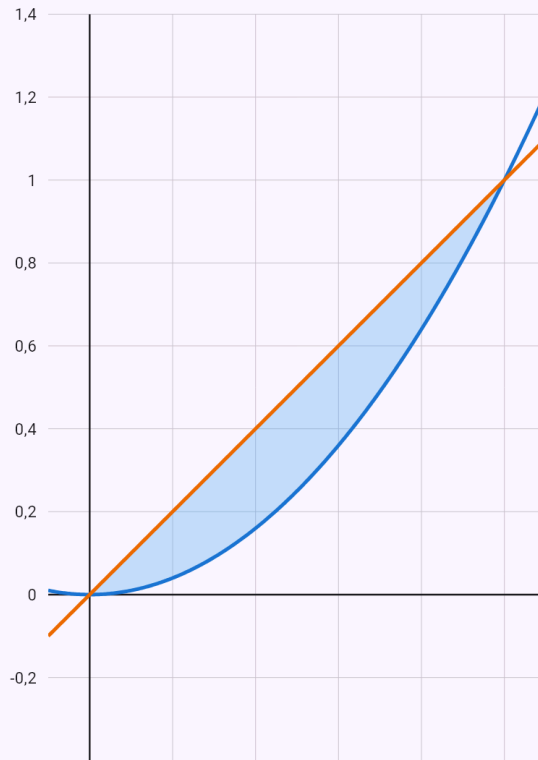
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- La regla de Barrow (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

Gráfica



0 0,2 0,4 0,6 0,8 1

— $f(x) = x^2$
— $g(x) = x$

La región sombreada: su área es el resultado (las partes por encima y por debajo del eje cuentan positivas).

Longitud de una curva

La longitud de una gráfica en un intervalo la aplicación la calcula con la fórmula $l = \int \sqrt{1 + f'^2} dx$. Intenta simplificar la raíz (en una semicircunferencia sale el arcoseno); cuando la integral no tiene primitiva elemental, el resultado es numérico.

Cómo introducirlo

longitud($x^{(3/2)}$, 0, 4)

La longitud de la curva en un intervalo.

Ejemplos

La longitud de una semicircunferencia.

Enunciado: `sqrt(1 - x^2)` Longitud de curva, límites -1 y 1

Resultado

$$l = \pi \approx 3,1416$$

Pasos

- La longitud de la curva

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

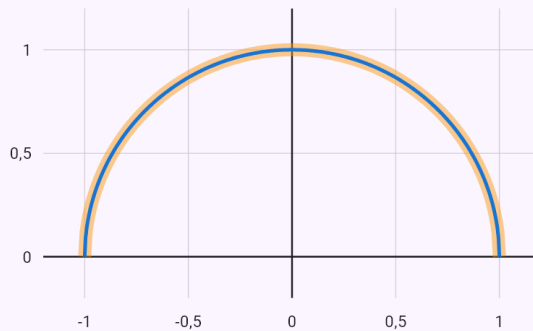
- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

- Una integral impropia: en un límite infinito y donde la función no está acotada tomamos el límite de la primitiva. Los límites son finitos, la integral converge

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x - \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Gráfica



$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

El arco resaltado: su longitud es el resultado.

Volumen de un sólido de revolución

El volumen de un sólido de revolución alrededor del eje x la aplicación lo calcula con la fórmula $V = \pi \int f^2 dx$ (entre dos curvas, por arandelas), alrededor del eje y por el método de las capas cilíndricas. También muestra el sólido en 3D – gíralo con el dedo.

Cómo introducirlo

`volumen(sqrt(x), 0, 4)`

El volumen del sólido al girar alrededor del eje x.

`volumen(x^2, 0, 2, y)`

Giro alrededor del eje y.

Ejemplos

Un paraboloide de revolución.

Enunciado: `sqrt(x)` Volumen de un sólido, límites 0 y 4

Resultado

$$V = 8\pi \approx 25,1327$$

Pasos

- El volumen del sólido de revolución alrededor del eje x,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx: V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

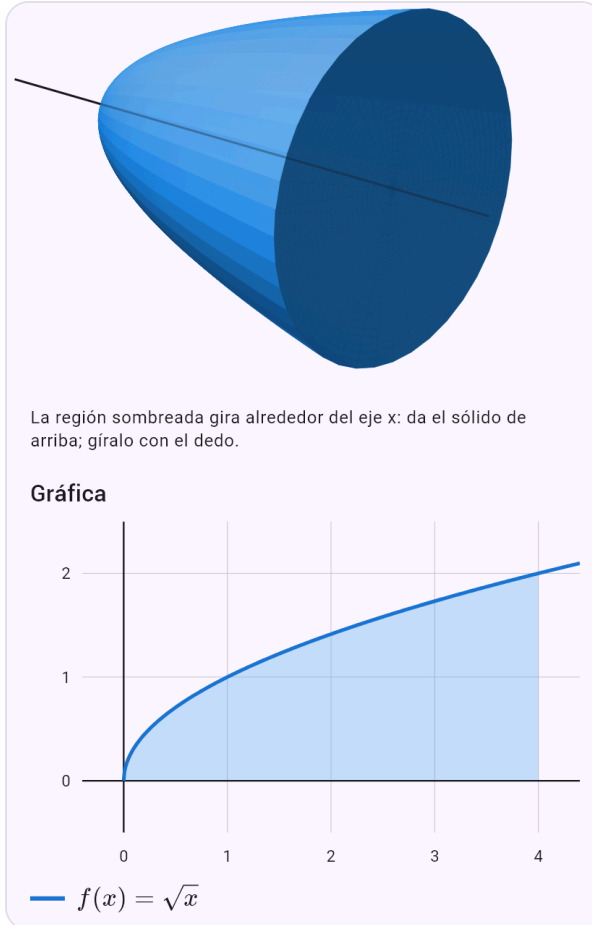
- La regla de Barrow (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$:

$$\int_0^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8 - 0 = 8$$

- El valor de la integral por la constante delante:

$$V = \pi \cdot 8 = 8\pi$$

Sólido de revolución



Área lateral de un sólido de revolución

El área lateral la aplicación la calcula con la fórmula $S = 2\pi \int f\sqrt{1 + f'^2} dx$; el producto bajo la raíz a menudo se simplifica (en una esfera sale una constante).

Cómo introducirlo

`superficie(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`

El área lateral al girar alrededor del eje x.

Ejemplos

La superficie de una esfera de radio 2.

Enunciado: `sqrt(4 - x^2)`

Superficie de un sólido, límites -2 y 2

Resultado

$$S = 16\pi \approx 50,2655$$

Pasos

- La superficie lateral del sólido de revolución alrededor del eje x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-2}^2 2 dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 2 dx = 2x$

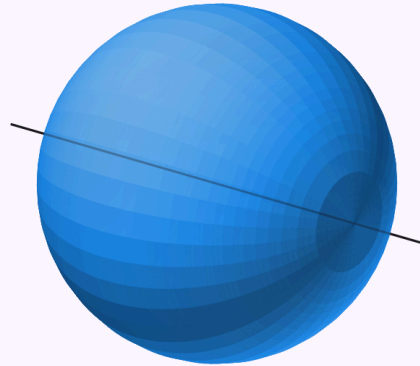
- La regla de Barrow (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$:

$$\int_{-2}^2 2 dx = [2x]_{-2}^2 = 4 - (-4) = 8$$

- El valor de la integral por la constante delante:

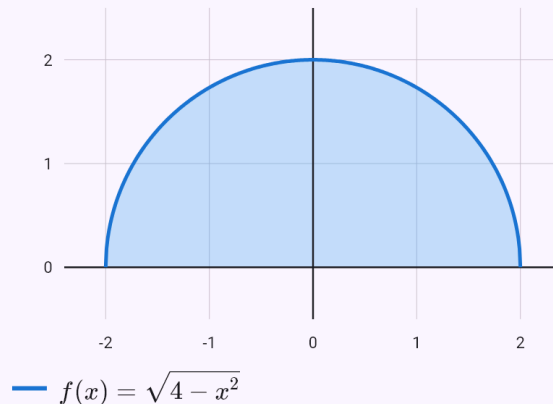
$$S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

Sólido de revolución



La región sombreada gira alrededor del eje x: da el sólido de arriba; gíralo con el dedo.

Gráfica



Curvas paramétricas y en coordenadas polares

Escribe una curva $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ en dos líneas, y una curva en coordenadas polares como $r = \rho(\varphi)$. El chip «Integrar» ofrece entonces el área, la longitud, el volumen y la superficie; los límites del parámetro son opcionales (sin ellos, de 0 a 2π). El volumen y la superficie se calculan girando alrededor del eje x la parte de la curva situada sobre el eje.

Cómo introducirlo

$$x = t - \sin(t)$$

$$y = 1 - \cos(t)$$

Una curva paramétrica en dos líneas.

$$r = 1 + \cos(\phi)$$

Una curva en coordenadas polares (también $r^2 = \dots$ para una lemniscata).

longitud($x=\cos(t)^3$, $y=\sin(t)^3$, t , 0 , 2π)

La forma escrita con el parámetro y los límites.

Ejemplos

El área bajo un arco de cicloide.

Enunciado: $x = t - \sin(t)$

$y = 1 - \cos(t)$ **Área**

Resultado

$$S = 3\pi \approx 9,4248$$

Pasos

- Las derivadas respecto al parámetro:

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$$

- El área bajo una curva paramétrica (dentro de una curva

cerrada) para $t \in [0, 2\pi]$, $S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \right|$:

$$S = \left| \int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt \right|$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \int 1 dt + \int -2 \cos t dt -$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 1 dt = t$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -2 \cos t dt = -2 \int \cos t dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \cos t dt = \sin t$$

- Usamos la fórmula $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:

$$\int \cos^2 t dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2}$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt$$

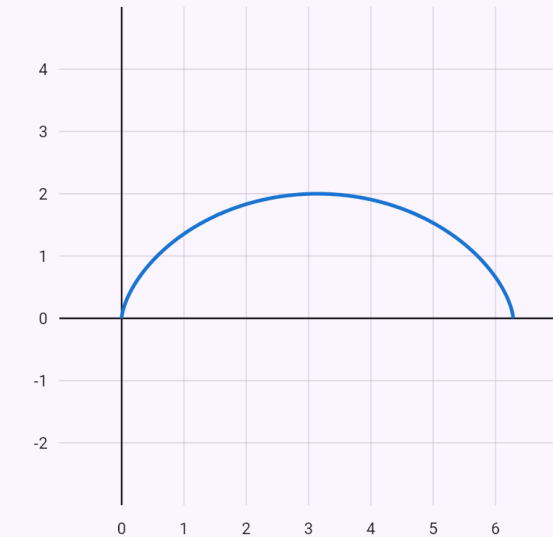
- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a :

$$\int \cos(2t) dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$

- La regla de Barrow (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{\sin(2t)}{4} \right]$$

Gráfica



$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

La curva dada paramétricamente (o en coordenadas polares), dibujada para los límites elegidos del parámetro.

La longitud de una cardioide.

Enunciado: $r = 1 + \cos(\phi)$

Longitud de curva

Resultado

$$l = 8$$

Pasos

- Las derivadas respecto al parámetro: $\rho'(\varphi) = -\sin \varphi$

- La longitud de una curva en coordenadas polares para

$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi$$

- Dividimos el intervalo en los ceros de las expresiones en valor absoluto (π) y en cada parte quitamos el valor absoluto según el signo

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Sacamos la constante fuera de la integral

$$\int 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a :

$$\int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

- La regla de Barrow (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{\pi} 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$

- Sacamos la constante fuera de la integral

$$\int -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = -2 \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a :

$$\int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

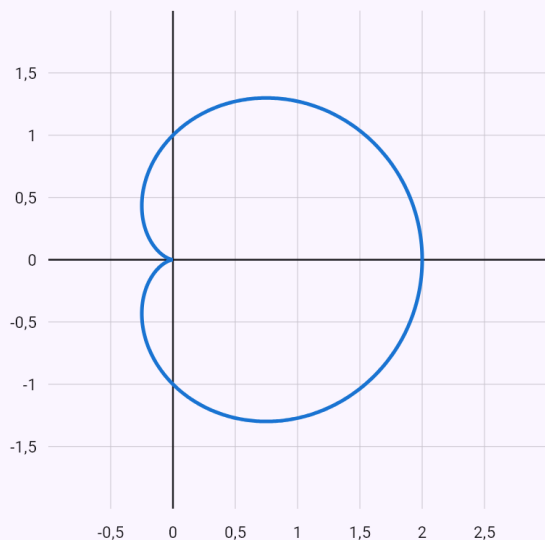
- La regla de Barrow (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[-4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) = 4$$

- Sumamos los valores de las partes:

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$

Gráfica



— $r = \cos \varphi + 1$

La curva dada paramétricamente (o en coordenadas polares),
dibujada para los límites elegidos del parámetro.

Curvas dadas por una ecuación

Para una ecuación en x e y ($x^3 + y^3 = 3xy$) el chip «Integrar» ofrece el área, la longitud, el volumen y la superficie. Sin límites toma toda la curva cerrada: la circunferencia y la elipse en forma paramétrica con $\cos$ y $\sin$, un lazo que pasa por el origen (el folium de Descartes) mediante las rectas $y = tx$ – el área del lazo entonces de forma exacta a partir de los sectores, la longitud, el volumen y la superficie numéricamente. Con límites en x usa la rama superior $y = f(x)$.

Cómo introducirlo

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Una curva cerrada – el chip «Integrar» sin límites.

$$y^2 = x^3$$

Una curva no cerrada – el chip «Integrar» con límites
en x (la rama superior $y = x^{(3/2)}$).

Ejemplos

El área del lazo del folium – mediante las rectas $y = tx$ y los sectores, $S = 3/2$.

Enunciado: $x^3 + y^3 = 3xy$

Integrar → Área

Resultado

$$S = \frac{3}{2}$$

Pasos

- El lazo que pasa por el origen en forma paramétrica mediante las rectas $y = tx$ – sustituimos en la ecuación y despejamos x

$$y = tx \Rightarrow x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}, \quad t \in (0; \infty)$$

- El área del lazo sumando los sectores desde el origen: $S = \frac{1}{2} \int (x \cdot y' - y \cdot x') dt$, y sobre la recta $y = tx$, $x \cdot y' - y \cdot x' = x^2$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt$$

- Sacamos la constante fuera de la integral

$$\int \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \frac{9}{2} \int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt$$

- Sustitución $u = t^3 + 1$, $du = 3t^2 dt$:

$$\int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt = \int \frac{1}{3u^2} du$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{1}{3u^2} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2} du$$

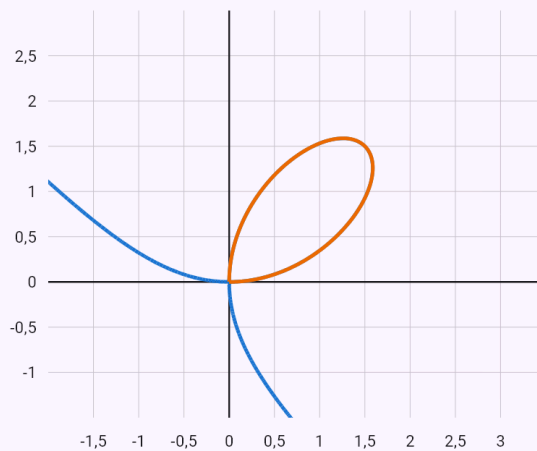
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}$

- Volvemos a la variable original: $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3(t^3 + 1)}$

- Una integral impropia: en un límite infinito y donde la función no está acotada tomamos el límite de la primitiva. Los límites son finitos, la integral converge

$$\int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2(t^3 + 1)} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

Gráfica



$$\text{— } x^3 + y^3 = 3xy$$
$$\text{— } x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$$

Toda la curva dada por la ecuación; resaltada la parte con la que se calcula.

