

MathSolver – Handbuch

Was MathSolver lösen kann, wie man eine Aufgabe eingibt und wie das Ergebnis aussieht.

MathSolver löst Aufgaben vom Foto oder von Hand eingegeben und zeigt zu jedem Ergebnis den Lösungsweg so, wie er in der Schule gerechnet wird – Schritt für Schritt, mit Erklärungen und, wo es sinnvoll ist, mit einem Graphen.

Jedes Kapitel beschreibt eine Art von Aufgaben: was man von der Lösung erwarten kann, wie man die Aufgabe eingibt und Beispiele echter Ausgaben der App. Bekannte Einschränkungen stehen, falls es welche gibt, am Ende des Kapitels.

Inhalt

1. Eine Aufgabe eingeben
2. Lineare Gleichungen und Ungleichungen
3. Quadratische Gleichungen
4. Gleichungen höheren Grades
5. Bruchgleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Exponential- und Logarithmusgleichungen und -ungleichungen
8. Betrag
9. Trigonometrische Gleichungen und Ungleichungen
10. Ungleichungen und Ungleichungssysteme
11. Gleichungssysteme
12. Gleichungen und Ungleichungen mit Parameter
13. Terme umformen
14. Grenzwerte
15. Ableitungen
16. Kurvendiskussion
17. Taylorpolynom
18. Unbestimmte Integrale
 - Grundintegrale und Substitution
 - Partielle Integration

Gebrochenrationale Funktionen

Trigonometrische Funktionen

Hyperbelfunktionen

Wurzeln

19. Bestimmte Integrale und ihre Anwendungen

Bestimmtes Integral

Uneigentliche Integrale

Fläche unter einer Kurve und zwischen Kurven

Bogenlänge

Volumen eines Rotationskörpers

Mantelfläche eines Rotationskörpers

Kurven in Parameterform und in Polarkoordinaten

Durch eine Gleichung gegebene Kurven

20. Unendliche Reihen

Zahlenreihen

Potenzreihen

Taylorreihe

21. Fourierreihen

22. Differentialgleichungen

23. Rekursionen und erzeugende Funktionen

24. Anwendungen von Differentialgleichungen

25. Demnächst

Eine Aufgabe eingeben

Sie können die Aufgabe fotografieren – schneiden Sie das Foto vor dem Senden auf die Aufgabe zu. Die App erkennt sie und zeigt eine Vorschau; ist die Umschrift falsch, korrigieren Sie sie im Feld unter der Vorschau. Im selben Feld lässt sich eine Aufgabe auch direkt eintippen.

Ist die Eingabe ein Term ohne Gleichheitszeichen, wählen Sie mit einem Chip, was damit geschehen soll: vereinfachen, ausmultiplizieren, faktorisieren, in Partialbrüche zerlegen, ableiten, eine Kurvendiskussion durchführen, ein Taylorpolynom bestimmen, integrieren, eine Reihe summieren oder eine Fourierreihe bestimmen. Die Option „Schwerpunkt“ auf dem Startbildschirm stellen Sie auf das ein, was Sie gerade üben – sie wählt einen passenden Chip vor.

Gleichungen und Ungleichungen werden direkt gelöst. Wo es mehrere Lösungswege gibt (das Verfahren für ein Gleichungssystem, für Beträge, die Ableitung nach Definition), wählen Sie ihn mit einem Chip; das Ergebnis wird sofort neu berechnet. Gleichungen und Ungleichungen werden in den reellen Zahlen gelöst; mit dem Chip „Lösen in“ wählen Sie stattdessen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}^+$. Bei einem Grenzwert wählen Sie per Chip, ob ein unbestimmter Ausdruck durch Umformen oder gleich mit der Regel von L'Hospital gelöst wird.

Eingabe

$x^2 + 3x - 4$	Potenzen schreibt man mit ^, die Multiplikation mit einer Zahl oder Variablen kann entfallen (3x, 2xy).
$(x+1)/(x-2)$	Brüche mit Schrägstrich; Zähler oder Nenner, die nicht nur eine Zahl oder ein Buchstabe sind, in Klammern.
$\sqrt{x+1}$, $x^{(1/3)}$	Quadratwurzel sqrt(...), andere Wurzeln als Potenz mit gebrochenem Exponenten.
$ 2x - 1 $	Betrag zwischen senkrechten Strichen. Lässt sich die Eingabe unterschiedlich lesen ($ x y z $), bietet die App die Lesarten zur Auswahl an; eindeutig wird sie, wenn Sie den Betrag in Klammern setzen: $2x(x - 1)$.
$\ln x$, $\log x$, $\log_2 x$	ln ist der natürliche Logarithmus, log (oder lg) der Zehnerlogarithmus, log_2 der zur Basis 2.
$\sin x$, $\cos 2x$, $\tan x$, $\cot x$	Trigonometrische Funktionen; ein Argument ohne Klammern ist der Term direkt nach der Funktion (cos

$$2x = \cos(2x)).$$

$\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\operatorname{arsinh} x$

Hyperbelfunktionen $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, $\coth$ und Areafunktionen arsinh , arcosh , artanh , arcoth (auch asinh , $\operatorname{arcsinh}$, ...).

$\sin \alpha = 1/2$, $\sin(x + 30^\circ)$

Ein Winkel in Grad: ein griechischer Buchstabe als Unbekannte (α , β , ... oder direkt α) oder Grad an einer Zahl; lateinische Buchstaben sind im Bogenmaß.

$\sin x = 1/2$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Lösungen in einem Intervall – nach einem Komma oder in der nächsten Zeile ($x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ oder $0 \leq x < 2\pi$).

π , e , ∞

Die Kreiszahl π , die Eulersche Zahl e , unendlich ∞ .

$x \sin x$, $2x(x+1)$

Zwischen Variable und Funktion ein Leerzeichen ($x \sin x$) – $x \sin x$ wird als Produkt von Buchstaben gelesen.

$2x + 3y = 7$

$x - y = 1$

Ein Gleichungs- oder Ungleichungssystem zeilenweise schreiben, jede auf eine eigene Zeile.

$(3+4i)/(1-2i)$

Komplexe Zahlen: i ist die imaginäre Einheit (in Termen und Gleichungen).

$x^2 < 10$, $x \in \mathbb{Z}$

Die Zahlenmenge nach einem Komma: $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$ (oder $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$, „in $\mathbb{N}$ “); $\mathbb{N}$ ohne Null.

Bekannte Einschränkungen

- Das Ergebnis steht in exakter Form (Brüche, Wurzeln, π) mit Näherungswert; einen rein numerischen Modus gibt es noch nicht.

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Die App formt eine lineare Gleichung um wie in der Schule – sie löst die Klammern auf, bringt die Unbekannte auf eine Seite und dividiert. Bei einer Ungleichung achtet sie auf das Umdrehen des Zeichens beim Multiplizieren mit einer negativen Zahl und schreibt das Ergebnis als Intervall; der Graph zeigt beide Seiten als Geraden und markiert die Lösung auf der x-Achse.

Beispiele

Eine Gleichung mit Klammer.

Eingabe: $3(x - 2) = 2x + 5$

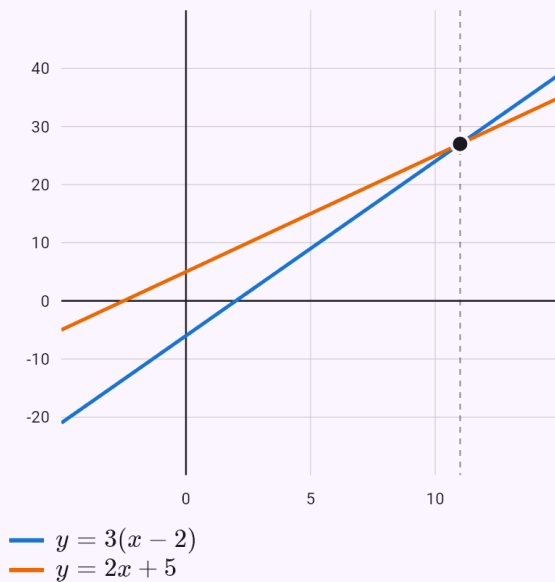
Ergebnis

$$x = 11$$

Lösungsweg

- Alles auf eine Seite bringen: $x - 11 = 0$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $x = 11$

Graph



Schnittpunkte der Graphen:

- (11|27)

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Eine Ungleichung – die Division durch eine negative Zahl dreht das Zeichen um.

Eingabe: $2x - 3 < 5x + 6$

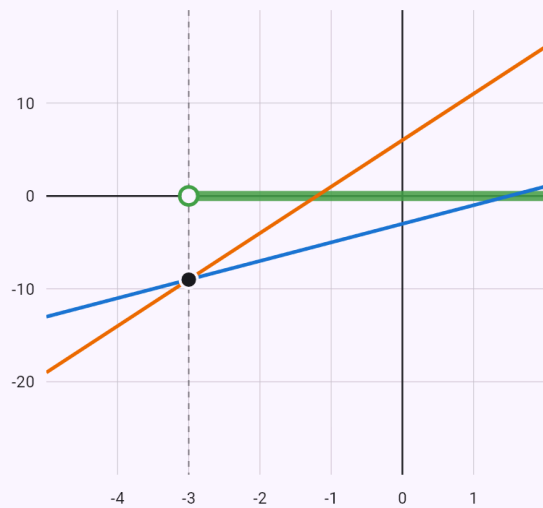
Ergebnis

$$x \in (-3; \infty)$$

Lösungsweg

- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $-3x < 9$
- Durch die negative Zahl -3 dividieren, das Ungleichheitszeichen dreht sich um: $x > -3$

Graph



$$\begin{aligned} & \text{---} y = 2x - 3 \\ & \text{---} y = 5x + 6 \end{aligned}$$

--- Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet (-3 | -9)$$

Quadratische Gleichungen

Die App bringt eine quadratische Gleichung auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ und löst sie mit der Diskriminante und der Lösungsformel; eine doppelte Lösung erkennt sie ebenfalls. Hat die Gleichung keine reelle Lösung, sagt sie es, und die Schaltfläche „Komplexe Lösung anzeigen“ zeigt die komplexen Lösungen.

Beispiele

Zwei reelle Lösungen.

Eingabe: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Ergebnis

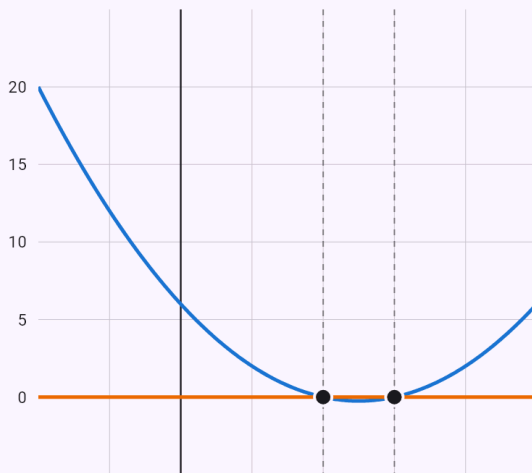
$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

Lösungsweg

- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graph



$$y = x^2 - 5x + 6$$
$$y = 0$$

Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet (2|0) \quad \bullet (3|0)$$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Negative Diskriminante – komplexe Lösungen.

Eingabe: $x^2 + 2x + 5 = 0$

Komplexe Lösung anzeigen

Ergebnis

$$x_1 = -1 + 2i$$

$$x_2 = -1 - 2i$$

Lösungsweg

- Die Diskriminante berechnen:

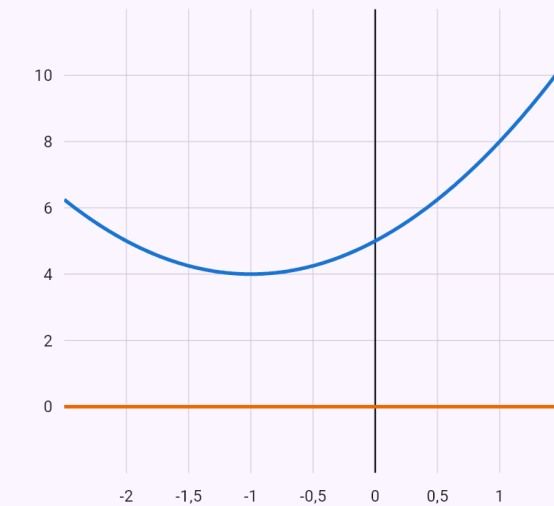
$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

- Die Diskriminante ist negativ – im Bereich der komplexen Zahlen: $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$

- In die Lösungsformel einsetzen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

Graph



— $y = x^2 + 2x + 5$
— $y = 0$

Die Graphen schneiden sich nicht – die Gleichung hat keine reelle Lösung.

Gleichungen höheren Grades

Eine biquadratische Gleichung führt die App durch Substitution auf eine quadratische zurück. Eine allgemeine Gleichung höheren Grades zerlegt sie mit dem Horner-Schema: Nullstellen sucht sie unter den Teilern des absoluten Glieds und dividiert jede gefundene ab, bis eine quadratische Gleichung übrig bleibt.

Beispiele

Eine biquadratische Gleichung mit der Substitution $y = x^2$.

Eingabe: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Ergebnis

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -1$$

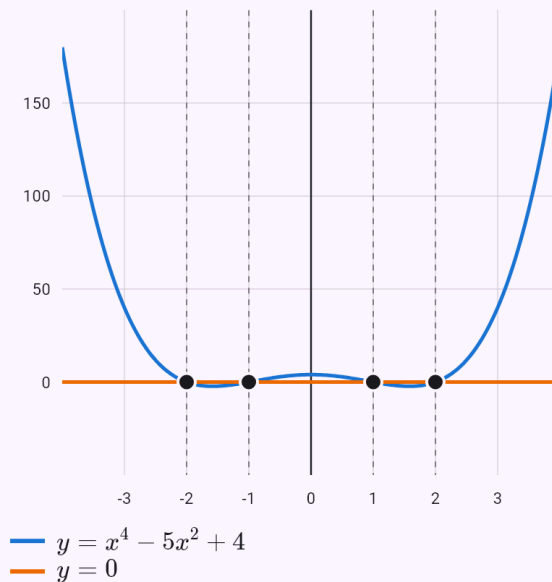
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 2$$

Lösungsweg

- Die Substitution $u = x^2$ macht daraus eine quadratische Gleichung: $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$$
- Rücksubstitution: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Graph



Schnittpunkte der Graphen:

- $(-2|0)$ • $(-1|0)$ • $(1|0)$ • $(2|0)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Horner-Schema – Nullstellen unter den Teilern des absoluten Glieds.

Eingabe: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Ergebnis

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

Lösungsweg

- Rationale Nullstellen können nur Teiler des Absolutglieds -6 sein: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

- Mit dem Horner-Schema bestätigen wir die Nullstelle $x = 1$ und dividieren das Polynom:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

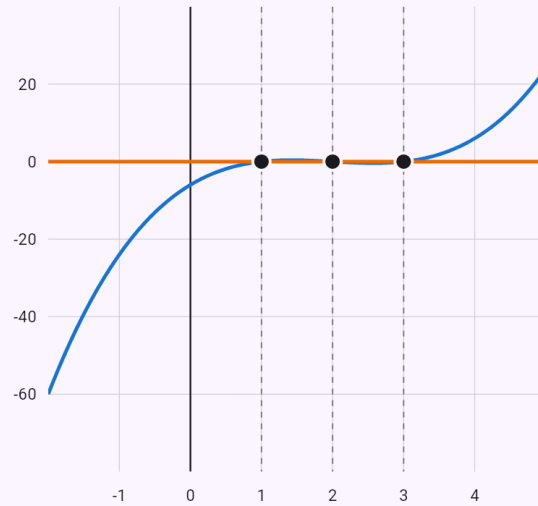
- Die Diskriminante berechnen:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

- In die Lösungsformel einsetzen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graph



— $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
— $y = 0$

Schnittpunkte der Graphen:

• $(1|0)$ • $(2|0)$ • $(3|0)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Bruchgleichungen

Bei einer Gleichung mit der Unbekannten im Nenner bestimmt die App zuerst die Definitionsmenge, multipliziert dann mit dem Hauptnenner und löst. Die Lösungen vergleicht sie mit der Definitionsmenge und verwirft die, die nicht dazugehören.

Beispiele

Definitionsmenge, Hauptnenner, quadratische Gleichung.

Eingabe: $(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x$

Ergebnis

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$

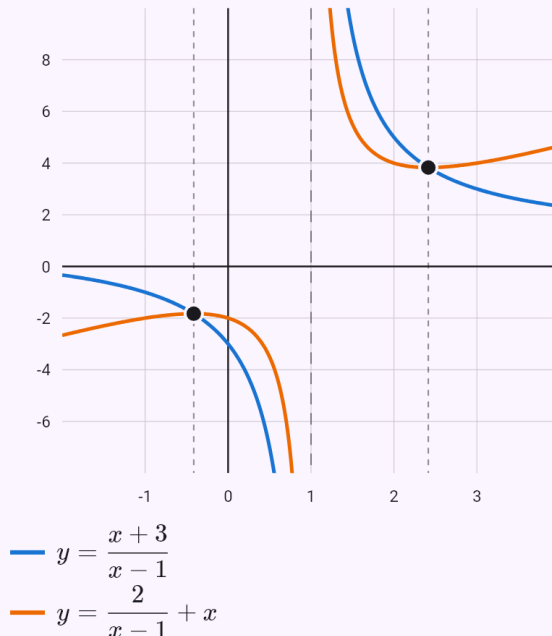
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Bedingungen: $x \neq 1$

Lösungsweg

- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $x \neq 1$
- Beide Seiten werden mit dem Nenner $x - 1$ multipliziert:
 $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
- Die Lösung $x = 1 - \sqrt{2}$ erfüllt die Bedingungen.
- Die Lösung $x = 1 + \sqrt{2}$ erfüllt die Bedingungen.

Graph



Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet \left(1 - \sqrt{2} \mid 1 - 2\sqrt{2}\right) \quad \bullet \left(1 + \sqrt{2} \mid 1 + 2\sqrt{2}\right)$$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Wurzelgleichungen

Eine Gleichung mit der Unbekannten unter einer Wurzel löst die App durch Isolieren der Wurzel und Quadrieren. Quadrieren kann Lösungen hinzufügen, die die Gleichung nicht erfüllen – deshalb folgt immer eine Probe, und die unpassenden Lösungen werden verworfen.

Beispiele

Quadrieren und Probe – eine der Lösungen erfüllt die Gleichung nicht.

Eingabe: `sqrt(x+5) = x - 1`

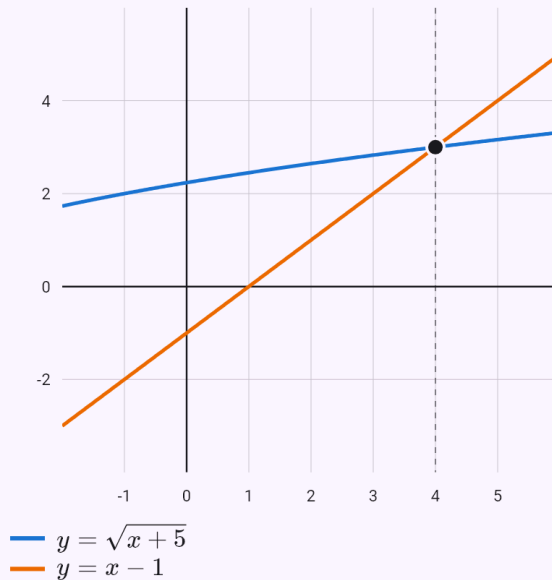
Ergebnis

$$x = 4$$

Lösungsweg

- Wir quadrieren beide Seiten (keine Äquivalenzumformung, daher machen wir die Probe):
 $x + 5 = (x - 1)^2$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- Probe für $x = -1$: $L = 2$, $R = -2$, $L \neq R$ – die Lösung passt nicht.
- Probe für $x = 4$: $L = 3$, $R = 3$, $L = R$ – die Lösung passt.

Graph



Schnittpunkte der Graphen:

● (4|3)

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Bekannte Einschränkungen

- Wurzelgleichungen werden noch nicht gelöst.

Exponential- und Logarithmusgleichungen und -ungleichungen

Eine Exponentialgleichung löst die App durch Umformen auf dieselbe Basis, durch Logarithmieren oder durch Substitution; eine Logarithmusgleichung durch Zusammenfassen der Logarithmen nach den Rechenregeln und Entlogarithmieren, immer mit der Definitionsmenge. Ungleichungen löst sie über die Monotonie – bei einer Basis kleiner als 1 dreht sich das Zeichen um.