Limitaciones conocidas

- La longitud de $y = \sqrt[3]{x}$ (y de curvas parecidas) solo se calcula numéricamente – lleva a una integral elíptica, que no tiene primitiva elemental.
- En las curvas paramétricas y polares todavía faltan el área coloreada y el sólido en 3D; giro solo alrededor del eje x .
- El giro alrededor del eje y solo para una región a un lado del eje.
- En las curvas implícitas sin límites solo se admiten la circunferencia, la elipse y un lazo que pasa por el origen; giro solo alrededor del eje x .

Series infinitas

En una serie numérica la aplicación comprueba primero la condición necesaria de convergencia y luego elige un criterio según la forma de la serie – serie geométrica, $\sum 1/n^p$, criterio del cociente, de la raíz, de comparación por paso al límite, de la integral o de Leibniz; en una serie alternada distingue la convergencia absoluta de la condicional. Cuando es posible, suma la serie. La gráfica muestra los términos y las sumas parciales.

Series numéricas

La aplicación halla la suma de series geométricas y telescópicas, de series $\sum P(n)q^n$ y de series conocidas ($\sum 1/n^2 = \pi^2/6$); en otro caso la calcula numéricamente. Una suma finita se calcula como en el colegio – telescópica, aritmética, geométrica, si no término a término. También se resuelve una ecuación con la suma de una serie geométrica, comprobando la condición de convergencia $|q| < 1$.

Cómo introducirlo

<code>suma(1/n^2)</code>	El término general; el índice n desde 1 (también sum).
<code>suma(1/n^2, n, 1, oo)</code>	Con el índice y el valor inicial.
<code>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}</code>	Desde una foto o en LaTeX.
<code>1/n^2</code>	El término general con el chip «Serie» – escribe el índice inicial en el campo.
<code>suma(2k+1, k, 1, 100)</code>	Una suma finita – con el índice, el límite inferior y el superior.

Ejemplos

La serie $\sum 1/n^2$ – converge, la suma es $\pi^2/6$.

Enunciado: `sum(1/n^2)`

Resultado

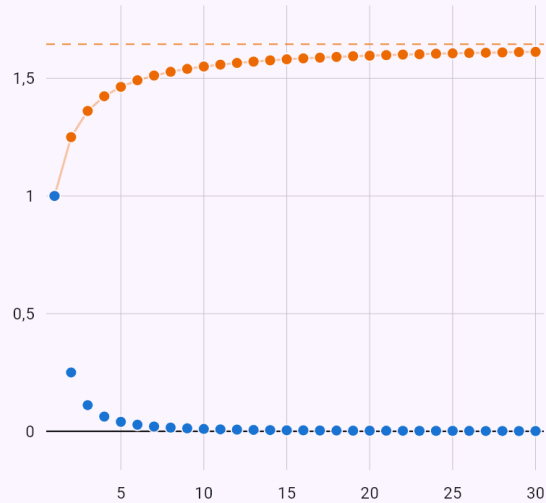
La serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$$

Pasos

- Se cumple la condición necesaria de convergencia (por sí sola no decide): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es del tipo $\sum 1/n^p$ con $p = 2 > 1$: converge.
- La suma de una serie conocida: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Gráfica



● términos a_n ● sumas parciales s_n — la suma

Los puntos son los términos a_n y las sumas parciales $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Si la serie converge, los términos tienden a cero y las sumas parciales a su suma.

El criterio de Leibniz – convergencia condicional.

Enunciado: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Resultado

La serie converge, pero no absolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0,6931$$

Pasos

- Se cumple la condición necesaria de convergencia (por sí sola no decide): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

- Los términos tienen ambos signos: primero la convergencia absoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- La serie armónica diverge: los términos agrupados por potencias de dos, cada grupo es al menos $1/2$

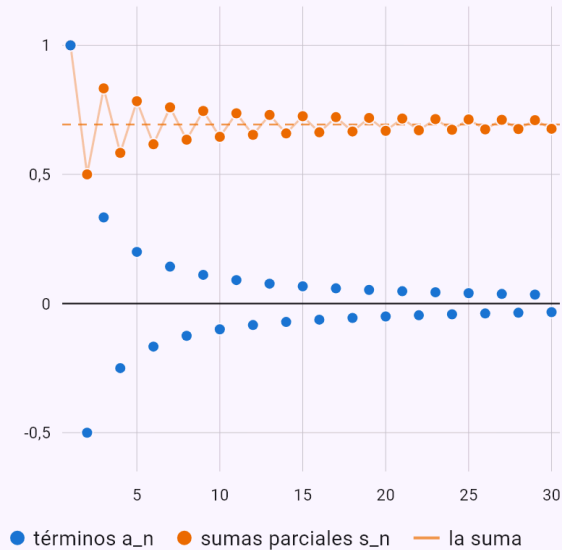
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Criterio de Leibniz: $|a_n| = \frac{1}{n}$ decrece y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$: la serie converge.

- Conclusión: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero no absolutamente (según el criterio de Leibniz).

- La suma de una serie conocida: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Gráfica



Los puntos son los términos a_n y las sumas parciales $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Si la serie converge, los términos tienden a cero y las sumas parciales a su suma.

El criterio del cociente y la suma.

Enunciado: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Resultado

La serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Pasos

- Se cumple la condición necesaria de convergencia (por sí sola no decide): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$

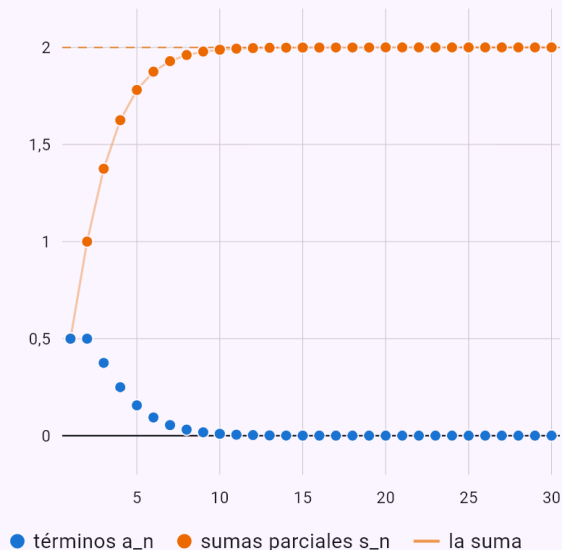
- Criterio del cociente (d'Alembert) la serie converge.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

- Una serie $\sum P(n) \cdot q^n$ sumada derivando la serie

$$\text{geométrica: } \sum_{n=0}^{\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$$

Gráfica



Los puntos son los términos a_n y las sumas parciales $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Si la serie converge, los términos tienden a cero y las sumas parciales a su suma.

No se cumple la condición necesaria – la serie diverge.

Enunciado: `sum(n/(n+1))`

Resultado

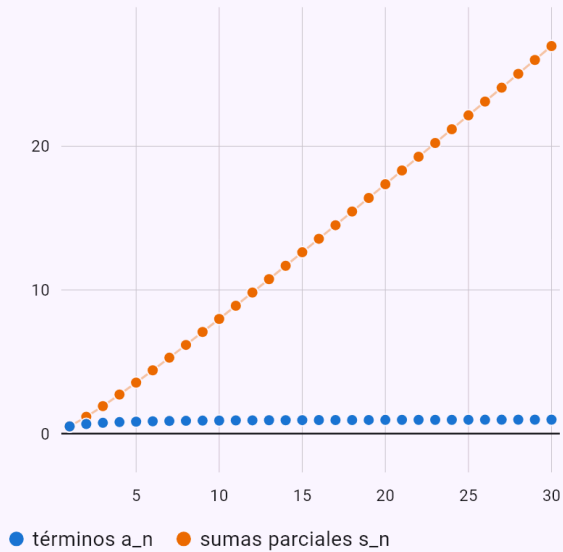
La serie diverge.

Pasos

- No se cumple la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

Gráfica



Los puntos son los términos a_n y las sumas parciales $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Si la serie converge, los términos tienden a cero y las sumas parciales a su suma.

Suma telescópica – quedan el primer y el último término.

Enunciado: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Resultado

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 10$$

Pasos

- Suma telescópica – los términos vecinos se cancelan, solo quedan el primero y el último:

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 11 - 1 = 10$$

Ecuación con la suma de una serie geométrica.

Enunciado: $\text{sum}((2^x)^n, n, 1, \infty) = 1$

Resultado

$$x = -1$$

Pasos

- La serie es geométrica de razón $q = 2^x$ y converge para

$$|2^x| < 1; \text{ su suma: } \sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$$

- Resolvemos: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ cumple la condición de convergencia: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Series de potencias

En una serie de potencias la aplicación halla el radio de convergencia con el criterio del cociente, estudia los extremos como series numéricas e indica el intervalo de convergencia; cuando es posible, también la suma. La gráfica muestra las sumas parciales con un deslizador para el número de términos.

Ejemplos

El intervalo de convergencia $[-1, 1)$.

Enunciado: $\text{sum}(x^n/n)$

Resultado

$$x \in [-1, 1)$$

Pasos

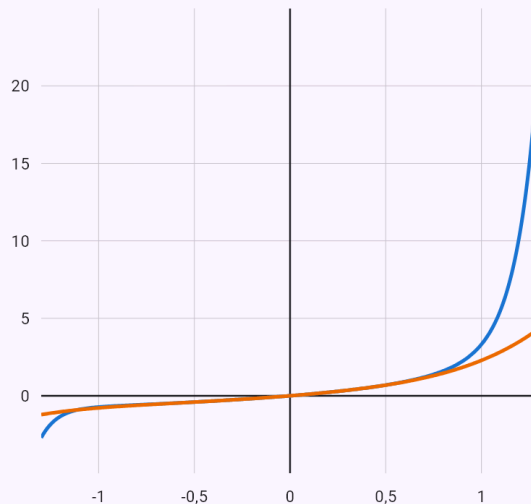
- El radio de convergencia $R = 1$ por el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| < 1$$

- El extremo $x = -1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, pero no absolutamente (según el criterio de Leibniz).
- El extremo $x = 1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge según la agrupación de los términos de la serie armónica.
- El intervalo de convergencia: $x \in [-1, 1)$

Gráfica

Términos: 5



$$\begin{aligned} \text{— } s_{15}(x) &= \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10} \\ \text{— } s_5(x) &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \end{aligned}$$

Elige con el control el número de términos: las sumas parciales se acercan a la suma solo dentro del intervalo de convergencia.

Serie de Taylor

La serie de Taylor de una función la aplicación la deduce de desarrollos conocidos (e^x , $\sin x$, $\ln(1+x)$, ...) por sustitución y determina su intervalo de convergencia.

Cómo introducirlo

`taylor(e^x, 0, oo)`

La función, el punto y oo en lugar del grado; o el chip «Polinomio de Taylor» → «Serie».

Ejemplos

La serie de $\ln(1+x)$ y su intervalo de convergencia.

Enunciado: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Resultado

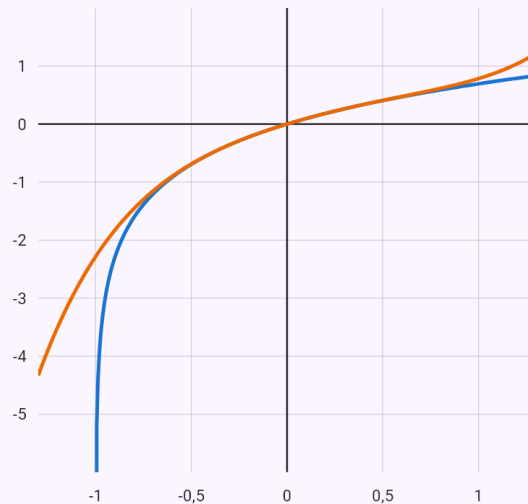
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$$

Pasos

- Del desarrollo conocido $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$
con $u = x$: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- El radio de convergencia $R = 1$ por el criterio del cociente
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{xn}{n+1} \right| = |x| < 1$$
- El extremo $x = -1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverge según la agrupación de los términos de la serie armónica.
- El extremo $x = 1$: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero no absolutamente (según el criterio de Leibniz).
- El intervalo de convergencia: $x \in (-1, 1]$

Gráfica

Términos: 5



$$s(x) = \ln(x+1)$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

Elige con el control el número de términos: las sumas parciales se acercan a la suma solo dentro del intervalo de convergencia.

Series de Fourier

La aplicación construye la serie de Fourier de una función en un intervalo tomado como un periodo (sin indicarlo, en $[-\pi, \pi]$), o la serie de senos o de cosenos de una función en $[0, L]$. La función también puede darse a trozos.

Calcula los coeficientes mediante integrales con todo el procedimiento (por partes con el parámetro n), sustituye $\sin n\pi = 0$ y $\cos n\pi = (-1)^n$ y aprovecha la simetría de las funciones pares e impares. En los puntos de discontinuidad determina la suma de la serie por el teorema de Dirichlet y, sustituyendo un punto y con la identidad de Parseval, deduce sumas de series numéricas (como $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$). La gráfica muestra la extensión periódica de la función y las sumas parciales con un deslizador.

Cómo introducirlo

<code>fourier(x^2, -pi, pi)</code>	La función y el intervalo.
<code>fouriersin(x, 0, pi)</code>	La serie de senos (fouriercos – la de cosenos).
<code>-1, -pi < x < 0</code> <code>1, 0 < x < pi</code>	Una función a trozos, línea por línea, con el chip «Serie de Fourier».
<code>x^2</code>	Una función con el chip «Serie de Fourier» – allí eliges el tipo de serie y el intervalo.

Ejemplos

Una función par – solo cosenos; las sumas $\Sigma 1/n^2$ y $\Sigma 1/n^4$.

Enunciado: `fourier(x^2)`

Resultado

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad ;$$

Pasos

- El intervalo $[-\pi, \pi]$ es un periodo: $T = 2\pi$, medio periodo $l = \pi$. Buscamos la serie con los coeficientes

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- La función es par, $f(-x) = x^2 = f(x)$, así que los coeficientes de los senos son nulos y los demás basta calcularlos sobre la mitad del intervalo

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

- El coeficiente a_0 : $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$
- Sustituimos los límites: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
- El coeficiente a_n : $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$
- Por partes ($fu \cdot v' = u \cdot v - fu' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = \cos(nx)$, luego $u' = 2x$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$
$$\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx$$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
$$\int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx) dx$$
- Por partes ($fu \cdot v' = u \cdot v - fu' \cdot v$), $u = x$, $v' = \sin(nx)$, luego $u' = 1$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$
$$\int x \sin(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n} dx$$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
$$\int -\frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx) dx$$
- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por

eso dividimos el resultado entre a:

$$\int \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Para n entero se cumple $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$
- Sustituimos los límites

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_0^\pi = -$$

- Sustituimos los coeficientes en la serie

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

- La extensión periódica de la función es continua, así que por el teorema de Dirichlet la suma de la serie es $f(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$

- Sustituyendo $x = 0$ obtenemos la suma de una serie numérica

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- Sustituyendo $x = \pi$ obtenemos la suma de una serie numérica

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

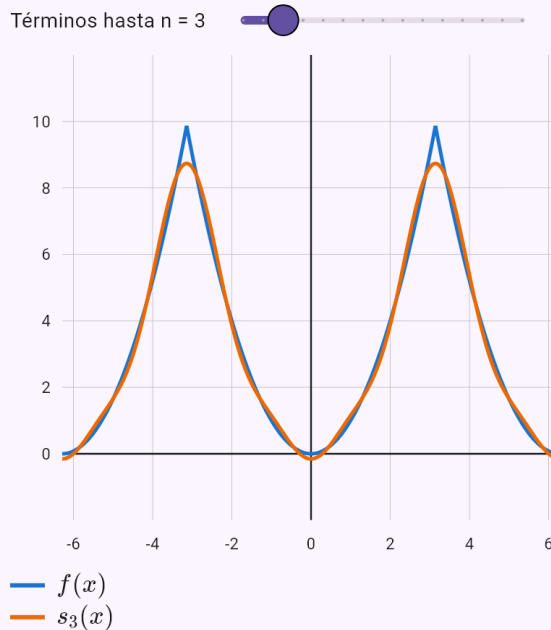
- De la identidad de Parseval obtenemos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Gráfica

Términos hasta $n = 3$



La función se extiende periódicamente. Con el deslizador añades términos de la serie – las sumas parciales se acercan a la función; en un salto oscilan por encima (fenómeno de Gibbs) y pasan por el promedio de ambos lados, marcado con un punto.