Gleichungen mit verschiedenen Basen: $a^x + b^x = c^x$ mit Basen aus zwei Primzahlen ($25^x + 10^x = 4^x$) werden durch eine Potenz geteilt und mit $t = (5/2)^x$ quadratisch; Logarithmen verschiedener Basen werden auf eine umgerechnet ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Logarithmen, deren Basen Potenzen einer Zahl sind ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$), werden auf eine Basis umgerechnet ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), die Gleichung wird multipliziert und die Logarithmen zusammengefasst. Ein Logarithmus mit der Unbekannten in der Basis ($\log_x 8 = 3$) wird nach der Definition aufgelöst ($x^3 = 8$), mit den Bedingungen $x > 0$, $x \neq 1$. Eine Gleichung mit der Unbekannten in Basis und Exponent ($x^{(\log x)} = 100$) wird logarithmiert und mit der Substitution $t = \log x$ gelöst. Ungleichungen mit der Substitution $t = \log(x + 1)$ und Systeme logarithmischer und exponentieller Ungleichungen werden wie einzelne Ungleichungen gelöst – über die Monotonie.

Gleichungen und Ungleichungen mit Hyperbelfunktionen werden nach der Definition ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, ...) zu Exponentialgleichungen und mit der Substitution $t = e^x$ gelöst; $\operatorname{arsinh} x = c$ mit der Umkehrfunktion ($x = \sinh c$).

Beispiele

Die Substitution $t = 2^x$.

Eingabe: $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

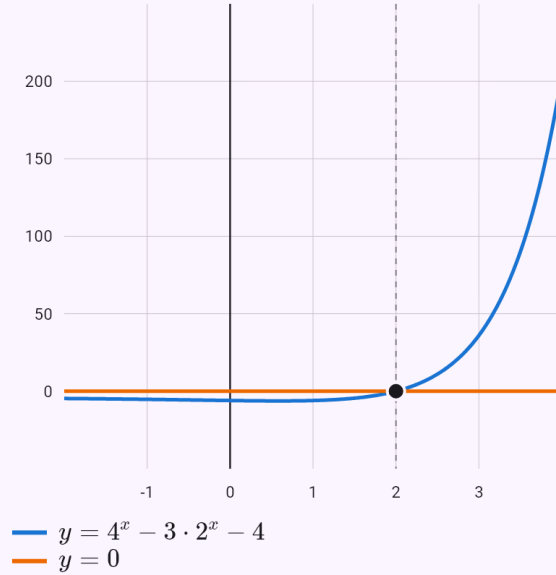
Ergebnis

$$x = 2$$

Lösungsweg

- Wir substituieren $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- Die Gleichung $2^x = -1$ hat keine reelle Lösung.
- Rücksubstitution: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Graph



Schnittpunkte der Graphen:

- $(2|0)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Logarithmen zusammenfassen, Definitionsmenge.

Eingabe: $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

Ergebnis

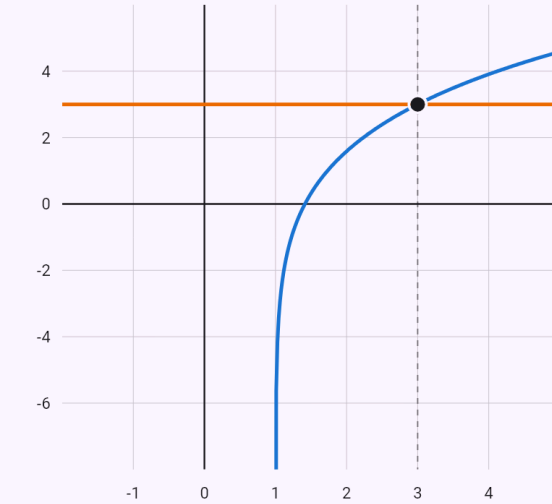
$$x = 3$$

Bedingungen: $x > 1$

Lösungsweg

- Definitionsbereich – Bedingungen:
 $x > -1, x > 1 \Rightarrow x > 1$
- Mit den Logarithmengesetzen fassen wir die Logarithmen zusammen: $\log_2((x-1)(x+1)) = 3$
- Wir entlogarithmieren: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 9 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 6}{2}$$
- Die Lösung $x = -3$ erfüllt die Bedingung $x > 1$ nicht und ist daher keine Lösung.
- Die Lösung $x = 3$ erfüllt die Bedingungen.

Graph



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
 $y = 3$

Schnittpunkte der Graphen:

• $(3|3)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Verschiedene Basen – durch 4^d teilen, $t = (5/2)^d$ substituieren.

Eingabe: $25^d + 10^d = 4^d$

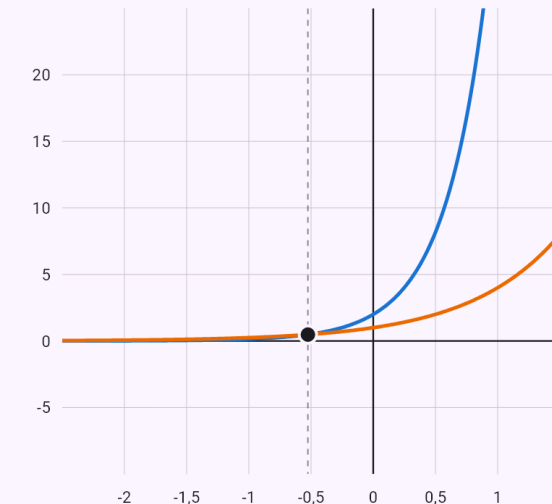
Ergebnis

$$d = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Lösungsweg

- Wir teilen die Gleichung durch den positiven Ausdruck 4^d :
 $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^d = 1$
- Wir substituieren $t = \left(\frac{5}{2}\right)^d$: $t^2 + t - 1 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
- Die Gleichung $\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ hat keine reelle Lösung.
- Rücksubstitution
$$\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Graph



$y = 25^d + 10^d$
 $y = 4^d$

Schnittpunkte der Graphen:

• $\left(\log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \mid 0,4829 \right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von d.

Basis kleiner als 1 – das Ungleichheitszeichen dreht sich um.

Eingabe: $(1/2)^x > 8$

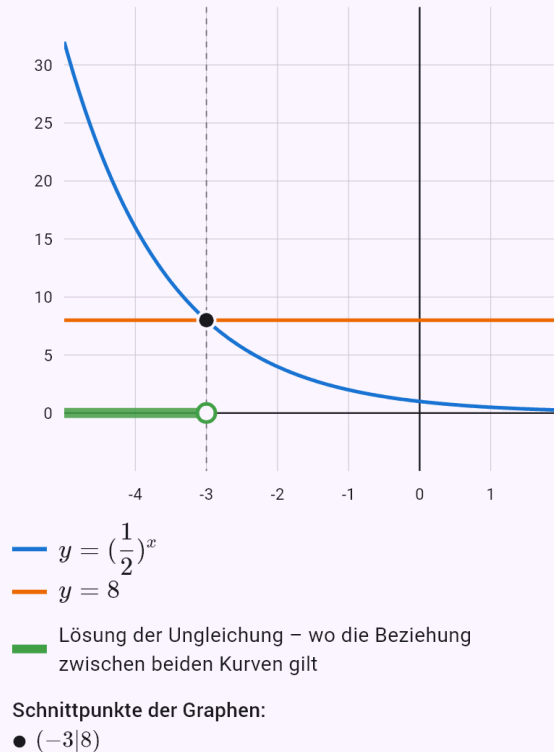
Ergebnis

$$x \in (-\infty; -3)$$

Lösungsweg

- Wir schreiben beide Seiten als Potenzen mit derselben Basis: $2^{-x} > 2^3$
- Die Exponentialfunktion zur Basis 2 ist streng monoton steigend – für die Exponenten gilt die Ungleichung mit demselben Zeichen: $-x > 3$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $-x > 3$
- Durch die negative Zahl -1 dividieren, das Ungleichheitszeichen dreht sich um: $x < -3$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in (-\infty; -3)$

Graph



Tangens hyperbolicus nach der Definition – Substitution $t = e^{2x}$.

Eingabe: $\tanh x = 1/2$

Ergebnis

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Lösungsweg

- Wir setzen die Definitionen ein

$$\tanh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Wir substituieren $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$

- Lösen: $t = 3$

- Rücksubstitution: $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

Unbekannte in der Basis – nach der Definition; die Lösung -1 erfüllt die Bedingungen nicht.

Eingabe: $\log_x (2x+3) = 2$

Ergebnis

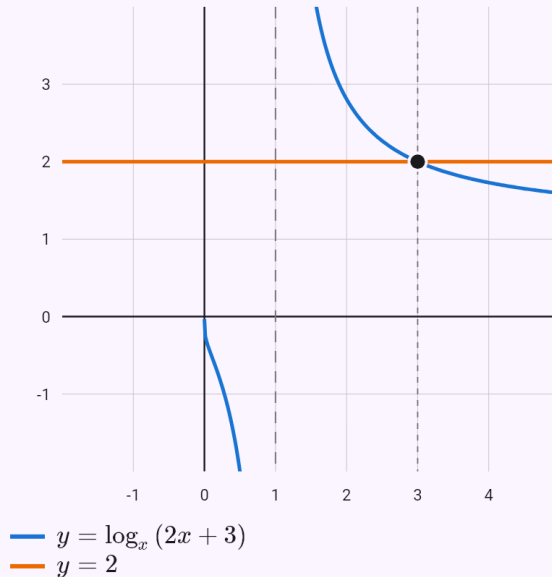
$$x = 3$$

Bedingungen: $x > 0, x \neq 1$

Lösungsweg

- Definitionsbereich – Bedingungen: $x > 0, x \neq 1$
- Wir entlogarithmieren: $x^2 = 2x + 3$
- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
- Die Lösung $x = -1$ erfüllt die Bedingung $x > 0, x \neq 1$ nicht und ist daher keine Lösung.
- Die Lösung $x = 3$ erfüllt die Bedingungen.

Graph



Schnittpunkte der Graphen:

• $(3|2)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Unbekannte in Basis und Exponent – logarithmieren, Substitution $t = \log x$.

Eingabe: $x^{(\log x)} = 100$

Ergebnis

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

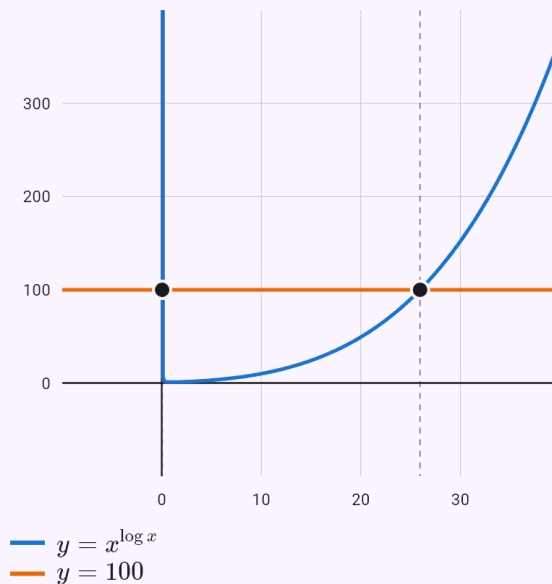
$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Bedingungen: $x > 0$

Lösungsweg

- Wir logarithmieren beide Seiten:
 $\log(x^{\log x}) = 2 \Rightarrow \log x \cdot \log x = 2$
- Definitionsbereich – Bedingungen: $x > 0$
- Wir substituieren $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- In die Lösungsformel einsetzen:
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$$
- Rücksubstitution: $\log x = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Rücksubstitution: $\log x = \sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{\sqrt{2}}$
- Die Lösung $x = 10^{-\sqrt{2}}$ erfüllt die Bedingungen.
- Die Lösung $x = 10^{\sqrt{2}}$ erfüllt die Bedingungen.

Graph



Schnittpunkte der Graphen:

• $(10^{-\sqrt{2}}|100)$ • $(10^{\sqrt{2}}|100)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Bekannte Einschränkungen

- Logarithmen verschiedener Basen, die keine Potenzen einer Zahl sind ($\log_2 x + \log_3(x + 1) = 2$), werden nur numerisch gelöst.
- Hyperbolische Gleichungen, die auf eine Gleichung 4. Grades in e^x führen ($\cosh^2 x - 3 \sinh x = 3$), werden nur numerisch gelöst; Ungleichungen mit Areafunktionen werden noch nicht unterstützt.

Betrag

Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen löst die App auf zwei Arten, die Sie mit einem Chip wählen: „Nach Definition“ – kurz durch Ausschreiben von $|a| = b$ oder $|a| < b$ – und „Nullstellen“ – durch Aufteilen der Zahlengeraden in Intervalle, auf denen jeder Betrag ein festes Vorzeichen hat. Ohne Auswahl wählt sie den passenderen Weg selbst.

Verschachtelte Beträge ($||x| - 2| = 1$) löst sie genauso: nach Definition schrittweise von außen nach innen, mit Nullstellen von innen nach außen – zuerst die Nullstellen der inneren Beträge, dann auf jedem Intervall den verbleibenden Betrag.

Eine Ungleichung $|f| < |g|$ (auf jeder Seite nur ein Betrag) lässt sich auch mit dem Chip „Durch Quadrieren“ lösen: Beide Seiten sind nicht negativ, sie wird also quadriert und als quadratische gelöst. Ein Ausdruck mit Beträgen allein ($|x - 1| + |x + 2|$) wird stückweise vereinfacht – Nullstellen, Vorzeichentabelle und auf jedem Intervall der Ausdruck ohne Beträge.

Beispiele

Ein Betrag – Ausschreiben nach Definition.

Eingabe: $|2x - 1| = 5$

Ergebnis

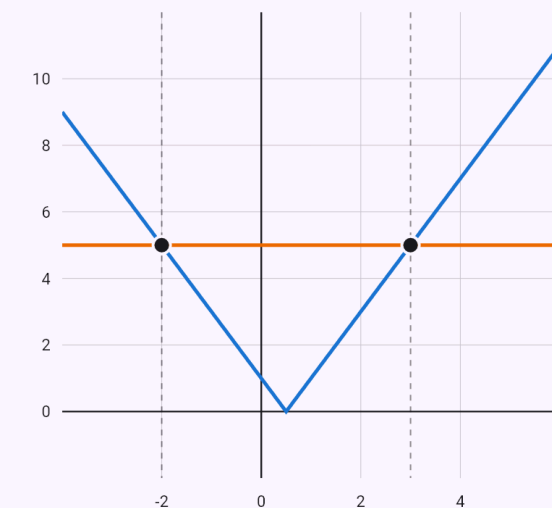
$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3$$

Lösungsweg

- Es gibt nur einen Betrag und auf der anderen Seite eine Zahl – es genügt, die Definition anzuwenden.
- Nach der Definition gilt $|2x - 1| = 5$ genau dann, wenn $2x - 1 = 5$ oder $2x - 1 = -5$
- Lösen: $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Lösen: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Graph



$$y = |2x - 1|$$

$$y = 5$$

Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet (-2|5) \quad \bullet (3|5)$$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Zwei Beträge – Fallunterscheidung an den Nullstellen.

Eingabe: $|x - 1| + |x + 2| < 5$

Ergebnis

$$x \in (-3; 2)$$

Lösungsweg

- Wir lösen die Beträge mit der Nullstellenmethode auf: Die Nullstellen teilen die Zahlengerade in Intervalle, auf jedem haben die Ausdrücke in den Beträgen ein festes Vorzeichen.

- Nullstellen der Ausdrücke in den Beträgen:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

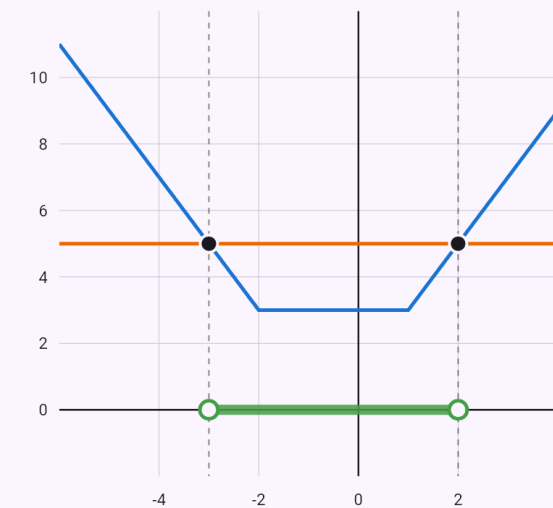
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty; -2)$	$[-2; 1)$	$[1; \infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

- Auf dem Intervall $(-\infty; -2)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$
- Lösen: $-2x - 1 < 5$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $-2x < 6$
- Durch die negative Zahl -2 dividieren, das Ungleichheitszeichen dreht sich um: $x > -3$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in (-3; \infty)$
- Schnitt mit dem Intervall $(-\infty; -2)$: $x \in (-3; -2)$

- Auf dem Intervall $[-2; 1)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (x + 2) < 5$
- Die Unbekannte fällt weg, übrig bleibt die wahre Aussage $3 < 5$ – das ganze Intervall $[-2; 1)$ ist Lösung.
- Auf dem Intervall $[1; \infty)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(x - 1) + (x + 2) < 5$
- Lösen: $2x + 1 < 5$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $2x < 4$
- Durch die positive Zahl 2 dividieren, das Ungleichheitszeichen bleibt: $x < 2$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in (-\infty; 2)$
- Schnitt mit dem Intervall $[1; \infty)$: $x \in [1; 2)$
- Die Lösung ist die Vereinigung der Ergebnisse: $x \in (-3; 2)$

Graph



$$\text{— } y = |x - 1| + |x + 2|$$

$$\text{— } y = 5$$

— Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet (-3|5) \quad \bullet (2|5)$$

Verschachtelter Betrag – nach Definition von außen nach innen.

Eingabe: $||x| - 2| = 1$

Ergebnis

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -1$$

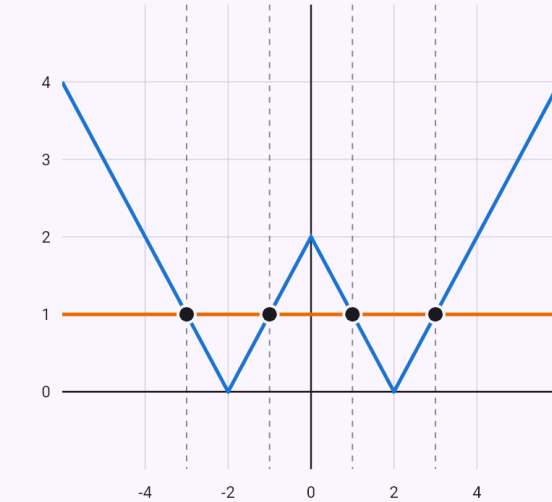
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 3$$

Lösungsweg

- Es gibt nur einen Betrag und auf der anderen Seite eine Zahl – es genügt, die Definition anzuwenden.
- Nach der Definition gilt $||x| - 2| = 1$ genau dann, wenn $|x| - 2 = 1$ oder $|x| - 2 = -1$
- Wir isolieren den Betrag: $|x| = 3$
- Nach der Definition gilt $|x| = 3$ genau dann, wenn $x = 3$ oder $x = -3$
- Wir isolieren den Betrag: $|x| = 1$
- Nach der Definition gilt $|x| = 1$ genau dann, wenn $x = 1$ oder $x = -1$

Graph



$y = ||x| - 2|$
 $y = 1$

Schnittpunkte der Graphen:

$\bullet (-3|1)$ $\bullet (-1|1)$ $\bullet (1|1)$ $\bullet (3|1)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Beträge auf beiden Seiten – Quadrieren.

Eingabe: $|x - 1| < |2x + 3|$

Durch Quadrieren

Ergebnis

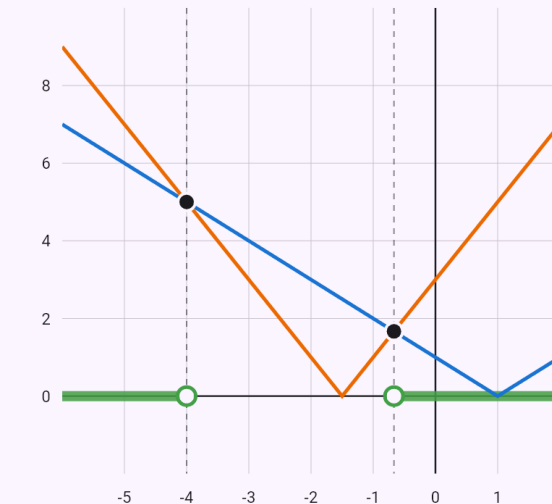
$$x \in (-\infty; -4) \cup \left(-\frac{2}{3}; \infty\right)$$

Lösungsweg

- Auf beiden Seiten steht nur ein Betrag – beide Seiten sind nicht negativ, daher dürfen wir die Ungleichung quadrieren (eine Äquivalenzumformung).
- Beide Seiten quadrieren: $(x - 1)^2 < (2x + 3)^2$
- Alles auf eine Seite bringen: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Faktorisieren: $-(x + 4)(3x + 2) < 0$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{2}{3}$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty; -4)$	$(-4; -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}; \infty)$
-1	–	–	–
$x + 4$	–	+	+
$3x + 2$	–	–	+
$-(x + 4)(3x + 2)$	–	+	–

Graph



$y = |x - 1|$
 $y = |2x + 3|$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

$\bullet (-4|5)$ $\bullet \left(-\frac{2}{3}|\frac{5}{3}\right)$

Ausdruck mit Beträgen – stückweise auf den Intervallen.