Una función a trozos – saltos y el fenómeno de Gibbs.

Enunciado: $-1, -\pi < x < 0$

Resultado

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

Pasos

- El intervalo $[-\pi, \pi]$ es un periodo: $T = 2\pi$, medio periodo $l = \pi$. Buscamos la serie con los coeficientes

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- La función es impar, $f(-x) = -f(x)$, así que el término constante y los coeficientes de los cosenos son nulos y los de los senos basta calcularlos sobre la mitad del intervalo

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- El coeficiente b_n : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$

- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a :

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Para n entero se cumple $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

- Sustituimos los límites

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi}$$

- Sustituimos los coeficientes en la serie:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi} \sin(nx)$$

- Los términos con n par son nulos – quedan solo los n impares, $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

- Por el teorema de Dirichlet la suma de la serie es $f(x)$ para $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$; en un punto de discontinuidad es el promedio de los límites laterales

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

- Sustituyendo $x = \frac{\pi}{2}$ obtenemos la suma de una serie numérica

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- De la identidad de Parseval obtenemos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Gráfica

Términos hasta n = 5



-6 -4 -2 0 2 4 6

— $f(x)$
— $s_5(x)$

La función se extiende periódicamente. Con el deslizador añades términos de la serie – las sumas parciales se acercan a la función; en un salto oscilan por encima (fenómeno de Gibbs) y pasan por el promedio de ambos lados, marcado con un punto.

Una serie de senos y la suma $1 - 1/3^3 + 1/5^3 - \dots = \pi^3/32$.

Enunciado: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Resultado

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

Pasos

- Extendemos la función de $[0, \pi]$ de forma impar y luego periódica ($T = 2\pi$) - resulta la serie de senos

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \text{ donde}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- El coeficiente b_n : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx$
- Por partes ($fu \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x(\pi - x)$, $v' = \sin(nx)$,
luego $u' = \pi - 2x$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$\int x(\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{x(x - \pi) \cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral

$$\int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx = \frac{1}{n} \int (2x - \pi) \cos(nx) dx$$

- Por partes ($fu \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = 2x - \pi$, $v' = \cos(nx)$,
luego $u' = 2$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$\int (2x - \pi) \cos(nx) dx = \frac{(2x - \pi) \sin(nx)}{n} - \int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int \sin(nx) dx$$

- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a :

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Para n entero se cumple $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

- Sustituimos los límites

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \cos(nx)}{n} - \frac{\pi x \cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x) \sin(nx)}{n^2} \right]$$

- Sustituimos los coeficientes en la serie:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \sin(nx)$$

- Los términos con n par son nulos - quedan solo los n impares, $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

- La extensión periódica de la función es continua, así que por el teorema de Dirichlet la suma de la serie es $f(x)$ para $x \in [0, \pi]$

- Sustituyendo $x = \frac{\pi}{2}$ obtenemos la suma de una serie numérica

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

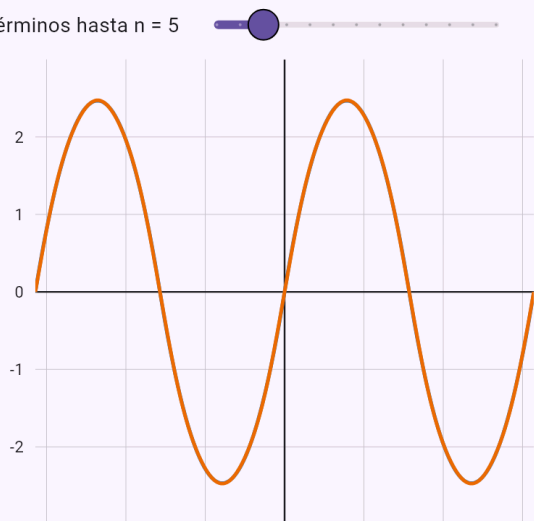
• De la identidad de Parseval $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

obtenemos

$$\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

Gráfica

Términos hasta $n = 5$



-6 -4 -2 0 2 4 6

— $f(x)$
— $s_5(x)$

La función se extiende periódicamente. Con el deslizador añades términos de la serie – las sumas parciales se acercan a la función; en un salto oscilan por encima (fenómeno de Gibbs) y pasan por el promedio de ambos lados, marcado con un punto.

Limitaciones conocidas

- Una función no acotada (como $\ln x$ en $[0, 2\pi]$) no se puede desarrollar – la serie divergería en el punto donde la función crece sin límite.
- Cuando los coeficientes llevan a una integral sin primitiva elemental ($\ln x$ en $[1, 3]$), se expresan con el seno y el coseno integral.

Ecuaciones diferenciales

La aplicación resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: de variables separables, lineales, exactas, homogéneas ($y' = f(y/x)$), de Bernoulli y ecuaciones $y' = f(ax + by + c)$. Reconoce el tipo por sí misma y muestra el procedimiento como en la escuela – separación de variables, variación de la constante o factor integrante, sustitución, función potencial de una ecuación exacta. Las integrales del procedimiento tienen sus propios pasos.

Órdenes superiores: ecuaciones lineales con coeficientes constantes de cualquier orden mediante la ecuación característica (también raíces múltiples y complejas), una solución particular según el lado derecho especial (también resonancia y suma de lados derechos) o por variación de constantes, un problema de valor inicial en cero también con la transformada de Laplace (chip «Método»). Además la ecuación de Euler con $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ integrando sucesivamente y la reducción del orden – cuando falta y ($p = y'$) o x ($y' = p(y)$).

La ecuación $y' = y \cdot (a(x) \cdot \ln y + b(x))$ se vuelve lineal con la sustitución $z = \ln y$. Una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes variables se resuelve si se puede adivinar una solución (x^k , e^{cx} , ...): la segunda, reduciendo el orden (d'Alembert), y el lado derecho por variación de constantes. El orden se reduce también en más de uno ($p = y^{(m)}$ con una ecuación de segundo orden para p). Con parámetros se distinguen casos: un oscilador amortiguado según el signo de $\delta^2 - \omega^2$ (sobreamortiguado, crítico, subamortiguado), una resonancia ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ para $\omega = 2$) y el signo de una constante del que depende la integral ($y'' = 2yy'$). La transformada de Laplace resuelve también un problema de valor inicial en un punto distinto de 0 (desplazando $\tau = t - t_0$) y con parámetros.

El resultado es la solución general con una constante C , en órdenes superiores con constantes $C_1, C_2, \dots$ (explícita, o implícita donde no puede ser explícita); con condiciones, la solución que las cumple – iniciales y de contorno, incluidos los casos «sin solución» e «infinitas soluciones». También encuentra las soluciones constantes perdidas al dividir. Cada solución se comprueba sustituyéndola en la ecuación. En primer orden la gráfica muestra el campo de direcciones y soluciones para distintos C , en órdenes superiores soluciones para distintas constantes; en una ecuación autónoma de segundo orden (sin x) un selector muestra también el plano de fases (y, y').

Cómo introducirlo

$$y' = x*y$$

La derivada con prima.

$$dy/dx = x \cdot y^2$$

Notación de Leibniz – indica también la variable (dm/dt , dT/dt).

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$	Notación de una foto.
$(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$	La forma $M dx + N dy = 0$ (ecuación exacta).
$y' = y^2 + 1, y(0) = 1$	Una condición inicial tras una coma o en la línea siguiente.
$dm/dt = m + 2, m(0) = 0$	La función y la variable pueden ser cualquier letra.
$y'' - 3y' + 2y = 3e^{(2x)}$	Una ecuación de orden superior – las derivadas con más primas.
$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$	Derivadas superiores como $y^{(4)}$ (también desde una foto).
$y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$	Condiciones iniciales $y(0), y'(0)$ – o de contorno en distintos puntos.
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	Los puntos de Newton (derivadas respecto al tiempo t) y parámetros griegos.

Ejemplos

Variables separables – la solución general y el campo de direcciones.

Enunciado: $y' = x \cdot y$

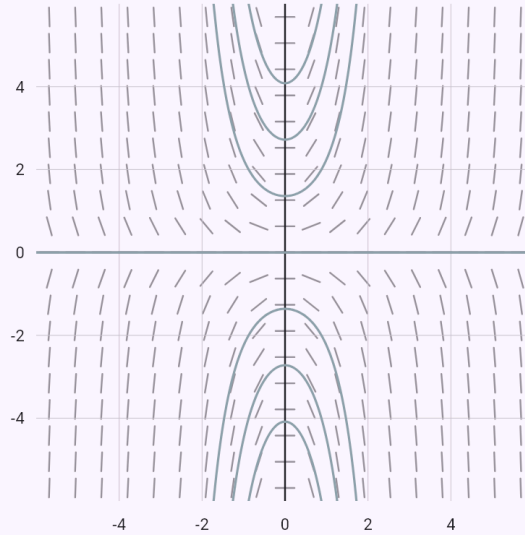
Resultado

$$y = C e^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación de variables separables – el lado derecho es el producto de una función de la variable y una función de la incógnita: $y' = xy$
- Separamos las variables (dividimos suponiendo $y \neq 0$):
$$\frac{dy}{y} = x dx$$
- Integramos ambos lados: $\int \frac{dy}{y} = \int x dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- La solución general en forma implícita: $\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Aplicamos la exponencial – la constante $\pm e^C$ se llama de nuevo C: $y = C e^{\frac{x^2}{2}}$
- La solución constante $y = 0$, excluida al dividir, está en la solución general para $C = 0$
- Comprobación – la derivada de la solución $y' = C x e^{\frac{x^2}{2}}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.

Gráfica



— soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

La condición inicial determina la constante C.

Enunciado: $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$

Resultado

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Pasos

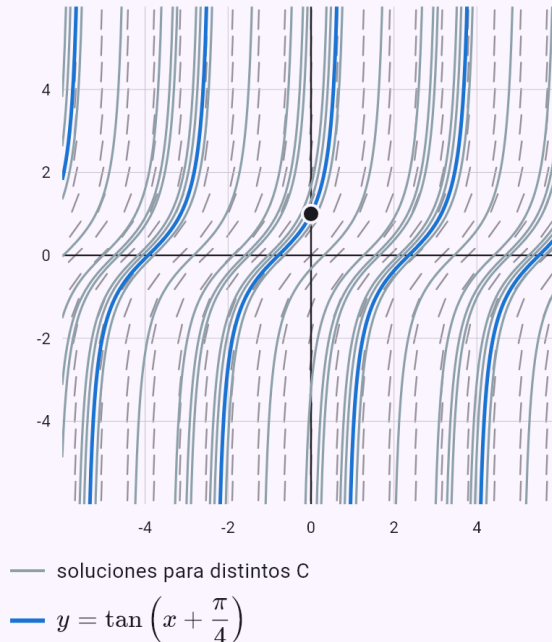
- Una ecuación de variables separables – el lado derecho es el producto de una función de la variable y una función de la incógnita: $y' = y^2 + 1$
- Separamos las variables (dividimos suponiendo $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2 + 1} = dx$
- Integramos ambos lados: $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan y$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 1 dx = x$
- La solución general en forma implícita: $\arctan y = x + C$
- Despejamos la solución: $y = \tan(x + C)$
- Sustituimos la condición inicial $y(0) = 1$:
 $1 = \tan C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- La solución de la condición inicial (solución particular):
 $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes. Resaltada está la solución de la condición inicial; el punto es la condición inicial.

- Comprobación – la derivada de la solución

$y' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.

Gráfica



Una ecuación lineal por variación de la constante.

Enunciado: $y' + 2y = e^x$

Variación de la constante

Resultado

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

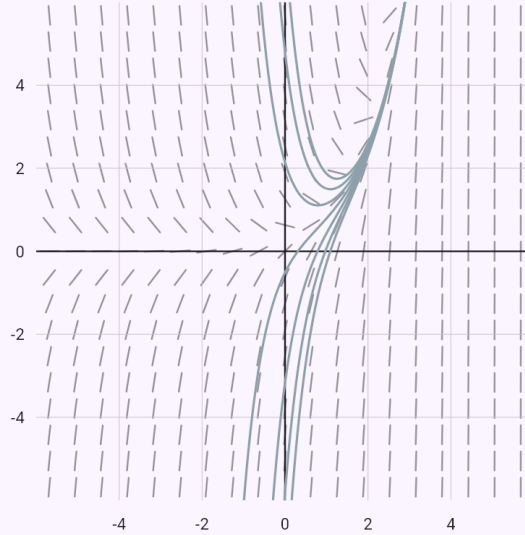
Pasos

- Una ecuación lineal de primer orden $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:
 $y' + 2y = e^x$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y' + 2y = 0$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 2 dx = 2x$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variación de la constante – buscamos la solución en la forma $y = C(x)e^{-2x}$; sustituida en la ecuación:
 $C'(x)e^{-2x} = e^x$
- De ahí $C'(x) = e^{3x}$
- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a : $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integramos: $C(x) = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- La solución general: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$

- Comprobación – la derivada de la solución

$y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.

Gráfica



— soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

La misma ecuación con factor integrante.

Enunciado: $y' + 2y = e^x$

Factor integrante

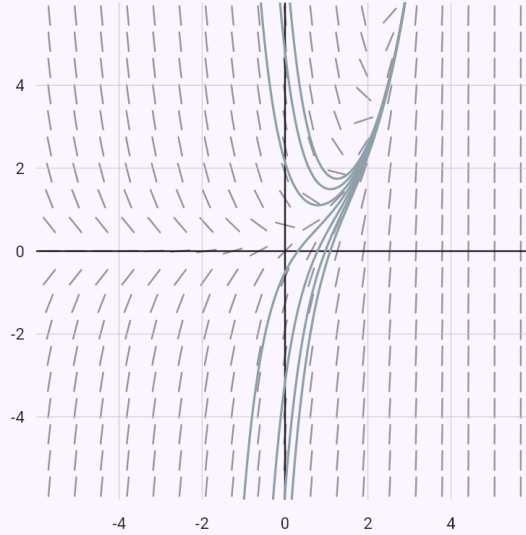
Resultado

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación lineal de primer orden $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:
 $y' + 2y = e^x$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 2 dx = 2x$
- El factor integrante: $\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$
- Multiplicamos por el factor integrante – el lado izquierdo es la derivada de un producto: $(ye^{2x})' = e^{3x}$
- Según la tabla: la función interior es lineal $(ax + b)$, por eso dividimos el resultado entre a: $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Integramos ambos lados: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- La solución general: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Comprobación – la derivada de la solución
 $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ sustituida en la ecuación da una igualdad.

Gráfica



— soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Una ecuación homogénea – la sustitución $u = y/x$.