Eingabe: $|x - 1| + |x + 2|$

Ergebnis

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty; -2) \\ 3, & x \in [-2; 1) \\ 2x + 1, & x \in [1; \infty) \end{cases}$$

Lösungsweg

- Wir lösen die Beträge mit der Nullstellenmethode auf:
Die Nullstellen teilen die Zahlengerade in Intervalle, auf jedem haben die Ausdrücke in den Beträgen ein festes Vorzeichen.

- Nullstellen der Ausdrücke in den Beträgen:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty; -2)$	$[-2; 1)$	$[1; \infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

- Auf dem Intervall $(-\infty; -2)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- Auf dem Intervall $[-2; 1)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Auf dem Intervall $[1; \infty)$ lösen wir die Beträge nach den Vorzeichen auf: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Bekannte Einschränkungen

- Ein Ausdruck mit Beträgen wird nur auf der ganzen Zahlengeraden vereinfacht, nicht auf einem vorgegebenen Intervall; Quadrieren wird nur bei einer Ungleichung mit genau einem Betrag auf jeder Seite angeboten.

Trigonometrische Gleichungen und Ungleichungen

Die App führt eine Gleichung auf Grundgleichungen wie $\sin x = a$ zurück und löst sie am Einheitskreis: Sie findet die Winkel einer Umdrehung und addiert Vielfache der Periode ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Der Kreis ist direkt im Lösungsweg gezeichnet.

Bevorzugt werden die bekannten Formeln – doppelter und halber Winkel, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, Summe in Produkt –, dann Ausklammern, die Substitution $t = \sin x$, das Dividieren einer homogenen Gleichung durch $\cos^n x$ und der Hilfswinkel bei $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Das Ergebnis wird zusätzlich numerisch über eine ganze Periode geprüft.

Eine Unbekannte mit lateinischem Buchstaben (x , t) ist im Bogenmaß, mit griechischem (α , β , ...) in Grad – ebenso eine Eingabe mit dem Zeichen $^\circ$ ($\sin(x + 30^\circ)$). Die Lösungen in einem Intervall erhalten Sie, wenn Sie das Intervall nach einem Komma oder in die nächste Zeile schreiben.

Eine Ungleichung wird über einen Bogen des Einheitskreises gelöst, eine kompliziertere über die Nullstellen auf einer Periode; das Ergebnis sind Intervalle mit der Periode.

Beispiele

Zwei Lösungswege, die Winkel am Einheitskreis.

Eingabe: $\sin x = 1/2$

Ergebnis

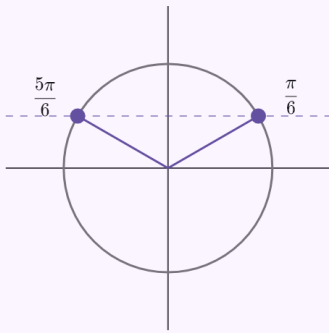
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

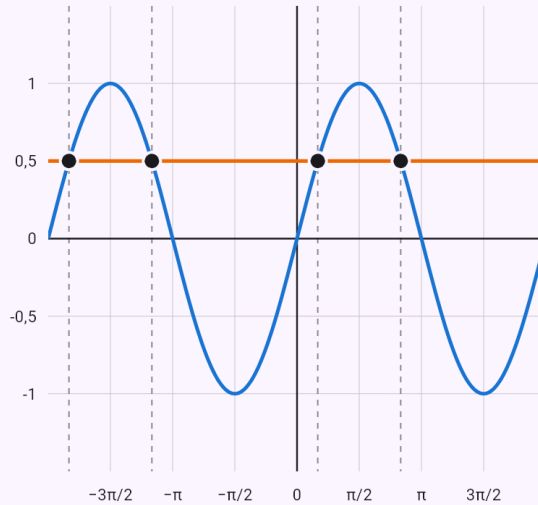
$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

- Grundgleichung $\sin x = \frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode:
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graph



— $y = \sin x$
— $y = \frac{1}{2}$

Schnittpunkte der Graphen:

• $\left(-\frac{11\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$ • $\left(-\frac{7\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$ • $\left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$
• $\left(\frac{5\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x.

Die Substitution $t = \sin x$ und eine quadratische Gleichung.

Eingabe: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

Ergebnis

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

- Wir substituieren $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$

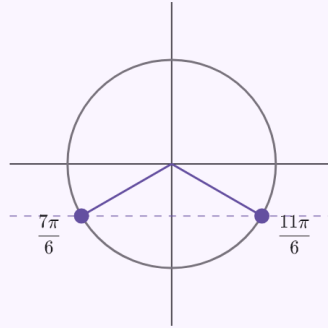
- Die Diskriminante berechnen:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

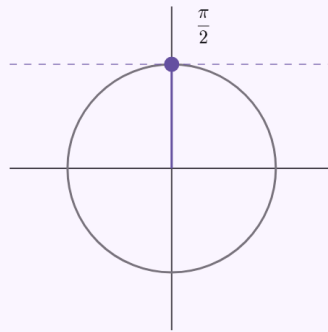
- In die Lösungsformel einsetzen:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

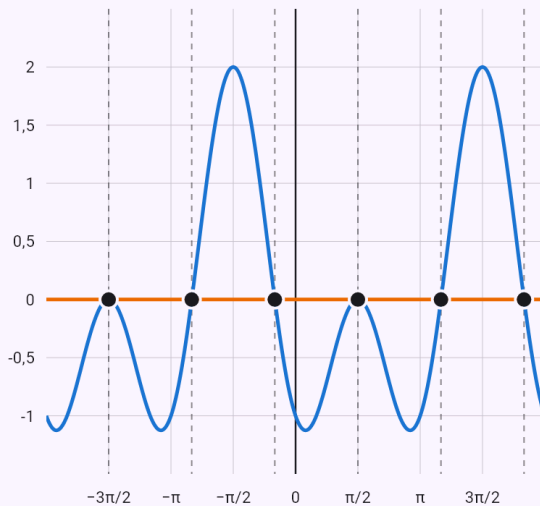
- Grundgleichung $\sin x = -\frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



- Grundgleichung $\sin x = 1$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{2}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Graph



— $y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
 — $y = 0$

Schnittpunkte der Graphen:

• $\left(-\frac{3\pi}{2} | 0\right)$ • $\left(-\frac{5\pi}{6} | 0\right)$ • $\left(-\frac{\pi}{6} | 0\right)$ • $\left(\frac{\pi}{2} | 0\right)$
 • $\left(\frac{7\pi}{6} | 0\right)$ • $\left(\frac{11\pi}{6} | 0\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Die Formel für $\sin 2x$ und die Zerlegung in ein Produkt.

Eingabe: $\sin 2x = \cos x$

Ergebnis

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

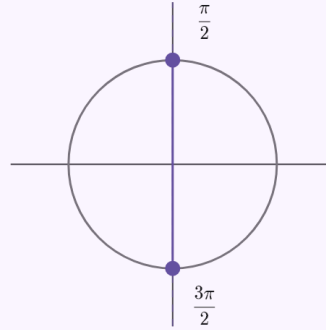
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

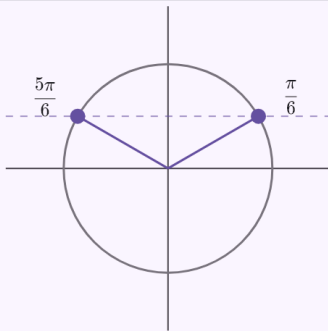
$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

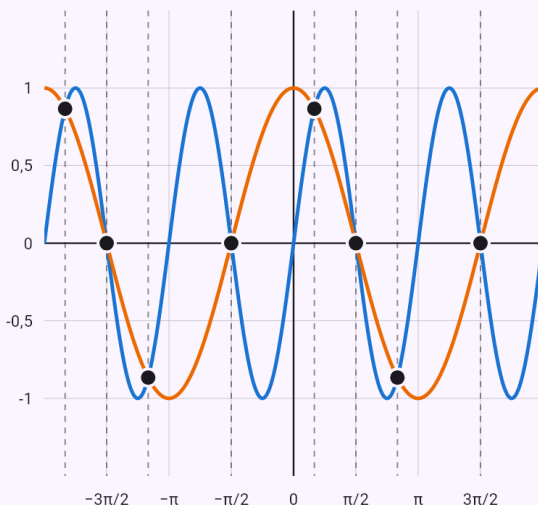
- Alles auf eine Seite bringen: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Wir verwenden die Formel $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:
 $2 \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Wir zerlegen in ein Produkt – ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist:
 $(2 \sin x - 1) \cos x = 0$
- Wir lösen die Gleichung $\cos x = 0$
- Grundgleichung $\cos x = 0$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode:
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Wir lösen die Gleichung $2 \sin x - 1 = 0$
- Wir isolieren die Winkelfunktion: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Grundgleichung $\sin x = \frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode:
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graph



— $y = \sin 2x$
— $y = \cos x$

Schnittpunkte der Graphen:

- $\left(-\frac{11\pi}{6} \mid \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ • $\left(-\frac{3\pi}{2} \mid 0\right)$ • $\left(-\frac{7\pi}{6} \mid -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{2} \mid 0\right)$ • $\left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ • $\left(\frac{\pi}{2} \mid 0\right)$ • $\left(\frac{5\pi}{6} \mid -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\left(\frac{3\pi}{2} \mid 0\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Der Hilfsinkel: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \pi/4)$.