Enunciado: $y' = (x - y)/(x + y)$

Resultado

$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación homogénea – el lado derecho depende solo del cociente y/x : $y' = \frac{x - y}{x + y}$

- La sustitución $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $y' = u + xu'$ transforma la ecuación en $xu' = -u - 1 + \frac{2}{u+1}$

- Separamos las variables (dividimos suponiendo $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{x} dx$

- Integramos ambos lados: $\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = \int -\frac{1}{x} dx$

- Sacamos la constante fuera de la integral: $\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du$

- El numerador es la derivada del denominador (o un múltiplo), $f(x) = -u^2 - 2u + 1$, por la fórmula

$$\int \frac{f'(u)}{f(u)} du = \ln |f(u)| + C$$

$$\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\frac{1}{2} \int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1} du = -\frac{\ln}{2}$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -\frac{1}{x} dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

- La solución general en forma implícita:

$$\frac{\ln |-u^2 - 2u + 1|}{2} = C - \ln |x|$$

- Aplicamos la exponencial – la constante $\pm e^C$ se llama de nuevo C: $-u^2 - 2u + 1 = \frac{C}{x^2}$

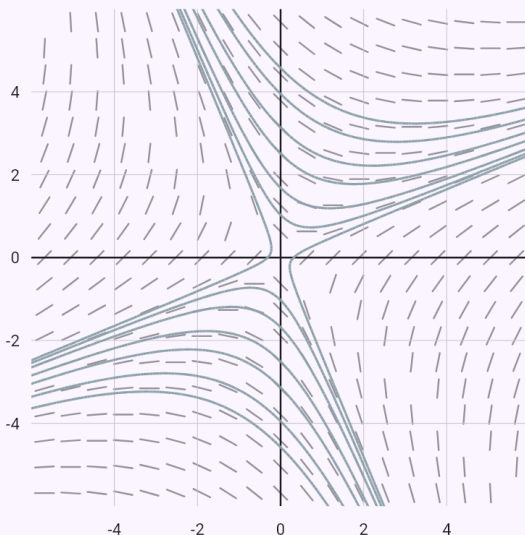
- La solución constante $u = -1 - \sqrt{2}$, excluida al dividir, está en la solución general para $C = 0$

- La solución constante $u = -1 + \sqrt{2}$, excluida al dividir, está en la solución general para $C = 0$

- Volvemos a la incógnita original: $\frac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \frac{C}{x^2}$

- La solución general en forma implícita: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Gráfica



— soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Una ecuación de Bernoulli – la sustitución $z = y^{1-n}$ y la solución constante $y = 0$.

Enunciado: $xy' - y = -xy^2$

Resultado

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Pasos

- Una ecuación de Bernoulli $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$:

$$y' - \frac{y}{x} = -y^2$$

- La sustitución $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1 \frac{1}{y^2} y'$ transforma la ecuación en $z' + \frac{z}{x} = 1$

- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $z' + \frac{z}{x} = 0$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

- Solución de la ecuación homogénea: $z_h = \frac{C}{x}$

- Variación de la constante – buscamos la solución en la forma $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$; sustituida en la ecuación:

$$C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$$

- De ahí $C'(x) = x$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- Integramos: $C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

- La solución general: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- Volvemos a la incógnita original: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- Despejamos la solución: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$

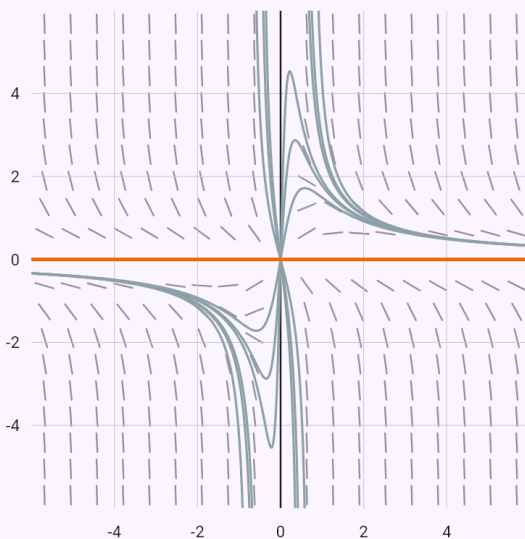
- Al dividir excluimos la solución constante $y = 0$ – es otra solución de la ecuación.

- Renombramos la constante (un múltiplo de una constante arbitraria es de nuevo una constante arbitraria): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$

- Comprobación – la derivada de la solución

$$y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2} \text{ sustituida en la ecuación da una igualdad.}$$

Gráfica



— soluciones para distintos C

— $y = 0$

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

Una ecuación exacta – la función potencial $F(x, y) = C$.

Enunciado: $(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$

Resultado

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pasos

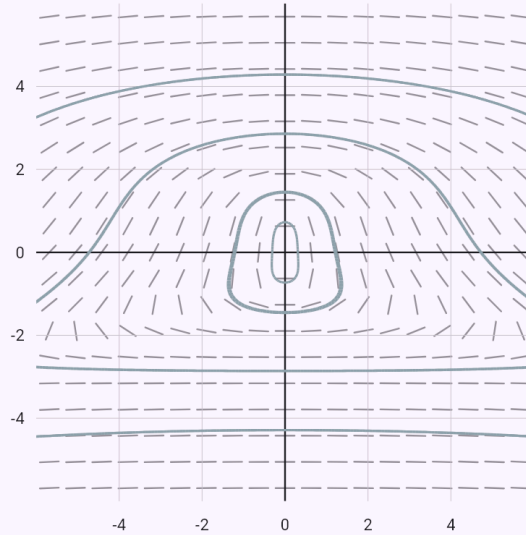
- Una ecuación $M dx + N dy = 0$ – comprobamos si es exacta (el lado izquierdo es una diferencial total):
 $(2xy + 6x)dx + (4y^3 + x^2)dy = 0$
- $M = 2xy + 6x$, $N = 4y^3 + x^2$; la ecuación es exacta, ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- La integral de una suma es la suma de las integrales:
 $\int (6x + 2yx) dx = \int 6x dx + \int 2yx dx$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
 $\int 6x dx = 6 \int x dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Sacamos la constante fuera de la integral:
 $\int 2yx dx = 2y \int x dx$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- La función potencial F integrando M respecto a x :
 $F(x, y) = \int (2xy + 6x) dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int 4y^3 dy = 4 \int y^3 dy$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$
- De $\partial F / \partial y = N$: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- La solución general en forma implícita:
 $y^4 + x^2y + 3x^2 = C$

Gráfica



— soluciones para distintos C

Los segmentos cortos muestran en cada punto la dirección que impone la ecuación (campo de direcciones). Las curvas grises son soluciones para distintos C – tocan los segmentos en todas partes.

La sustitución $z = x - y$; Symja perdería aquí un factor 2, la app comprueba el resultado.

Enunciado: $y' = \cos(x - y)$, $y(0) = \pi/2$

Resultado

$$y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + 1)$$

Pasos

- El lado derecho es función de $ax + by + c$ - lo tomamos como nueva incógnita: $y' = \cos(x - y)$

- La sustitución $z = x - y$, $z' = 1 - y'$ transforma la ecuación en $z' = 1 - \cos z$

- Separamos las variables (dividimos suponiendo $1 - \cos z \neq 0$): $\frac{dz}{1 - \cos z} = dx$

- Integramos ambos lados: $\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx$

- No sirve ninguna sustitución más sencilla: sustitución universal $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$

$$\sin z = \frac{2t}{1+t^2}, \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dz = \frac{2dt}{1+t^2}$$
$$\int \frac{1}{1 - \cos z} dz = \int \frac{1}{t^2} dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}$

- Volvemos a la variable original:

$$t = \tan\left(\frac{z}{2}\right) : -\cot\left(\frac{z}{2}\right)$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 1 dx = x$

- La solución general en forma implícita:

$$-\cot\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$$

- Despejamos la solución: $z = 2 \operatorname{arccot}(C - x)$

- Al dividir excluimos la solución constante $z = 0$ - es otra solución de la ecuación.

- Volvemos a la incógnita original:

$$y = x - 2 \operatorname{arccot}(C - x)$$

- Renombramos la constante (un múltiplo de una constante arbitraria es de nuevo una constante arbitraria): $y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + C)$

- Sustituimos la condición inicial $y(0) = \frac{\pi}{2}$:
 $\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arccot} C \Rightarrow C = 1$

- La solución de la condición inicial (solución particular):
 $y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + 1)$

- Comprobación - la derivada de la solución

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2} \text{ sustituida en la ecuación da una igualdad.}$$

La ecuación característica con raíces complejas $-2 \pm 3i$.

Enunciado: $y'' + 4y' + 13y = 0$

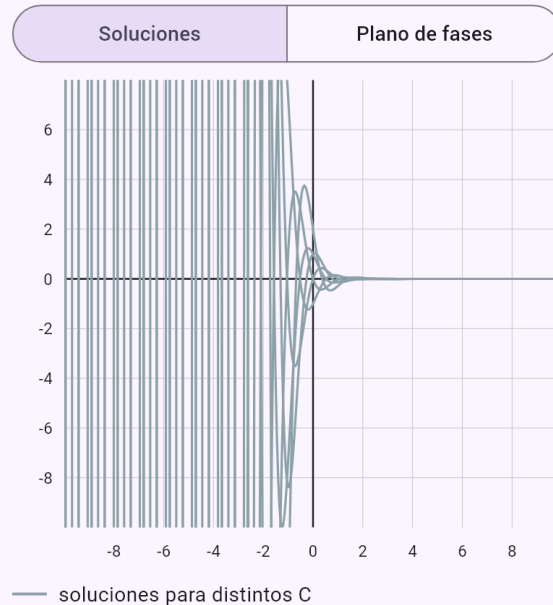
Resultado

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes:
 $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Buscamos soluciones $y = e^{\lambda x}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda x}$ obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- El discriminante $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; las raíces:
 $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Cada raíz λ da la solución $e^{\lambda x}$, una raíz de multiplicidad k además $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, y un par $\alpha \pm \beta i$ las soluciones $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. El sistema fundamental:
 $y_1 = e^{-2x} \cos(3x)$, $y_2 = e^{-2x} \sin(3x)$
- La solución general:
 $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Gráfica



Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

Lado derecho especial con resonancia – 2 es raíz de la ecuación característica.

Enunciado: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

Lado derecho especial

Resultado

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasos

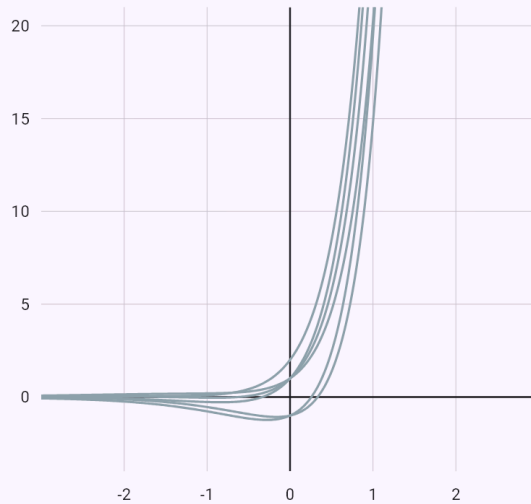
- Una ecuación lineal con coeficientes constantes:
 $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Buscamos soluciones $y = e^{\lambda x}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda x}$ obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- El discriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; las raíces:
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
- Cada raíz λ da la solución $e^{\lambda x}$, una raíz de multiplicidad k además $x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, y un par $\alpha \pm \beta i$ las soluciones $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. El sistema fundamental: $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
- El lado derecho $3e^{2x}$ tiene forma especial; el número 2 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por x : $y_p = A x e^{2x}$
- Las derivadas:
 $y_p' = 2A x e^{2x} + A e^{2x}, y_p'' = 4A x e^{2x} + 4A e^{2x}$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados: $A = 3$

- Una solución particular: $y_p = 3xe^{2x}$

- La solución general:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$$

Gráfica



— soluciones para distintos C

Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

El lado derecho tan x no es especial – variación de constantes y el wronskiano.

Enunciado: $y'' + y = \tan x$

Resultado

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln |\sec x|$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes:
 $y'' + y = \tan x$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' + y = 0$
- Buscamos soluciones $y = e^{\lambda x}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda x}$ obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 + 1 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Cada raíz λ da la solución $e^{\lambda x}$, una raíz de multiplicidad k además $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, y un par $\alpha \pm \beta i$ las soluciones $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. El sistema fundamental: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$
- Solución de la ecuación homogénea:
 $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variación de constantes – buscamos la solución como $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, las derivadas de las funciones C_k cumplen el sistema
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x \end{cases}$$

- El determinante del sistema (el wronskiano)

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

- De ahí $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$

- De ahí $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \sin x$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = - \int \sin x \cdot \tan x \, dx$$

- La función es impar respecto al coseno: sustitución
 $t = \sin x$

$$dt = \cos x \, dx$$

$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales

$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) \, dt$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) \, dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt + \int \frac{1}{2(t+1)} \, dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int -1 \, dt = -t$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -\frac{1}{2(t-1)} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{t-1} dt = \ln |t-1|$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{1}{2(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1|$$

- Volvemos a la variable original

$$t = \sin x : \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$

- Integramos (las constantes de integración ya están en la solución homogénea):

$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \tan x dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

- Integramos (las constantes de integración ya están en la solución homogénea): $C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x$

- Una solución particular:

$$y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- La solución general

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right|$$

Un problema de valor inicial – un sistema para las constantes C_1, C_2 .

Enunciado: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Resultado

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

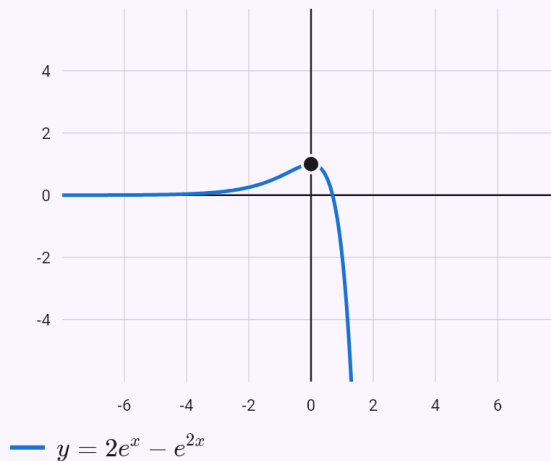
Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes:
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Buscamos soluciones $y = e^{\lambda x}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda x}$ obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- El discriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; las raíces:
 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$
- Cada raíz λ da la solución $e^{\lambda x}$, una raíz de multiplicidad k además $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, y un par $\alpha \pm \beta i$ las soluciones $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. El sistema fundamental: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{3x}$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
- El lado derecho e^{2x} tiene forma especial; el número 2 no es raíz de la ecuación característica, así que buscamos una solución particular $y_p = A e^{2x}$
- Las derivadas: $y'_p = 2A e^{2x}$, $y''_p = 4A e^{2x}$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados: $-A = 1$

La resaltada cumple las condiciones; los puntos son los valores dados.

- De donde $A = -1$
- Una solución particular: $y_p = -e^{2x}$
- La solución general: $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Las derivadas de la solución general:
 $y' = C_1 e^x - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Las condiciones dan el sistema de donde $C_1 = 2$, $C_2 = 0$
$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$
- La solución que cumple las condiciones dadas:
 $y = 2e^x - e^{2x}$

Gráfica



El mismo problema con la transformada de Laplace.

Enunciado: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Transformada de Laplace

Resultado

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$$

- Transformada de Laplace de ambos lados: $\mathcal{L}(y) = Y$, $\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = s^2Y - sy(0) - y'(0)$; con las condiciones iniciales:

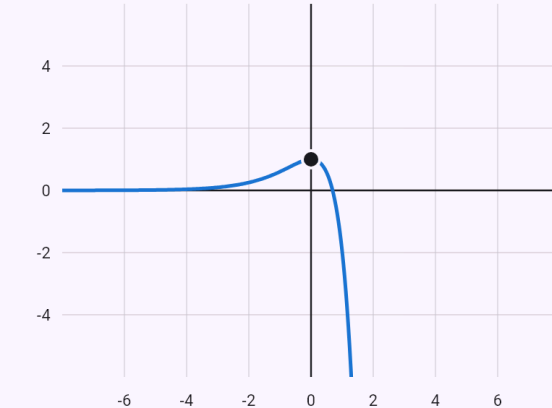
$$(s^2Y - s) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s - 2}$$

- Despejamos la imagen Y : $Y = \frac{s - 3}{(s - 2)(s - 1)}$

- Fracciones parciales: $Y = -\frac{1}{s - 2} + \frac{2}{s - 1}$

- La transformada inversa (según la tabla de imágenes) da la solución: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^x - e^{2x}$

Gráfica



$$y = 2e^x - e^{2x}$$

La resaltada cumple las condiciones; los puntos son los valores dados.

Un problema de contorno con infinitas soluciones.