Eingabe: $\sin x + \cos x = 1$

Ergebnis

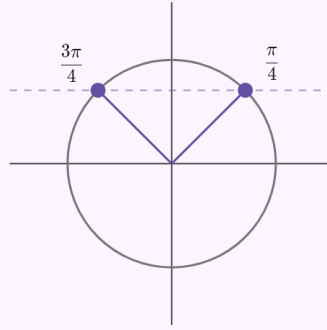
$$x_1 = 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

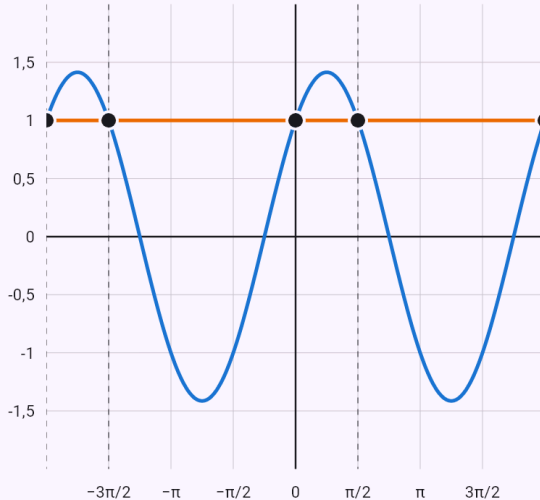
- Alles auf eine Seite bringen: $\cos x + \sin x - 1 = 0$
- Wir führen einen Hilfsinkel φ ein:
 $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, wobei
 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Wir isolieren die Winkelfunktion: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Grundgleichung $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



- Wir lösen nach der Unbekannten auf

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Graph



— $y = \sin x + \cos x$
 — $y = 1$

Schnittpunkte der Graphen:

- $(-2\pi|1)$ • $\left(-\frac{3\pi}{2}|1\right)$ • $(0|1)$ • $\left(\frac{\pi}{2}|1\right)$
- $(2\pi|1)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Ein griechischer Buchstabe – das Ergebnis in Grad.

Eingabe: $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$

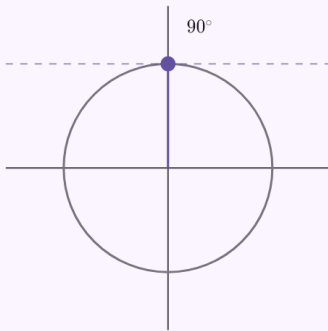
Ergebnis

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

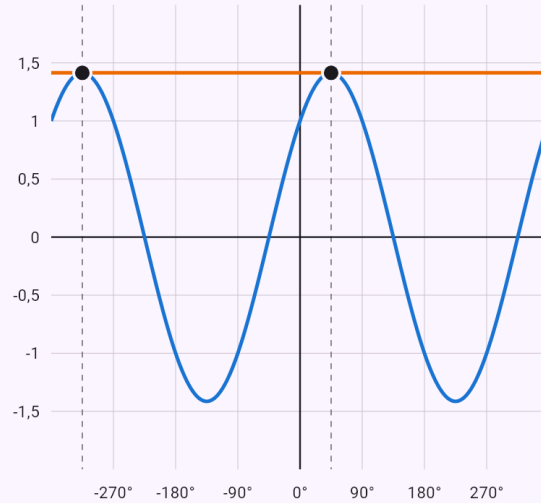
- Alles auf eine Seite bringen: $\cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{2} = 0$
- Wir führen einen Hilfswinkel φ ein:
 $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$, wobei
 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Wir isolieren die Winkelfunktion: $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Grundgleichung $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel 90° ; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Wir lösen nach der Unbekannten auf

$$\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Graph



$$y = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{2}$$

Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet (-315^\circ | \sqrt{2}) \quad \bullet (45^\circ | \sqrt{2})$$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Nur die Lösungen im angegebenen Intervall.

Eingabe: $\sin x = 1/2$, $x \in [0; 4\pi)$

Ergebnis

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

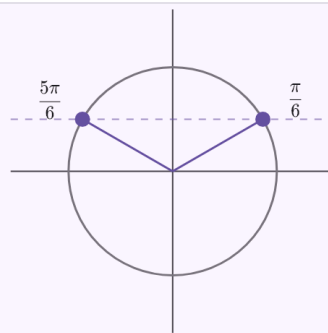
$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$

$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

Lösungsweg

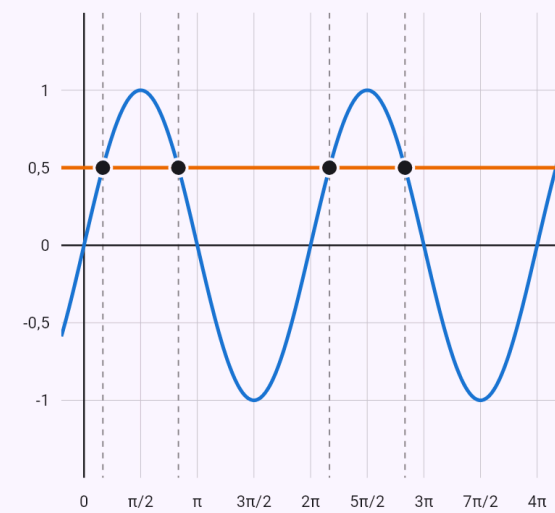
- Grundgleichung $\sin x = \frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode:
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



- Die Lösungen im Intervall $x \in [0; 4\pi)$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{13\pi}{6}, x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

Graph



— $y = \sin x$

— $y = \frac{1}{2}$

Schnittpunkte der Graphen:

• $\left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$ • $\left(\frac{5\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$ • $\left(\frac{13\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$ • $\left(\frac{17\pi}{6} \mid \frac{1}{2}\right)$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung der Gleichung – seine erste Koordinate ist der Wert von x .

Ein Bogen des Einheitskreises, ein Intervall um null.

Eingabe: $\cos x > \frac{1}{2}$

Ergebnis

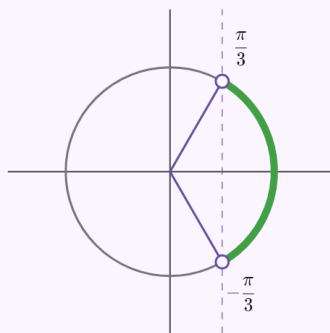
$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

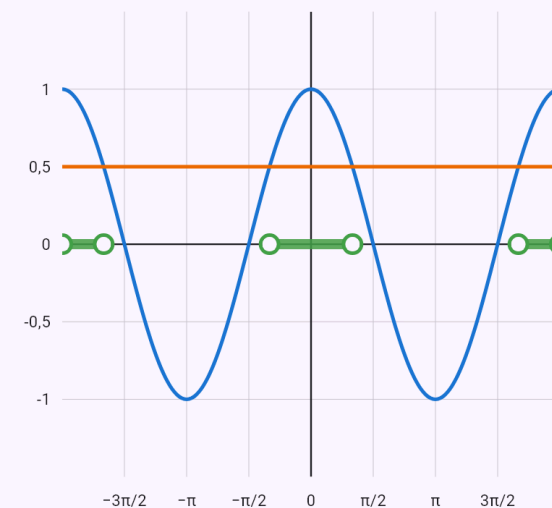
Lösungsweg

- Grundungleichung $\cos x > \frac{1}{2}$: Am Einheitskreis gilt sie auf dem markierten Bogen; mit der Periode:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$



Graph



— $y = \cos x$

— $y = \frac{1}{2}$

— Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Die Nullstellen auf einer Periode und das Vorzeichen dazwischen.

Eingabe: $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$

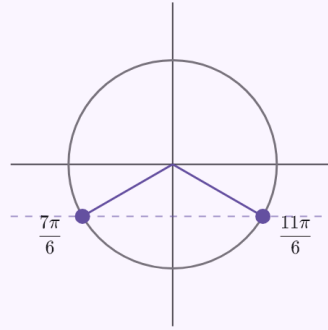
Ergebnis

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$$

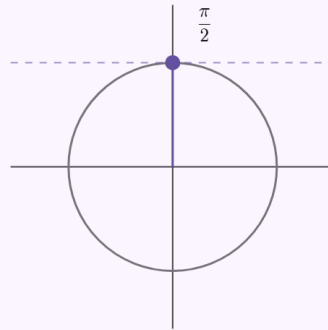
$$k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsweg

- Zuerst lösen wir die Gleichung
 $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Wir substituieren $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- In die Lösungsformel einsetzen:
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Grundgleichung $\sin x = -\frac{1}{2}$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



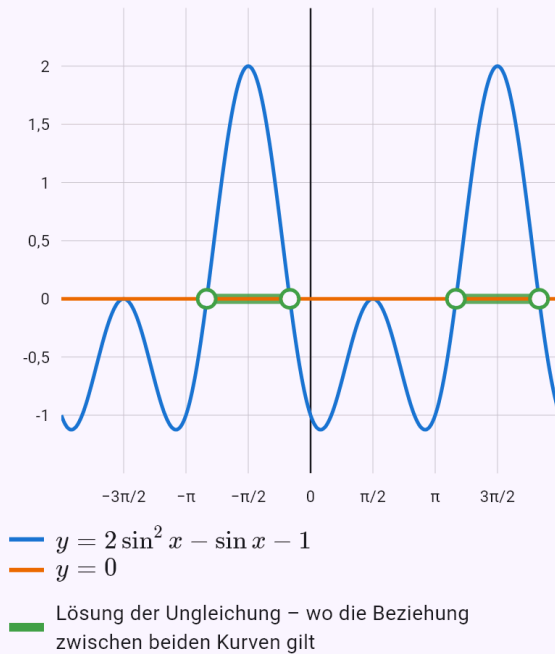
- Grundgleichung $\sin x = 1$: Am Einheitskreis erfüllen sie in einer Umdrehung die Winkel $\frac{\pi}{2}$; alle Lösungen erhält man durch Addition von Vielfachen der Periode:
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- Die Funktion hat die Periode 2π . Ihre Nullstellen (und die Stellen, an denen sie nicht definiert ist) $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ zerlegen eine Periode in Intervalle; nach dem Vorzeichen darauf gilt die Ungleichung für:

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right)$$

Graph



Bekannte Einschränkungen

- Gleichungen, in denen die Unbekannte auch außerhalb einer Winkelfunktion steht ($x = \cos x$), werden nur numerisch und ohne Periode gelöst.
- Doppelte trigonometrische Ungleichungen ($-1/2 < \sin x < 1/2$) und Winkelfunktionen im Betrag werden noch nicht unterstützt.

Ungleichungen und Ungleichungssysteme

Quadratische und Bruchungleichungen löst die App mit den Nullstellen und einer Vorzeichentabelle. Eine Doppelungleichung und ein Ungleichungssystem löst sie als Schnittmenge der Lösungen der einzelnen Ungleichungen, die sie auf der Zahlengeraden zeigt. Ein Ungleichungssystem mit zwei Unbekannten löst sie als Bereich in der Ebene und färbt ihn im Graphen ein.

Bei einem Ungleichungssystem mit zwei Unbekannten gibt die App auch die Ecken des Bereichs an – die Schnittpunkte der Grenzen mit exakten Koordinaten. Ein System aus einer Gleichung und Ungleichungen mit einer Unbekannten wird gelöst, indem die Gleichung gelöst und ihre Lösungen in die Ungleichungen eingesetzt werden; mit zwei Unbekannten ist die Lösung der Teil der Kurve der Gleichung, der im Bereich der Ungleichungen liegt – im Graphen hervorgehoben, seine Endpunkte exakt berechnet. Ein System lässt sich auch in eine Zeile schreiben, durch Semikolons getrennt ($2^x > 4$; $3^x < 81$).