Enunciado: $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

Resultado

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$y'' + y = 0$$

- Buscamos soluciones $y = e^{\lambda x}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda x}$ obtenemos la ecuación característica:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = \pm i$

- Cada raíz λ da la solución $e^{\lambda x}$, una raíz de multiplicidad k además $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, y un par $\alpha \pm \beta i$ las soluciones $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. El sistema fundamental: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

- La solución general: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$

- La constante C_2 queda arbitraria – el problema tiene infinitas soluciones.

- La solución que cumple las condiciones dadas:

$$y = C_2 \sin x$$

Ecuación de Euler – la sustitución $x = e^t$.

Enunciado: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$

Resultado

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

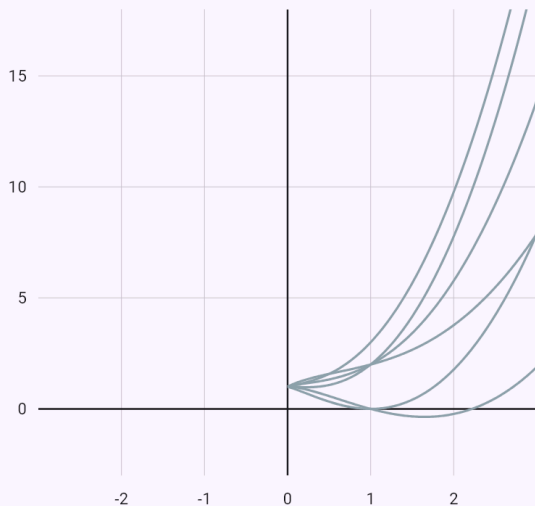
Pasos

- Ecuación de Euler – cada derivada $y^{(k)}$ va con x^k ; la sustitución $x = e^t$ la convierte en una de coeficientes constantes: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- La sustitución $x = e^t$, $xy' = \dot{y}$, $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ transforma la ecuación en $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Buscamos soluciones $y = e^{\lambda t}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda t}$ obtenemos la ecuación característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- El discriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$
- Cada raíz λ da la solución $e^{\lambda t}$, una raíz de multiplicidad k además $x \cdot e^{\lambda t}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda t}$, y un par $\alpha \pm \beta i$ las soluciones $e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t$ y $e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t$. El sistema fundamental: $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$
- Solución de la ecuación homogénea: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Dividimos el lado derecho en partes de forma especial – una solución particular para cada una, luego las sumamos: $f_1 = 2$, $f_2 = e^{2t}$
- El lado derecho 2 tiene forma especial; el número 0 no

es raíz de la ecuación característica, así que buscamos una solución particular $y_{p_1} = A$

- Las derivadas: $y'_{p_1} = 0$, $y''_{p_1} = 0$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados: $2A = 2$
- De donde $A = 1$
- Una solución particular: $y_{p_1} = 1$
- El lado derecho e^{2t} tiene forma especial; el número 2 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por x : $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Las derivadas: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t}$, $y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados: $A = 1$
- Una solución particular: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Una solución particular: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- La solución general: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Volvemos a la variable original ($t = \ln x$, para $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Gráfica



— soluciones para distintos C

Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

La reducción $y' = p(y)$, las constantes de las condiciones iniciales paso a paso.

Enunciado: $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Resultado

$$y = -\ln(1 - x)$$

Pasos

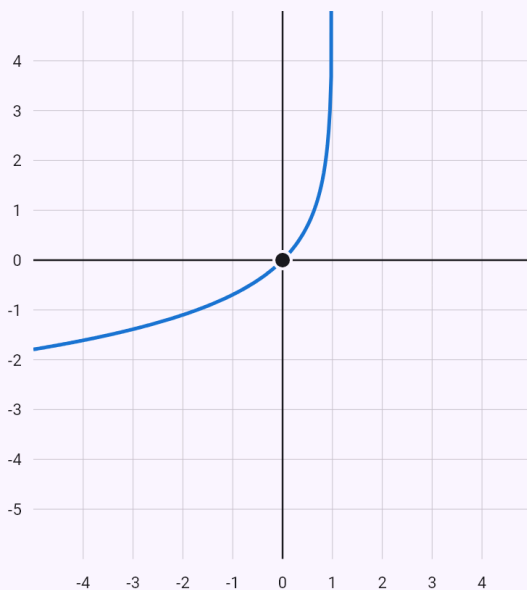
- Falta la variable independiente – tomamos y' como función de y : $y'' = e^{2y}$
- La sustitución $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ convierte la ecuación en $p \frac{dp}{dy} = e^{2y}$; de las condiciones iniciales se sigue $p(0) = 1$
- Una ecuación de variables separables – el lado derecho es el producto de una función de la variable y una función de la incógnita: $\frac{dp}{dy} = \frac{e^{2y}}{p}$
- Separamos las variables: $p dp = e^{2y} dy$
- Integramos ambos lados: $\int p dp = \int e^{2y} dy$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int p dp = \frac{p^2}{2}$
- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a : $\int e^{2y} dy = \frac{e^{2y}}{2}$
- La solución general en forma implícita: $\frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Despejamos la solución: $p^2 = e^{2y} + C_1$

- Sustituimos la condición inicial $p(0) = 1$:
 $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- La solución de la condición inicial (solución particular):
 $p = e^y$
- Volvemos a la incógnita original: $y' = e^y$
- Una ecuación de variables separables – el lado derecho es el producto de una función de la variable y una función de la incógnita: $y' = e^y$
- Separamos las variables (dividimos suponiendo $e^y \neq 0$):
 $\frac{dy}{e^y} = dx$
- Integramos ambos lados: $\int \frac{dy}{e^y} = \int dx$
- Según la tabla: la función interior es lineal ($ax + b$), por eso dividimos el resultado entre a : $\int e^{-y} dy = -e^{-y}$
- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int 1 dx = x$
- La solución general en forma implícita: $-e^{-y} = x + C_2$
- Despejamos la solución: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Sustituimos la condición inicial $y(0) = 0$:
 $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- La solución de la condición inicial (solución particular):
 $y = -\ln(1 - x)$

Gráfica

Soluciones

Plano de fases



— $y = -\ln(1 - x)$

La resaltada cumple las condiciones; los puntos son los valores dados.

Un oscilador amortiguado: tres casos según δ y ω .

Enunciado: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$

Resultado

$$\delta > \omega : y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

$$\delta = \omega : y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega : y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

- Buscamos soluciones $y = e^{\lambda x}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda x}$ obtenemos la ecuación característica:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

- Las raíces de la ecuación característica:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

- Para $\delta > \omega$ luego

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$$y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

- Para $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, luego $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$

- Para $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}i$, luego

$$y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

Resonancia: para $\omega = 2$ la solución tiene otra forma.

Enunciado: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$

Resultado

$$\omega \neq 2 : y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2 : y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Pasos

- Una ecuación lineal con coeficientes constantes:
 $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Primero resolvemos la ecuación homogénea (lado derecho nulo): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Buscamos soluciones $y = e^{\lambda t}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda t}$ obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Cada raíz λ da la solución $e^{\lambda x}$, una raíz de multiplicidad k además $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, y un par $\alpha \pm \beta i$ las soluciones $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. El sistema fundamental: $y_1 = \cos(\omega t)$, $y_2 = \sin(\omega t)$
- Solución de la ecuación homogénea:
 $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- El lado derecho $\cos(2t)$ tiene forma especial; el número $2i$ no es raíz de la ecuación característica, así que

buscamos una solución particular

$$y_p = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

- Las derivadas
 $y'_p = 2B \cos(2t) - 2A \sin(2t)$, $y''_p = -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t)$
- Sustituido en la ecuación (dividido entre la exponencial), términos semejantes agrupados
 $(A\omega^2 - 4A) \cos(2t) + (B\omega^2 - 4B) \sin(2t) = \cos(2t)$
- Comparamos los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de donde
 $A = \frac{1}{\omega^2 - 4}$, $B = 0$
$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$
- Una solución particular: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- La solución general
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$
- Para $\omega = 2$ el número del lado derecho es raíz de la ecuación característica (resonancia): la solución tiene otra forma: $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$

Una solución adivinada $y_1 = x$ y reducción del orden (d'Alembert).

Enunciado: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

Resultado

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln |x - 1| - x \ln |x + 1| + 2)$$

Pasos

- Una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes variables: $y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$

- Adivinamos una solución y la comprobamos sustituyendo: $y_1 = x$. La segunda, reduciendo el orden (d'Alembert, $y = y_1 \cdot u$)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = x \ln |x - 1|$$

- Descomponemos la función racional en un polinomio y fracciones parciales

$$\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

- La integral de una suma es la suma de las integrales

$$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)} dx$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int \frac{1}{2(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln |x-1|$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

$$\int -\frac{1}{2(x+1)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1|$$

- Sacamos la constante fuera de la integral:

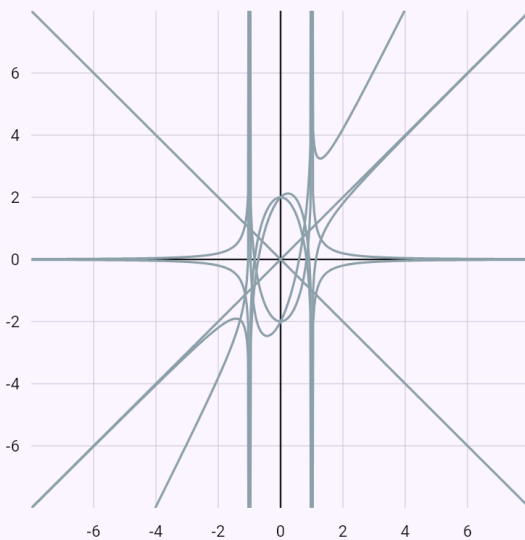
$$\int -\frac{1}{x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

- Según la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$

- La solución general:

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln |x - 1| - x \ln |x + 1| + 2)$$

Gráfica



— soluciones para distintos C

Las curvas grises son soluciones para distintos valores de las constantes.

Limitaciones conocidas

- Una ecuación que necesita una pista del enunciado (distinta de $z = \ln y$) aún no se resuelve.
- En una ecuación con parámetro (k, λ, ω) la aplicación no dibuja gráfica y toma los parámetros como positivos.
- Donde la solución no se puede expresar explícitamente, queda en forma implícita.
- La transformada de Laplace aún no conoce la función de Heaviside, los desplazamientos ni los lados derechos periódicos.

Recurrencias y funciones generatrices

La aplicación resuelve recurrencias lineales con coeficientes constantes de cualquier orden mediante la ecuación característica – también raíces múltiples y complejas (la forma compleja de la solución y su paso a la real por el teorema de De Moivre) – y con un lado derecho de la forma $P(n) \cdot q^n$ (también $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, resonancia y suma de lados derechos). Las condiciones iniciales determinan las constantes; como comprobación, la aplicación calcula más términos con la recurrencia y los compara con la fórmula.

Con el chip «Método» se puede elegir también la función generatriz ($A(x) = \sum a_n x^n$, fracciones parciales, series geométricas), las potencias de una matriz (diagonalización) o, en primer orden, la suma. Una recurrencia de primer orden con coeficiente variable ($a_{n+1} = (n+1)a_n$) se resuelve con un producto (factoriales), las recurrencias no lineales convertibles con la sustitución $b_n = 1/a_n$ o $b_n = \ln a_n$. Un sistema de dos recurrencias se resuelve eliminando una sucesión o con la matriz, y una recurrencia de divide y vencerás $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ con $n = b^k$, junto con la estimación del teorema maestro.

Con la operación «Función generatriz» la aplicación halla la función generatriz de una sucesión dada por una fórmula ($n^2 + 2^n$) o por sus primeros términos (1, 0, 1, 0, ...) y, al revés, la fórmula de a_n a partir de una función $A(x)$. El número de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + \dots = N$ (también con cotas o coeficientes: pagar con monedas) es un coeficiente de una función generatriz.

La gráfica muestra los términos de la sucesión como puntos (en un sistema, las dos sucesiones).

Cómo introducirlo

$$a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), \quad a(0) = 1, \\ a(1) = 4$$

Con paréntesis, las condiciones tras una coma.

$$a_{\{n+2\}} = 5a_{\{n+1\}} - 6a_n$$

Con subíndices (también de una foto). Sin condiciones: la solución general con constantes C_1 , C_2 .

$$F_n = F_{\{n-1\}} + F_{\{n-2\}}, \quad F_1 = F_2 = 1$$

El índice puede bajar (a_{n-1} , a_{n-2}); un mismo valor puede darse a varios términos.

$$a_{\{n+1\}} = a_n + 2b_n \\ b_{\{n+1\}} = 3a_n + b_n \\ a_0 = 1, \quad b_0 = 0$$

Un sistema: las ecuaciones en líneas, las condiciones en la última.

$$T(n) = 2T(n/2) + n, \quad T(1) = 1$$

Divide y vencerás: un término en n/b .

$n^2 + 2^n$	La fórmula de una sucesión con la operación «Función generatriz» (también $a_n = \dots$).
1, 0, 1, 0, ...	Los primeros términos separados por comas.
$1/(1 - x - x^2)$	Una función generatriz en x (también $A(x) = \dots$): la fórmula de a_n .
número de soluciones $x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 \leq 3$	El número de soluciones enteras no negativas con cotas.

Ejemplos

Dos raíces reales distintas, comprobación con más términos.

Enunciado: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

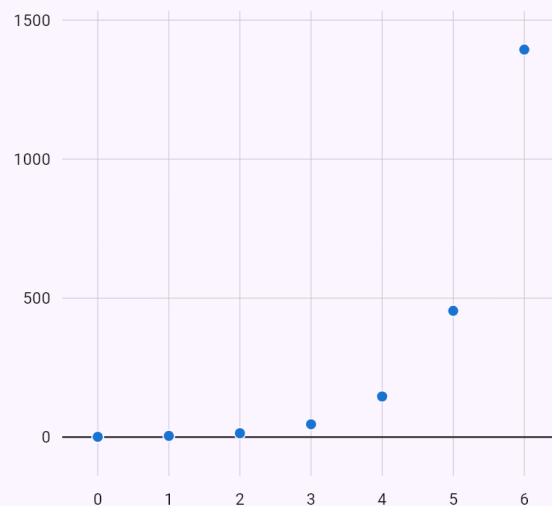
Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Buscamos soluciones $a_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- El discriminante $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; las raíces:
 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
- La solución general: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = -1, C_2 = 2$
 $C_1 + C_2 = 1$
 $2C_1 + 3C_2 = 4$
- La solución que cumple las condiciones dadas:
 $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Comprobación: la recurrencia da
 $a_2 = 14, a_3 = 46, a_4 = 146$, igual que la fórmula.

Gráfica



• a_n

Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

La sucesión de Fibonacci: la fórmula de Binet.

Enunciado: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

Resultado

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

- Buscamos soluciones $F_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^{n-2} obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

- El discriminante $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; las raíces:
 $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- La solución general

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Sustituimos las condiciones en la solución general de

$$\text{donde } C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$C_1 + C_2 = 0$$

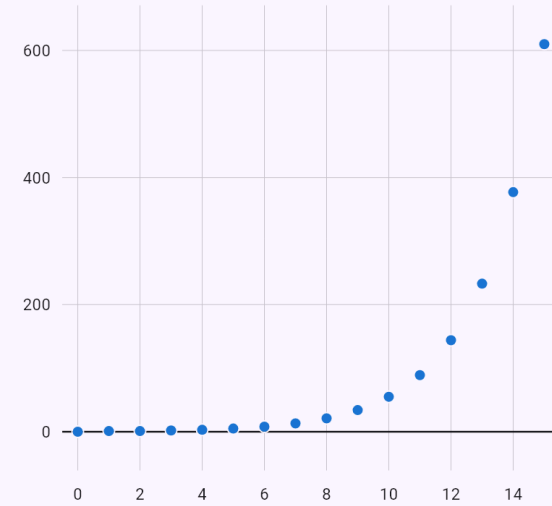
$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} C_2 = 1$$

- La solución que cumple las condiciones dadas

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Comprobación: la recurrencia da
 $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, igual que la fórmula.

Gráfica



● F_n

Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Raíces complejas $1 \pm i$: la forma compleja y el teorema de De Moivre.

Enunciado: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Resultado

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Buscamos soluciones $a_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- El discriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; las raíces:
 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Escribimos las raíces complejas $1 \pm i$ en forma trigonométrica: $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, es decir $\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Por el teorema de De Moivre $\lambda^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- La solución general en forma compleja (constantes complejas): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Sumando los términos conjugados, con nuevas constantes reales obtenemos la forma real
$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 1$, $C_2 = 1$

$$C_1 = 1$$

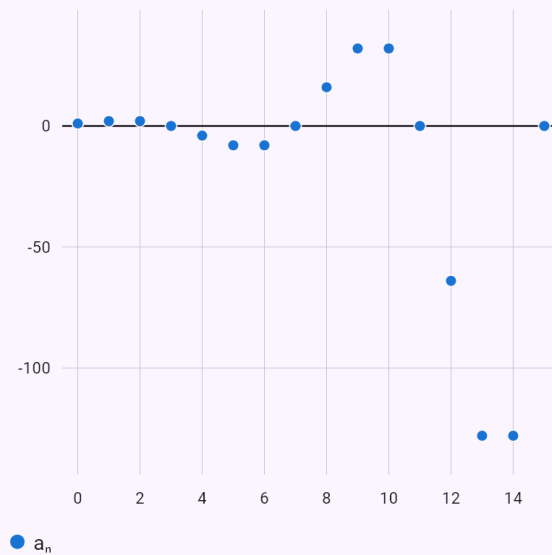
$$C_1 + C_2 = 2$$

- La solución que cumple las condiciones dadas

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

- Comprobación: la recurrencia da $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = -4$, igual que la fórmula.

Gráfica



Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

El lado derecho n, una raíz doble 2.

Enunciado: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$

Resultado

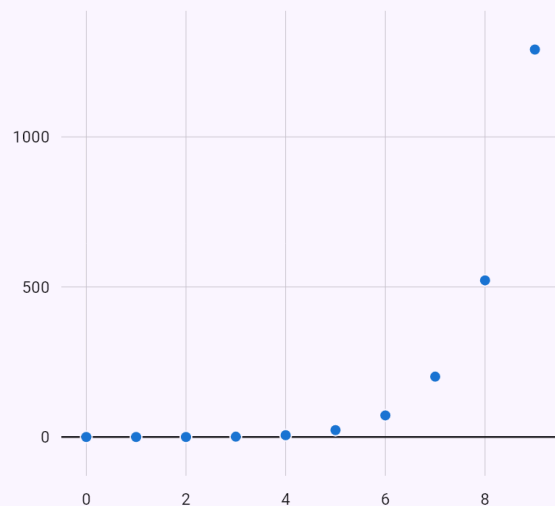
$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Primero resolvemos la recurrencia homogénea (lado derecho 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Buscamos soluciones $a_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica:
 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- El discriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; las raíces:
 $\lambda_{1,2} = 2$
- La solución general de la recurrencia homogénea:
 $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- El lado derecho n tiene forma especial; el número 1 no es raíz de la ecuación característica, así que buscamos una solución particular $a_n^{(p)} = An + B$
- Sustituimos en la recurrencia y agrupamos los términos:
 $An + B - 2A = n$
- Comparamos los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de donde $A = 1$, $B = 2$
 $A = 1$
 $B - 2A = 0$

- Una solución particular: $a_n^{(p)} = n + 2$
- La solución general:
 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = -2$, $C_2 = \frac{1}{2}$
 $C_1 + 2 = 0$
 $2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$
- La solución que cumple las condiciones dadas:
 $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Comprobación: la recurrencia da
 $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 6$, igual que la fórmula.

Gráfica



• a_n

Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

La misma recurrencia con la función generatriz.

Enunciado: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Función generatriz

Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

- Introducimos la función generatriz $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

- Multiplicamos la recurrencia por x^{n+2} y sumamos para todo $n \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Expresamos las sumas mediante la función generatriz y los valores iniciales:

$$A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$$

- Despejamos la función generatriz y factorizamos el denominador: $A(x) = \frac{1-x}{(1-2x)(1-3x)}$

- Descomposición en fracciones parciales:

$$A(x) = -\frac{1}{1-2x} + \frac{2}{1-3x}$$

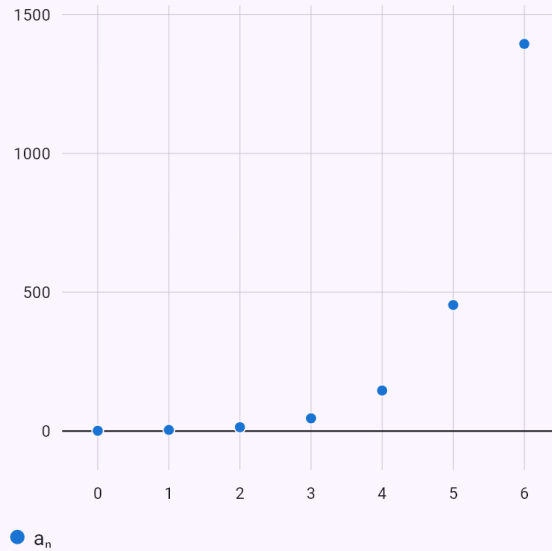
- Desarrollamos las fracciones en series geométricas

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- El coeficiente de x^n es el término buscado:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Gráfica



La misma recurrencia con potencias de una matriz.

Enunciado: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Potencias de una matriz

Resultado

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 2 con coeficientes constantes: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

- La recurrencia en forma matricial es decir $v_{n+1} = M \cdot v_n$ con

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sustituyendo repetidamente, $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Los valores propios de la matriz:

$$\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \text{ luego } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

- Los vectores propios, soluciones de $(M - \lambda E)u = 0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Diagonalizamos la matriz, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- La potencia de la matriz los coeficientes así que $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1}v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

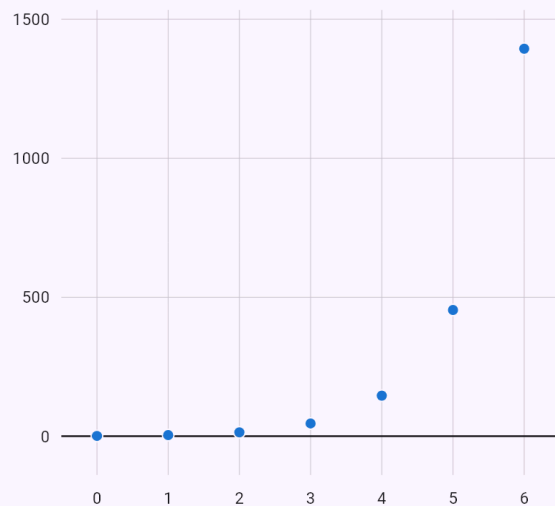
- La solución que cumple las condiciones dadas:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

- Comprobación: la recurrencia da

$$a_2 = 14, a_3 = 46, a_4 = 146, \text{ igual que la fórmula.}$$

Gráfica



● a_n

Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Una recurrencia de primer orden sumando.

Enunciado: $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_0 = 0$

Suma

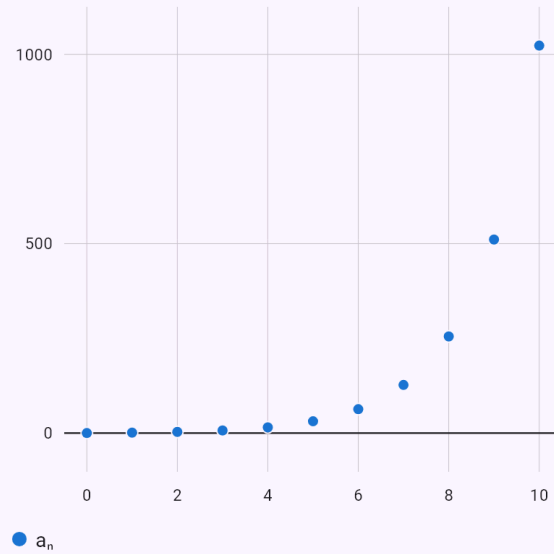
Resultado

$$a_n = 2^n - 1$$

Pasos

- Recurrencia lineal de orden 1 con coeficientes constantes: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Sustituimos la recurrencia en sí misma repetidamente:
 $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \dots$; en general
$$a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$$
- Calculamos la suma: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- La solución que cumple las condiciones dadas:
 $a_n = 2^n - 1$
- Comprobación: la recurrencia da
 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, igual que la fórmula.

Gráfica



Un coeficiente variable: el producto da un factorial.

Enunciado: $a_{n+1} = (n+1)a_n$, $a_0 = 1$

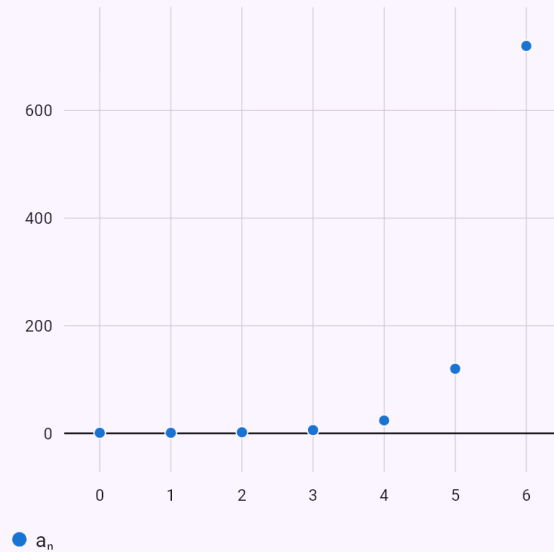
Resultado

$$a_n = n!$$

Pasos

- Recurrencia lineal de primer orden con coeficiente variable: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Sustituyendo la recurrencia en sí misma repetidamente, el término es un producto
$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \dots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1)$$
- Simplificamos el producto (los factoriales se cancelan):
$$\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$$
- La solución que cumple las condiciones dadas: $a_n = n!$
- Comprobación: la recurrencia da
 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, igual que la fórmula.

Gráfica



Una recurrencia no lineal: la sustitución $b_n = 1/a_n$.

Enunciado: $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$, $a_0 = 1$

Resultado

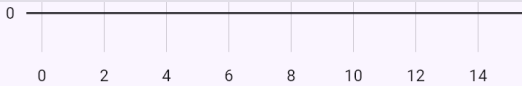
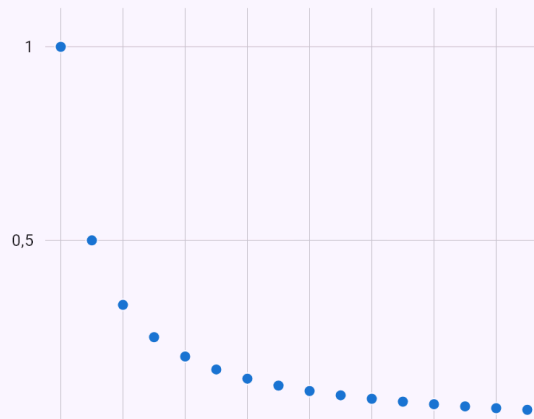
$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Pasos

- Una recurrencia no lineal: los inversos de los términos la vuelven lineal: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Invertimos ambos lados: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; la sustitución $b_n = \frac{1}{a_n}$ vuelve así lineal la recurrencia: $b_{n+1} = b_n + 1$
- Las condiciones iniciales de la nueva sucesión: $b_0 = 1$
- Primero resolvemos la recurrencia homogénea (lado derecho 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Buscamos soluciones $b_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica: $\lambda - 1 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_1 = 1$
- La solución general de la recurrencia homogénea: $b_n^{(h)} = C_1$
- El lado derecho 1 tiene forma especial; el número 1 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por n : $b_n^{(p)} = An$
- Sustituimos en la recurrencia y agrupamos los términos: $A = 1$

- Una solución particular: $b_n^{(p)} = n$
- La solución general: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 1$
 $C_1 = 1$
- La solución que cumple las condiciones dadas: $b_n = 1 + n$
- Comprobación: la recurrencia da $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$, igual que la fórmula.
- Volvemos a la sucesión original: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Gráfica



• a_n

Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Un sistema de dos recurrencias eliminando la sucesión b_n .

Enunciado: $a_{n+1} = a_n + 2b_n$

$b_{n+1} = 3a_n + b_n$

$$a_0 = 1, b_0 = 0$$

Resultado

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

Pasos

- Un sistema de dos recurrencias lineales

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$b_{n+1} = 3a_n + b_n$$

- De la primera ecuación $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, luego

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}; \text{ al sustituir en la segunda}$$

obtenemos una recurrencia para una sola sucesión:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$$

- La segunda condición inicial sale de la primera ecuación:

$$a_1 = 1 + 0 = 1$$

- Buscamos soluciones $a_n = \lambda^n$; al sustituir y dividir entre λ^n obtenemos la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$$

- El discriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; las raíces:

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{6}, \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$$

- La solución general:

$$a_n = C_1 (1 - \sqrt{6})^n + C_2 (1 + \sqrt{6})^n$$

- Sustituimos las condiciones en la solución general de

$$\text{donde } C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$(1 - \sqrt{6})C_1 + (1 + \sqrt{6})C_2 = 1$$

- La solución que cumple las condiciones dadas:

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

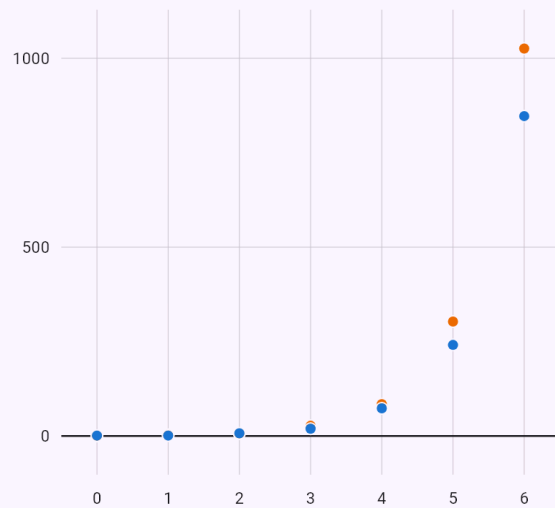
- Comprobación: la recurrencia da

$$a_2 = 7, a_3 = 19, a_4 = 73, \text{ igual que la fórmula.}$$

- La otra sucesión a partir de la expresión

$$b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

Gráfica



● a_n ● b_n

Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

Divide y vencerás (merge sort): $n = 2^k$ y el teorema maestro.

Enunciado: $T(n) = 2T(n/2) + n$, $T(1) = 1$

Resultado

$$T(n) = n + n \log_2 n$$

Condiciones: $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$

Pasos

- Una recurrencia de tipo divide y vencerás:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

- Para n potencia de la base: la sustitución $n = 2^k$, $S_k = T(2^k)$ da una recurrencia lineal de primer orden: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Las condiciones iniciales de la nueva sucesión: $S_0 = 1$
- Primero resolvemos la recurrencia homogénea (lado derecho 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Buscamos soluciones $S_k = \lambda^k$; al sustituir y dividir entre λ^k obtenemos la ecuación característica: $\lambda - 2 = 0$
- Las raíces de la ecuación característica: $\lambda_1 = 2$
- La solución general de la recurrencia homogénea: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- El lado derecho 2^{k+1} tiene forma especial; el número 2 es raíz de la ecuación característica (multiplicidad 1), así que la forma se multiplica por k : $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Sustituimos en la recurrencia, dividimos entre 2^k y agrupamos los términos: $2A = 2$

- De donde $A = 1$

- Una solución particular: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$

- La solución general: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$

- Sustituimos las condiciones en la solución general de donde $C_1 = 1$

$$C_1 = 1$$

- La solución que cumple las condiciones dadas:

$$S_k = 2^k + k \cdot 2^k$$

- Comprobación: la recurrencia da

$$S_1 = 4, S_2 = 12, S_3 = 32, \text{ igual que la fórmula.}$$

- Volvemos a n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n \log_2 n$

- El teorema maestro ($a = 2$, $b = 2$, $f(n) = \Theta(n)$): $2 = 2^1$, luego $T(n) = \Theta(n \log n)$

La función generatriz de la sucesión $n^2 + 2^n$.