Beispiele

Eine quadratische Ungleichung – Nullstellen und Vorzeichen.

Eingabe: $x^2 - x - 6 > 0$

Ergebnis

$$x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$$

Lösungsweg

- Faktorisieren: $(x - 3)(x + 2) > 0$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 3)$	$(3; \infty)$
$x - 3$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$(x - 3)(x + 2)$	+	-	+

Graph



$$y = x^2 - x - 6$$

$$y = 0$$

Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet (-2|0) \quad \bullet (3|0)$$

Eine Bruchungleichung – der Nenner darf nicht null sein.

Eingabe: $(x+1)/(x-3) \leq 0$

Ergebnis

$$x \in [-1; 3)$$

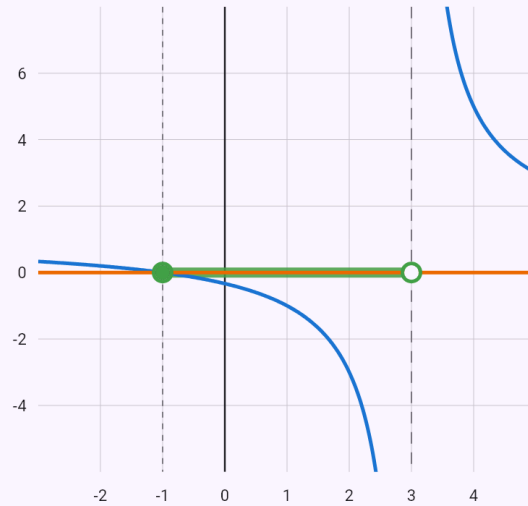
Bedingungen: $x \neq 3$

Lösungsweg

- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $x \neq 3$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 3)$	$(3; \infty)$
$x - 3$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$\frac{x+1}{x-3}$	+	-	+

Graph



$$y = \frac{x+1}{x-3}$$
$$y = 0$$

— Lösung der Ungleichung – wo die Beziehung zwischen beiden Kurven gilt

Schnittpunkte der Graphen:

• $(-1|0)$

Eine Doppelungleichung.

Eingabe: $-1 \leq 2x + 1 < 5$

Ergebnis

$$x \in [-1; 2)$$

Lösungsweg

- 1. Ungleichung: $-1 \leq 2x + 1$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $-2x \leq 2$
- Durch die negative Zahl -2 dividieren, das Ungleichheitszeichen dreht sich um: $x \geq -1$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in [-1; \infty)$
- 2. Ungleichung: $2x + 1 < 5$
- Terme mit der Unbekannten links lassen, den Rest nach rechts bringen: $2x < 4$
- Durch die positive Zahl 2 dividieren, das Ungleichheitszeichen bleibt: $x < 2$
- Die Lösung dieser Ungleichung ist $x \in (-\infty; 2)$
- Die Lösung des Systems ist der Durchschnitt der Lösungen der einzelnen Ungleichungen: $x \in [-1; 2)$

Graph



Lösung des Systems (Schnittmenge)



Jede Ungleichung hat ihre eigene Zeile auf der Zahlengeraden, ihre Schnittmenge ist grün. Ein ausgefüllter Punkt gehört zur Lösung, ein leerer nicht.

Ungleichungssystem mit zwei Unbekannten – ein Bereich in der Ebene und seine Ecken.

Eingabe: $x + y \leq 4$

$x - y \geq 0$

$$y \geq 0$$

Ergebnis

$$y \leq 4 - x$$

$$y \leq x$$

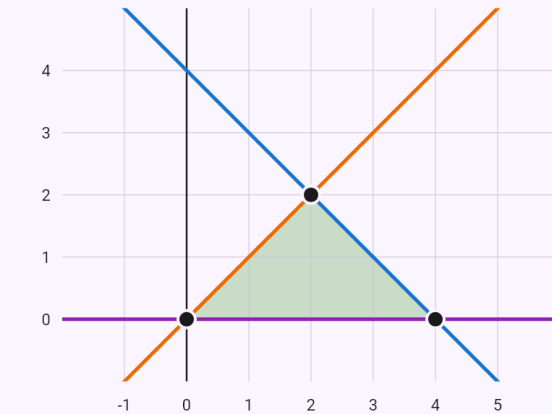
$$y \in [0; \infty)$$

Lösungsweg

- 1. Ungleichung: $x + y \leq 4$
- Die Grenze ist die Kurve $x + y = 4$ – durchgezogen, ihre Punkte gehören zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[0; 0]$ ein: $0 \leq 4$ gilt – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt liegt.
- 2. Ungleichung: $x - y \geq 0$
- Die Grenze ist die Kurve $x - y = 0$ – durchgezogen, ihre Punkte gehören zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[1; 0]$ ein: $1 \geq 0$ gilt – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt liegt.
- 3. Ungleichung: $y \geq 0$
- Die Grenze ist die Kurve $y = 0$ – durchgezogen, ihre Punkte gehören zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[0; 1]$ ein: $1 \geq 0$ gilt – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt liegt.
- Die Lösung des Systems ist der gemeinsame Teil dieser Gebiete – im Graphen eingefärbt.

- Ecken des Bereichs (Schnittpunkte der Grenzen):
 $[0; 0]$, $[2; 2]$, $[4; 0]$

Graph



$$\text{blue line } x + y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 4 - x$$

$$\text{orange line } x - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x$$

$$\text{purple line } y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0; \infty)$$

Die Lösung ist das eingefärbte Gebiet. Eine durchgezogene Grenze gehört dazu, eine gestrichelte nicht.

Ecken des Bereichs:

$$\bullet (0|0) \quad \bullet (2|2) \quad \bullet (4|0)$$

Eine Ungleichung in den ganzen Zahlen – die ganzen Zahlen des Intervalls werden aufgezählt.

Eingabe: $x^2 < 10$

Ergebnis

$$x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

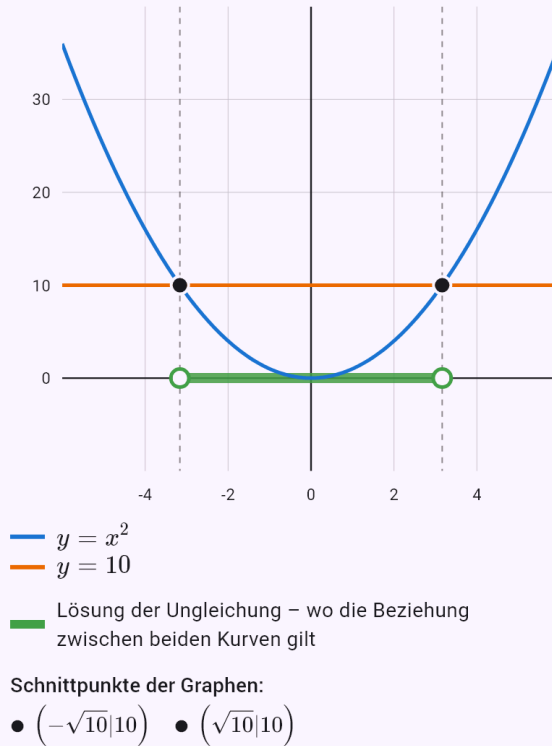
Lösungsweg

- Alles auf eine Seite bringen: $x^2 - 10 < 0$
- Die kritischen Stellen teilen die Zahlengerade in Intervalle: $x_1 = -\sqrt{10}$, $x_2 = \sqrt{10}$
- Vorzeichen auf den einzelnen Intervallen:

$x^2 - 10$	$ $	$(-\infty; -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10}; \sqrt{10})$	$(\sqrt{10}; \infty)$
		+	-	+

- In den reellen Zahlen $x \in (-\sqrt{10}; \sqrt{10})$; in $\mathbb{Z}$:
 $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

Graph



Gleichung und Ungleichung – die Lösungen der Gleichung in die Ungleichung eingesetzt.

Eingabe: $x^2 - x - 6 = 0$

$x > 0$

Ergebnis

$$x = 3$$

Lösungsweg

- Zuerst lösen wir die Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$, dann setzen wir ihre Lösungen in die Ungleichungen ein.
- Die Diskriminante berechnen:
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
- In die Lösungsformel einsetzen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
- Die Lösung $x = -2$ erfüllt die Bedingung $x > 0$ nicht und ist daher keine Lösung.
- Die Lösung $x = 3$ erfüllt die Bedingungen.

Kreis und Halbebene – die Lösung ist ein Bogen, seine Endpunkte gehören nicht dazu.

Eingabe: $x^2 + y^2 = 4$

$$y > x$$

Ergebnis

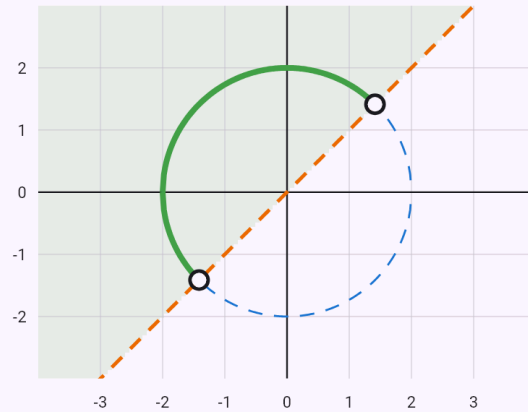
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y > x$$

Lösungsweg

- Die Lösung sind die Punkte der Kurve $x^2 + y^2 = 4$, die im durch die Ungleichungen gegebenen Bereich liegen. Zuerst bestimmen wir diesen Bereich:
- Die Grenze ist die Kurve $y = x$ – gestrichelt, ihre Punkte gehören nicht zur Lösung.
- Wir setzen den Punkt $[1; 0]$ ein: $0 > 1$ gilt nicht – die Lösung ist der Teil der Ebene, in dem der Punkt nicht liegt.
- Endpunkte des Kurvenstücks:
 $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ – auf einer gestrichelten Grenze, sie gehören nicht zur Lösung.

Graph



$$\text{--- } x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{--- } y > x$$

Die Lösung ist der grün hervorgehobene Teil der Kurve – der Teil im schattierten Bereich. Ein ausgefüllter Endpunkt gehört zur Lösung, ein leerer nicht.