Enunciado: $n^2 + 2^n$

Función generatriz

Resultado

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Pasos

- Introducimos la función generatriz

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n)x^n$$

- Separamos la serie por linealidad:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

- Una serie conocida: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$

- Una serie conocida: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

- Multiplicar los términos por n equivale a derivar y multiplicar por x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- Multiplicar los términos por n equivale a derivar y multiplicar por x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

- La función generatriz: $A(x) = \frac{1-2x+2x^2-3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Comprobación: el desarrollo empieza por los términos de la sucesión: $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \dots$

La fórmula de a_n a partir de una función generatriz: fracciones parciales con raíces irracionales.

Enunciado: $1/(1 - x - x^2)$

Función generatriz

Resultado

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Pasos

- Despejamos la función generatriz y factorizamos el denominador

$$A(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Descomposición en fracciones parciales

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Desarrollamos las fracciones en series geométricas

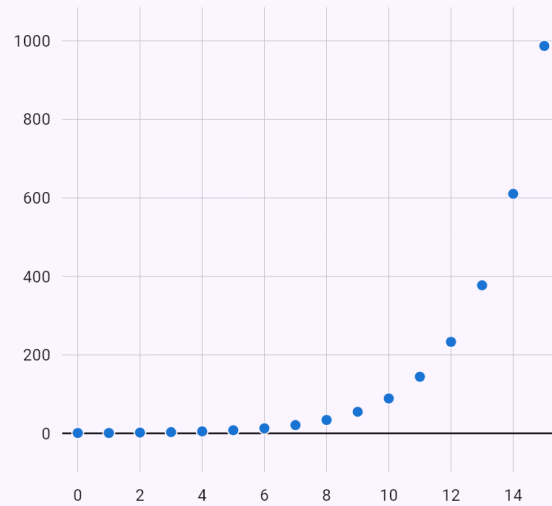
$$\frac{1}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n, \quad \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n$$

- El coeficiente de x^n es el término buscado

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Comprobación: el desarrollo empieza por los términos de la sucesión: $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

Gráfica



• a_n

Los puntos son los términos calculados con la fórmula; la propia recurrencia da los mismos valores.

El número de soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ con $x_1 \leq 3$.

Enunciado: número de soluciones $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 \leq 3$

Resultado

38

Pasos

- La incógnita x_1 ($0 \leq x_1 \leq 3$) aporta la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

- La incógnita x_2 ($x_2 \geq 0$) aporta la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- La incógnita x_3 ($x_3 \geq 0$) aporta la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- La función generatriz es su producto: el coeficiente de

$$x^N \text{ cuenta las soluciones: } G(x) = \frac{1 - x^4}{(1 - x)^3}$$

- El número de soluciones es el coeficiente de x^{10} : 38

Limitaciones conocidas

- Todavía no: recurrencias lineales de orden superior con coeficientes variables, sistemas de tres o más recurrencias, divide y vencerás con varios términos ($T(n/2)$ y $T(n/3)$) y recurrencias no lineales que estas sustituciones no vuelven lineales.

Aplicaciones de ecuaciones diferenciales

El botón «Aplicaciones de ecuaciones diferenciales» de la pantalla inicial abre un formulario con 23 modelos: radiocarbono, desintegración y periodo, crecimiento exponencial, cadena de desintegración, enfriamiento de Newton (también la hora de la muerte con dos mediciones), cinética química de orden 0–2, fármaco en la sangre, alcoholemia, ahorro y préstamo, circuitos RC, RL y RLC, resorte, caída con resistencia del aire, vaciado de un depósito, mezcla, crecimiento logístico y de Gompertz, población con captura, epidemia SIR, depredador y presa, competencia de dos especies y quimiostato.

Eliges el modelo, la variante y lo que buscas; las constantes vienen rellenas y se pueden cambiar. Cada magnitud y el resultado tienen su unidad a elegir: la aplicación convierte los valores (la conversión es un paso). El «?» junto al modelo explica de dónde sale su ecuación.

Los pasos plantean el modelo, resuelven la ecuación (separación de variables, factor integrante, ecuación característica), aplican las condiciones, despejan la magnitud buscada y sustituyen los números. Los sistemas se resuelven numéricamente con Runge–Kutta; sus equilibrios y su estabilidad, exactamente. El gráfico muestra las magnitudes en el tiempo y, en los sistemas, el plano de fases.

Ejemplos

Edad de un hallazgo con un 35 % de ^{14}C restante.

Enunciado: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Resultado

$$t \approx 8700 \text{ años}$$

Pasos

- Buscamos t ; datos: $T_{1/2} = 5730$ años, $\frac{N}{N_0} = 35\%$
- Convertimos las unidades: $\frac{N}{N_0} = 35\% = 0,35$
- Los seres vivos toman carbono del aire y por eso contienen la misma proporción del isótopo radiactivo ^{14}C que la atmósfera. Tras la muerte la absorción cesa y el ^{14}C se desintegra. El número de desintegraciones por unidad de tiempo es proporcional al número de núcleos que quedan: $dN/dt = -\lambda N$, con λ la constante de desintegración. La solución es $N = N_0 \cdot e^{(-\lambda t)}$; tras el periodo $T_{1/2} = 5730$ años queda la mitad, así que $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$. De la proporción de ^{14}C restante (o de la actividad medida frente a la de una muestra viva) se obtiene la edad. Ecuación del modelo: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Separamos las variables: $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$
- Integramos ambos lados: $\ln |N| = -\lambda t + C$
- Aplicamos la exponencial – la constante $\pm e^C$ se llama de nuevo C : $N = C e^{-\lambda t}$
- Sustituimos la condición inicial $N(0) = N_0$: $N_0 = C$

- La solución de la condición inicial (solución particular):
 $N = N_0 e^{-\lambda t}$

- En un periodo la cantidad se reduce a la mitad – constante de desintegración

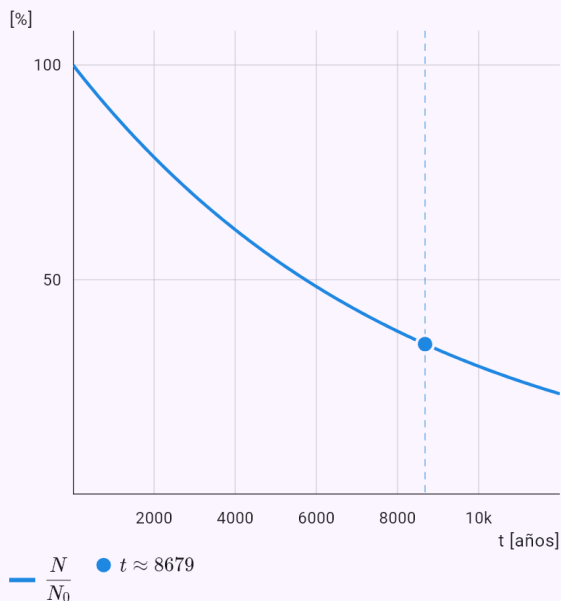
$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ año}^{-1}$$

- Despejamos la magnitud buscada:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}$$

- Sustituimos: $t = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{1}{0,35} \approx 8679$ años
- Los laboratorios dan la «edad radiocarbono» con el periodo de Libby de 5568 años y la convierten con una curva de calibración (el ^{14}C de la atmósfera no siempre fue el mismo), así que la edad real puede diferir algo.

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Hora de la muerte: 30 °C al encontrarlo, 28 °C una hora después, habitación a 20 °C.

Enunciado: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC]; Tt=37[degC]; k=measured)`

Resultado

$$t \approx -2,38 \text{ h}$$

Pasos

- Buscamos t ; datos

$$T_0 = 30^\circ\text{C}, \quad T_a = 20^\circ\text{C}, \quad t_1 = 1 \text{ h}, \quad T_1 = 28^\circ\text{C},$$

- Un cuerpo cede calor tanto más rápido cuanto mayor es la diferencia de temperaturas: $dT/dt = -k(T - T_a)$, con T_a la temperatura ambiente y k dependiente del cuerpo. La solución es $T = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{(-kt)}$. k se determina con dos mediciones. Así estima la medicina forense la hora de la muerte: mide la temperatura del cuerpo al encontrarlo y un poco después y calcula cuándo tenía 37 °C. Ecuación del modelo: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$

- Separamos las variables: $\frac{dT}{T - T_a} = -k dt$

- Integramos ambos lados: $\ln |T - T_a| = -kt + C$

- Aplicamos la exponencial – la constante $\pm e^C$ se llama de nuevo C : $T = T_a + C e^{-kt}$

- Sustituimos la condición inicial $T(0) = T_0$:
 $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$

- La solución de la condición inicial (solución particular):
 $T = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt}$

- k a partir de la segunda medición

$$T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1} \ln \frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$$

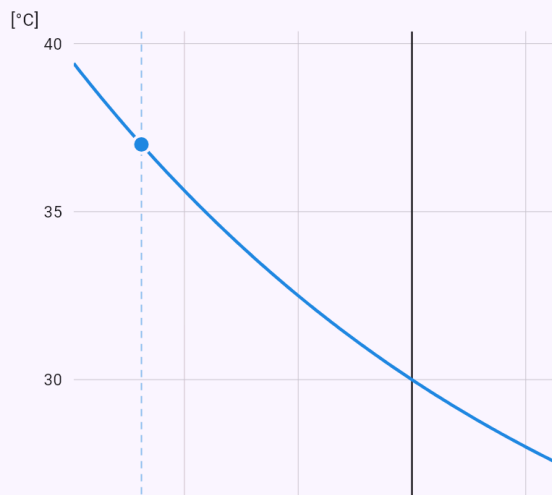
- Despejamos la magnitud buscada

$$T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$$

- Sustituimos: $t = -\frac{1}{0,2231} \ln \frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2,378 \text{ h}$

- Un tiempo negativo significa antes de la primera medición (en la hora de la muerte, esas horas antes del hallazgo).

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

500 mg cada 8 horas: el nivel estacionario.

Enunciado: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

Resultado

$$c_{max} \approx 20,7 \text{ mg/l}$$

$$c_{min} \approx 8,22 \text{ mg/l}$$

Pasos

- Buscamos c_{max} ; datos

$$D = 500 \text{ mg}, \quad V = 40 \text{ l}, \quad T_{1/2} = 6 \text{ h}, \quad \tau = 8 \text{ h}$$

- Un fármaco se reparte en el volumen de distribución V y los riñones y el hígado lo eliminan a una velocidad proporcional a la concentración: $dc/dt = -kc$ con $k = \ln 2 / T_{1/2}$. Tras una dosis D , $c = (D/V) \cdot e^{(-kt)}$. Con dosis repetidas cada τ los restos se suman (serie geométrica) y el nivel se estabiliza entre c_{min} y c_{max} . Con una infusión de ritmo R , $dc/dt = R/V - kc$ y la concentración tiende a $R/(kV)$. Ecuación del modelo: $\frac{dc}{dt} = -kc$

- Concentración inicial tras la dosis:

$$c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12,5 \text{ mg/l}$$

- Constante de eliminación a partir de la vida media:

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0,1155 \text{ h}^{-1}$$

- Separamos las variables: $\frac{dc}{c} = -k dt$

- Integramos ambos lados: $\ln |c| = -kt + C$

- Aplicamos la exponencial – la constante $\pm e^C$ se llama de nuevo C : $c = C e^{-kt}$

- Sustituimos la condición inicial $c(0) = c_0$: $c_0 = C$

- La solución de la condición inicial (solución particular): $c = c_0 e^{-kt}$

- Parte del fármaco que queda hasta la siguiente dosis:

$$q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0,1155 \cdot 8} \approx 0,3969$$

- Despejamos la magnitud buscada

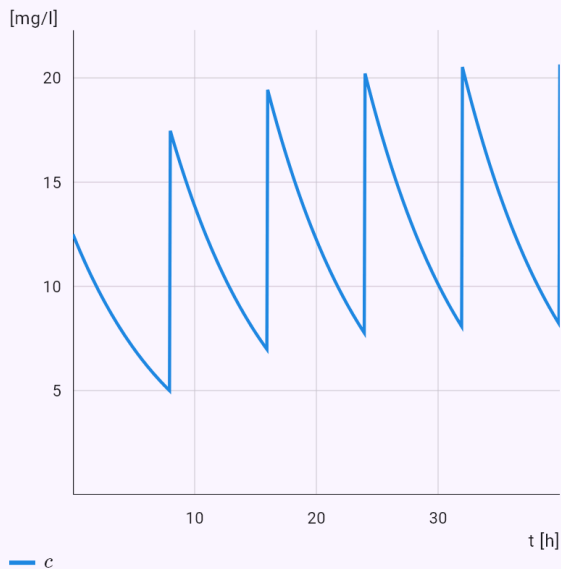
$$c_{max} = c_0 (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{c_0}{1 - q}, \quad c_{min} = q c_{max}$$

- Sustituimos: $c_{max} = \frac{12,5}{1 - 0,3969} \approx 20,72 \text{ mg/l}$

- Sustituimos: $c_{min} = 0,3969 \cdot 20,72 \approx 8,225 \text{ mg/l}$

- Factor de acumulación (cuántas veces supera el nivel estacionario al de una dosis): $R = \frac{1}{1 - q} \approx 1,658$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Cuota mensual de un préstamo de 1 000 000 CZK a 20 años al 5 %.

Enunciado: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr];`

B=0[CZK]; kind=loan)

Resultado

$a \approx 6592 \text{ CZK/mes}$

Pasos

- Buscamos a ; datos

$$D_0 = 1\,000\,000 \text{ CZK}, \quad r = 5\% \text{ anual}, \quad t = 20 \text{ años},$$

- Convertimos las unidades: $r = 5\% \text{ anual} = 0,05 \text{ año}^{-1}$

- Con interés continuo, el interés se acumula en cada instante en proporción al saldo: $dB/dt = rB$, con r el tipo anual. Las aportaciones a aumentan el saldo ($dB/dt = rB + a$), las cuotas de un préstamo reducen la deuda ($dD/dt = rD - a$). Se resuelve separando variables; de la solución salen el saldo, el plazo o la cuota (anualidad continua).

$$\text{Ecuación del modelo: } \frac{dD}{dt} = rD - a$$

- Separamos las variables: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r dt$

- Integramos ambos lados: $\ln \left| D - \frac{a}{r} \right| = rt + C$

- Aplicamos la exponencial – la constante $\pm e^C$ se llama de nuevo C : $D = \frac{a}{r} + Ce^{rt}$

- Sustituimos la condición inicial $D(0) = D_0$:
 $C = D_0 - \frac{a}{r}$

- La solución de la condición inicial (solución particular):

$$D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r} \right) e^{rt}$$

- El interés continuo es un modelo: los bancos capitalizan mensual o anualmente y la diferencia es pequeña.

- Despejamos la magnitud buscada: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$

- Sustituimos

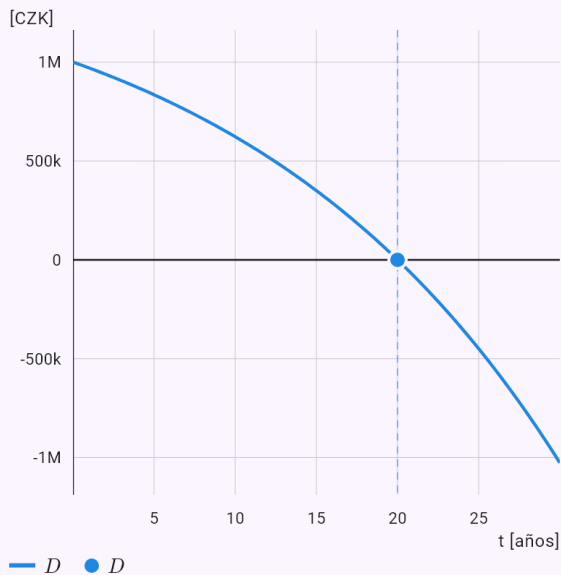
$$a = \frac{0,05(1\,000\,000 e^{0,05 \cdot 20} - 0)}{e^{0,05 \cdot 20} - 1} \approx 79\,100 \text{ CZK/año}$$

- Total pagado: $a t = 1\,582\,000 \text{ CZK}$

- Convertimos las unidades:

$$a \approx 79\,100 \text{ CZK/año} = 6592 \text{ CZK/mes}$$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Cuánto tarda un condensador en cargarse a la mitad de la tensión.

Enunciado: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

Resultado

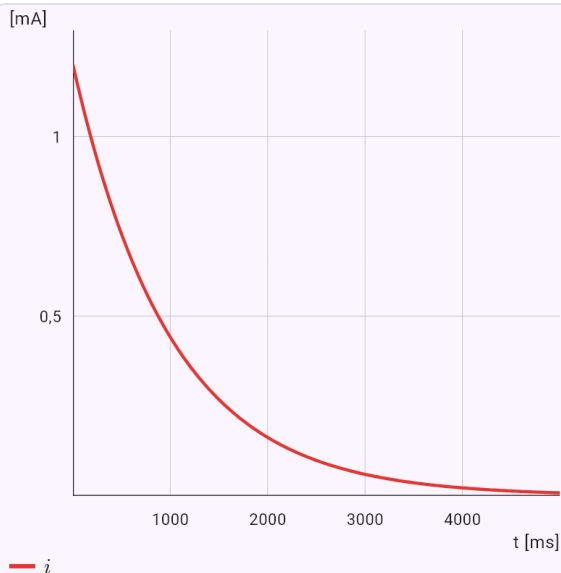
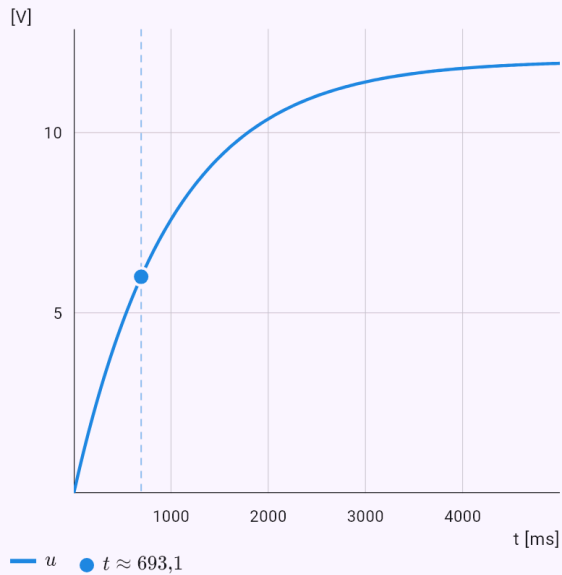
$$t \approx 693 \text{ ms}$$

Pasos

- Buscamos t ; datos
 $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $U = 12 \text{ V}$, $u = 6 \text{ V}$
- Al cargar un condensador a través de una resistencia, Kirchhoff da $U = Ri + u$ y la corriente carga el condensador: $i = C \cdot du/dt$. Juntas, $RC \cdot du/dt + u = U$. La tensión se acerca a la de la fuente: $u = U(1 - e^{-(t/\tau)})$, con $\tau = RC$ la constante de tiempo; la corriente $i = (U/R) \cdot e^{-(t/\tau)}$ disminuye. En la descarga, $u = U_0 \cdot e^{-(t/\tau)}$.
Ecuación del modelo: $RC \frac{du}{dt} + u = U$
- Constante de tiempo: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000 \text{ ms}$
- Separamos las variables: $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Integramos ambos lados: $\ln |u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Aplicamos la exponencial – la constante $\pm e^C$ se llama de nuevo C : $u = U + C e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Sustituimos la condición inicial $u(0) = 0$:
 $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- La solución de la condición inicial (solución particular):
 $u = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

- Despejamos la magnitud buscada: $t = -\tau \ln \left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Sustituimos: $t = -1000 \ln \left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693,1 \text{ ms}$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Resorte amortiguado: elongación en 1 s.

Enunciado: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

$$t=1[s])$$

Resultado

$$x \approx 1,827 \text{ cm}$$

Pasos

- Buscamos x ; datos

$$m = 0,5 \text{ kg}, \quad k = 20 \text{ N/m}, \quad b = 1 \text{ kg/s}, \quad x_0 = 5 \text{ cm},$$

- Convertimos las unidades: $x_0 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

- Sobre un cuerpo en un resorte actúan la fuerza del resorte $-kx$ (Hooke), el amortiguamiento $-b \cdot v$ y quizá una fuerza externa $F_0 \cdot \cos \omega t$. Por la 2.ª ley de Newton $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$, una ecuación lineal de 2.º orden con coeficientes constantes. Las raíces de la ecuación característica indican si el cuerpo oscila o solo vuelve al equilibrio. Excitarlo cerca de la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ produce resonancia. Ecuación del modelo: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$

- Frecuencia angular natural (sin amortiguamiento):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} \approx 6,325 \text{ s}^{-1}$$

- Coeficiente de amortiguamiento δ :

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0,5} \approx 1 \text{ s}^{-1}$$

- Buscamos soluciones $x = e^{\lambda t}$; al sustituir y dividir entre $e^{\lambda t}$ obtenemos la ecuación característica: $0,5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$

- Las raíces de la ecuación característica:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 6,245i$$

- Amortiguamiento subcrítico ($\delta < \omega_0$;

$\delta = 1, \quad \omega_0 = 6,325$): raíces complejas, oscilaciones amortiguadas.

- Solución de la ecuación homogénea:

$$x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6,245t + C_2 \sin 6,245t)$$

- Sustituimos las condiciones en la solución general:

$$x(0) = 0,05, \quad x'(0) = 0, \text{ de donde}$$

$$C_1 \approx 0,05, \quad C_2 \approx 0,008006$$

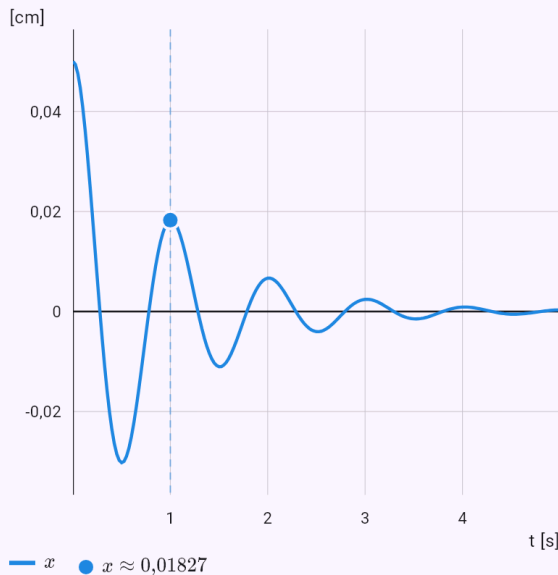
- La solución de la condición inicial (solución particular):

$$x = e^{-t}(0,05 \cos 6,245t + 0,008006 \sin 6,245t)$$

- Sustituimos: $x(1) \approx 0,01827 \text{ m}$

- Convertimos las unidades: $x \approx 0,01827 \text{ m} = 1,827 \text{ cm}$

Gráfica



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Epidemia con $R_0 = 2,5$: pico y total de infectados.

Enunciado: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Resultado

$$I_{max} \approx 2340 \text{ ind.}$$

$$t_{max} \approx 34,1 \text{ d}$$

$$R_{\infty} \approx 8930 \text{ ind.}$$

Pasos

- Buscamos t_{max} ; datos

$$N = 10\,000 \text{ ind.}, \quad I_0 = 10 \text{ ind.}, \quad R_0 = 2,5, \quad D = 7 \text{ d}$$

- La población N se divide en susceptibles S , infectados I y recuperados R . Los contagios son proporcionales a los encuentros: $\beta \cdot S \cdot I / N$; los infectados se recuperan con tasa $\gamma = 1/D$ (D , la duración de la enfermedad). El sistema $S' = -\beta SI/N$, $I' = \beta SI/N - \gamma I$, $R' = \gamma I$ no tiene solución elemental y se resuelve numéricamente. Exactamente se obtienen el número reproductivo básico $R_0 = \beta/\gamma$, el pico, el total de infectados y el umbral de inmunidad de grupo $1 - 1/R_0$. Ecuación del modelo

$$S' = -\frac{\beta SI}{N}$$

$$I' = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

- Tasa de recuperación: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0,1429 \text{ d}^{-1}$
- Tasa de transmisión: $\beta = R_0 \gamma \approx 0,3571 \text{ d}^{-1}$

- La suma $S + I + R = N$ es constante (las ecuaciones suman cero).

- Umbral de inmunidad de grupo (proporción de inmunes con la que la enfermedad deja de propagarse):

$$1 - \frac{1}{R_0} \approx 60 \%$$

- La epidemia se desata porque al principio se cumple

$$I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$$

- El pico se alcanza con $S = N/R_0$; de la ecuación para dI/dS

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0} \ln S = C \Rightarrow I_{max} = I$$

- Resolvemos la ecuación numéricamente (bisección)

$$\ln \frac{S_{\infty}}{S_0} = \frac{R_0(S_{\infty} - N)}{N} \Rightarrow S_{\infty} \approx 1072 \text{ ind.}$$

- En total enferman: $R_{\infty} = N - S_{\infty} \approx 8928 \text{ ind.}$ (89,3 %)

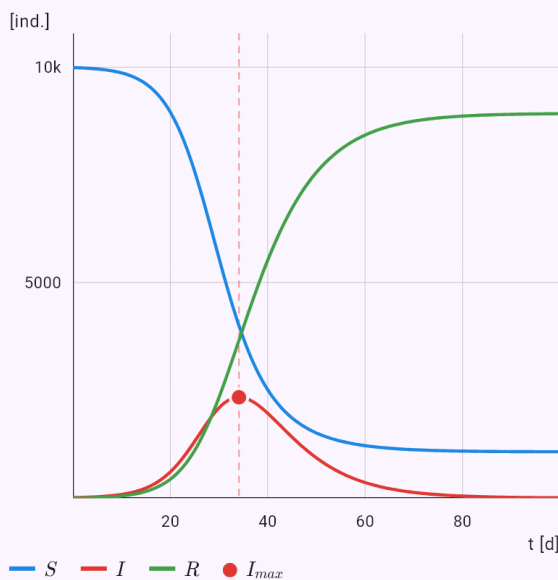
- El sistema no se resuelve con funciones elementales: lo resolvemos numéricamente con el método de Runge-Kutta de orden 4, paso 0,05, en $[0, 100]$

- De la solución numérica: $t_{max} \approx 34,1 \text{ d}$

Gráfica

En el tiempo

Plano de fases



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Depredador y presa: equilibrio, estabilidad y periodo.

Enunciado: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo]; c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

Resultado

$$[x^*, y^*] \approx [80, 50]$$

$$T \approx 14,9 \text{ meses}$$

Pasos

- Buscamos T ; datos

$$a = 0,5 \text{ mes}^{-1}, \quad b = 0,01 \text{ (ind.} \cdot \text{mes)}^{-1}, \quad c = 0,4 \text{ mes}$$

- Las presas x se multiplican sin depredadores (ax) y los depredadores y mueren sin presas ($-cy$). Los encuentros, proporcionales a xy , reducen las presas ($-bxy$) y alimentan a los depredadores ($+dxy$). El sistema $x' = ax - bxy$, $y' = -cy + dxy$ (Lotka, Volterra) tiene el equilibrio $[c/d; a/b]$, con autovalores imaginarios puros: las poblaciones oscilan periódicamente, los depredadores con retraso. Se resuelve numéricamente; equilibrios e integral primera, exactamente. Ecuación del modelo

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$

- Equilibrios – todas las derivadas son nulas

$$x(a - by) = 0, \quad y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0, 0], \quad \left[\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right] \approx [80, 50]$$

- Estabilidad por linealización – matriz jacobiana del sistema

$$J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$$

- En $[0, 0]$ autovalores $\lambda_1 = -0,4$, $\lambda_2 = 0,5$ – punto de silla (inestable).

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}$$

- En $[80, 50]$ autovalores $\lambda_{1,2} = \pm 0,4472i$ – centro (oscilaciones alrededor del equilibrio).

$$\begin{pmatrix} 0 & -0,8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dividiendo las ecuaciones y separando se obtiene una integral primera, constante a lo largo de la trayectoria: $V = dx - c \ln x + by - a \ln y = C$

- Como V no cambia a lo largo de una trayectoria, las trayectorias son curvas cerradas: las poblaciones oscilan periódicamente.

- Periodo de las pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio (de los autovalores): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14,05 \text{ meses}$

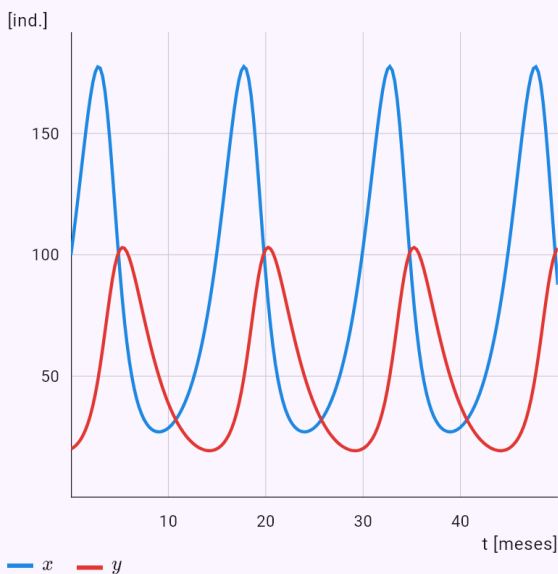
- El sistema no se resuelve con funciones elementales: lo resolvemos numéricamente con el método de Runge-Kutta de orden 4, paso 0,0125, en $[0, 50]$

- De la solución numérica: $T \approx 14,95 \text{ meses}$

Gráfica

En el tiempo

Plano de fases



Las magnitudes del modelo en el tiempo, calculadas a partir de la solución; la respuesta está marcada.

Próximamente

Estamos trabajando en estos tipos de problemas o los tenemos previstos. El orden puede cambiar según lo que más necesites.

Ecuaciones e inecuaciones

- Ecuaciones de segundo grado incompletas sacando factor común o con raíces ($x^2 = 9$) en lugar del discriminante.

Funciones, derivadas e integrales

- Aplicaciones de la integral con parámetros – fórmulas generales (esfera de radio r , elipse, cono).
- Área coloreada y sólido en 3D para curvas paramétricas y polares.
- Aplicaciones físicas de derivadas e integrales (velocidad, aceleración, trabajo, centro de masas).
- La forma compleja de la serie de Fourier y el espectro.
- Las integrales de Riemann y de Lebesgue de funciones especiales (funciones de Dirichlet y de Riemann).

Ecuaciones diferenciales

- Sistemas de ecuaciones diferenciales escritos como ecuaciones (las aplicaciones ya los tienen) y su retrato de fases.
- Transformada de Laplace con la función de Heaviside, desplazamientos y lados derechos periódicos.

Otras áreas

- Vectores – módulo, producto escalar, vectorial y mixto, ángulos, áreas y volúmenes.
- Matrices – operaciones, determinante, rango, matriz inversa, valores y vectores propios.
- Problemas de construcción – triángulos, cuadriláteros y circunferencias a partir de elementos dados, los pasos de la construcción y el número de soluciones.
- Números complejos en forma trigonométrica y exponencial, el teorema de De Moivre, raíces n -ésimas.

- La regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales.
- Funciones de varias variables, integrales múltiples, de línea y de superficie.
- Modo exacto y modo numérico (decimales en lugar de fracciones y raíces).
- Problemas de enunciado – plantear las ecuaciones a partir del texto y resolverlas.