Endpunkte:

$$\circ (-\sqrt{2} | -\sqrt{2}) \quad \circ (\sqrt{2} | \sqrt{2})$$

Bekannte Einschränkungen

- Ein System mit zwei oder mehr Gleichungen zusammen mit Ungleichungen wird noch nicht gelöst; Dezimalzahlen mit Punkt schreiben ($x > 2.5$).

Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten löst die App mit dem Additions- oder dem Einsetzungsverfahren, größere Systeme mit dem Gauß-Verfahren – auch in Matrixschreibweise. Das Verfahren wählen Sie mit einem Chip. Ein System aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bekommt auch einen Graphen, in dem die Lösungen die Schnittpunkte der Geraden oder Kurven sind.

Ein nichtlineares System (etwa Kreis und Gerade) löst und zeichnet die App, vorerst ohne Lösungsweg.

Beispiele

Das Additionsverfahren.

Eingabe: $2x + 3y = 7$

$x - y = 1$

Additionsverfahren

Ergebnis

$$x = 2$$

$$y = 1$$

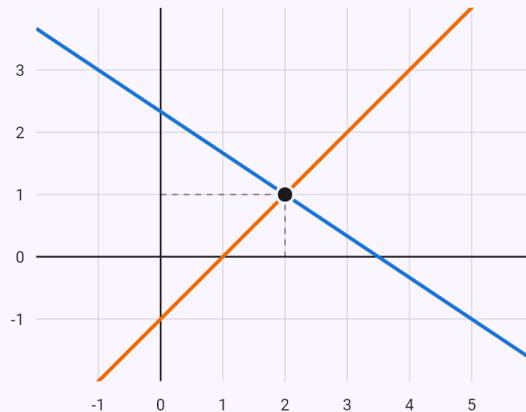
Lösungsweg

- Die erste Gleichung mit 1 und die zweite mit -2 multiplizieren, damit x beim Addieren wegfällt

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- Gleichungen addieren, x fällt weg: $5y = 5$
- Lösen: $5y = 5 \Rightarrow y = 1$
- In Gleichung 2 einsetzen: $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Graph



$$\text{--- } 2x + 3y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$\text{--- } x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$$

Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet (2|1)$$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung des Gleichungssystems – seine Koordinaten sind die Werte von x und y .

Drei Gleichungen – Gauß-Verfahren.

Eingabe: $x + y + z = 6$

$2x - y + z = 3$

$$x + 2y - z = 2$$

Gauß-Verfahren

Ergebnis

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

Lösungsweg

- x aus den folgenden Gleichungen eliminieren

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- y aus den folgenden Gleichungen eliminieren

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Lösen: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- In Gleichung 2 einsetzen: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- In Gleichung 1 einsetzen: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Kreis und Gerade.

Eingabe: $x^2 + y^2 = 25$

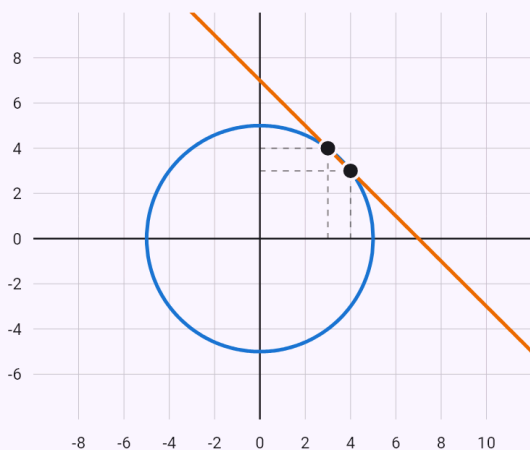
$$x + y = 7$$

Ergebnis

$$x_1 = 3, y_1 = 4$$

$$x_2 = 4, y_2 = 3$$

Graph



$$\text{— } x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{— } x + y = 7 \Leftrightarrow y = 7 - x$$

Schnittpunkte der Graphen:

$$\bullet (3|4) \quad \bullet (4|3)$$

Jeder Schnittpunkt entspricht einer Lösung des Gleichungssystems – seine Koordinaten sind die Werte von x und y .

Bekannte Einschränkungen

- Nichtlineare Systeme sind vorerst ohne Lösungsweg.

Gleichungen und Ungleichungen mit Parameter

Ein weiterer Buchstabe neben der Unbekannten ist ein Parameter – eine beliebige reelle Zahl, von der die Lösung abhängt. Die App formt die Gleichung in die Form $A \cdot x = B$ um (eine quadratische in $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$) und unterscheidet die Fälle nach den Werten des Parameters: wo der Koeffizient der Unbekannten null ist, wo die Diskriminante positiv, null oder negativ ist, wo die Bedingungen eine Lösung ausschließen und für welche Werte die Aufgabe keinen Sinn hat. Das Ergebnis fasst die Fälle zusammen.

Die Unbekannte wählt die App in der Reihenfolge x, y, z, u, v, w, t ; die anderen Buchstaben sind Parameter. Eine andere Unbekannte wählst du mit dem Chip „Unbekannte“ oder schreibst sie nach einem Komma. Der Graph zeigt alle Lösungen als Kurve (bei einer Ungleichung als Bereich) in der Ebene Parameter – Unbekannte; mit dem Schieberegler wählst du den Wert des Parameters und liest die Lösungen auf der senkrechten Geraden ab.

In einem unbestimmten Integral sind andere Buchstaben Konstanten – die App gibt an, welche nicht null sein dürfen ($\int dx/(a - bx)^3$ für $b \neq 0$).

Eingabe

$$2ax + a = 4x$$

Jeder weitere Buchstabe ist ein Parameter; die Unbekannte ist x (oder $y, z, \dots$).

$$(q+3)x = 2x + q, \text{ Unbekannte } q$$

Die Unbekannte oder den Parameter kannst du nach einem Komma angeben („ a ist Parameter“, „Unbekannte q “).

Beispiele

Lineare Gleichung – für $a = 2$ keine Lösung.

Eingabe: $2ax + a = 4x$

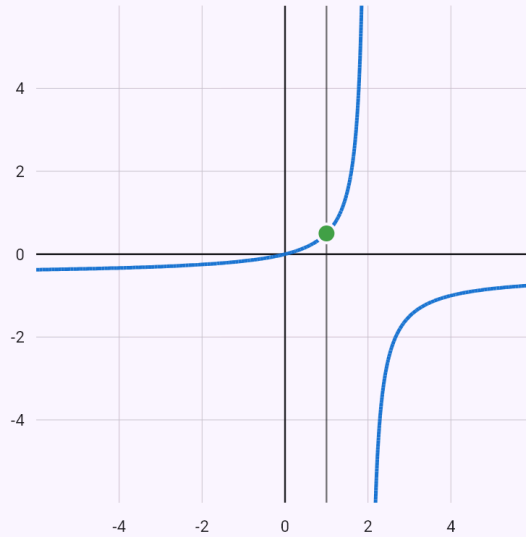
Ergebnis

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannte ist x , der Parameter a ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- In die Grundform umformen: $2(a-2)x = -a$
- Für $a \neq 2$ ist $2(a-2)$ ungleich null, wir dürfen dadurch dividieren: $x = \frac{a}{2(2-a)}$
- Für $a = 2$ ist der Koeffizient der Unbekannten null:
 $0 \cdot x = -2$, also $x \in \emptyset$

Graph



— $2xa + a = 4x$

Jeder Punkt $[a; x]$ der Kurve ist eine Lösung. Für einen gewählten Wert von a liegen die Lösungen auf der senkrechten Geraden – verschiebe sie mit dem Schieberegler.



$a = 1 : x \approx 0,5$

Quadratische Gleichung – Fallunterscheidung nach der Diskriminante.

Eingabe: $x^2 + 6x + p = 0$

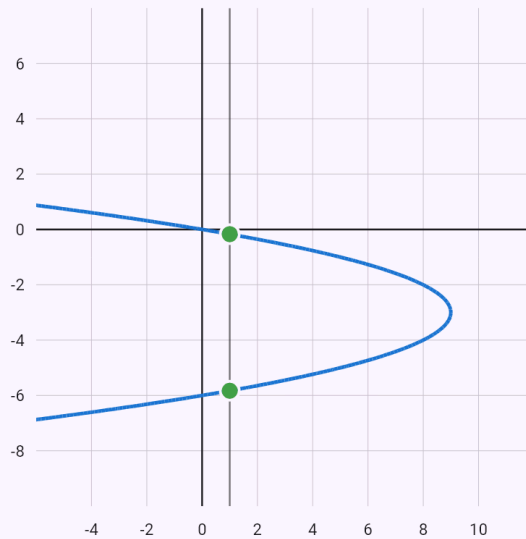
Ergebnis

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannte ist x , der Parameter p ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- In die Grundform umformen: $x^2 + 6x + p = 0$
- Die Diskriminante in Abhängigkeit vom Parameter:
 $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9 - p)$
- Für $p < 9$ ist $D > 0$, die Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - p}$
- Für $p > 9$ ist $D < 0$, die Gleichung hat keine reelle Lösung.
- Für $p = 9$ ist $D = 0$, die Gleichung hat eine doppelte Lösung: $x = -3$

Graph



$$x^2 + 6x + p = 0$$

Jeder Punkt $[p; x]$ der Kurve ist eine Lösung. Für einen gewählten Wert von p liegen die Lösungen auf der senkrechten Geraden – verschiebe sie mit dem Schieberegler.

$p = 1 : x \approx -5,83; -0,17$

Ungleichung – das Vorzeichen des Koeffizienten entscheidet über die Richtung.

Eingabe: $2x + 2p - 5 < 2px + 7$

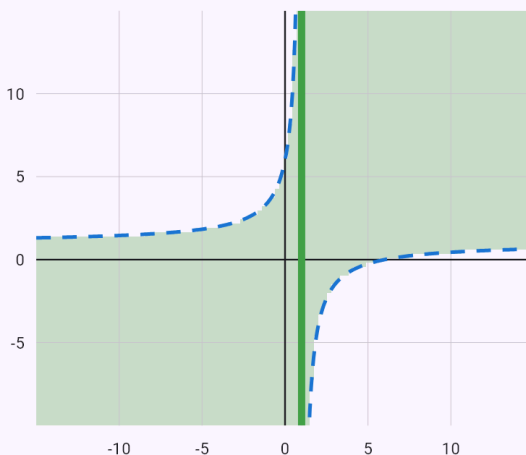
Ergebnis

$$\begin{cases} x < \frac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \frac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Lösungsweg

- Die Unbekannte ist x , der Parameter p ist eine beliebige reelle Zahl. Die Lösung hängt von seinem Wert ab, deshalb untersuchen wir die einzelnen Fälle (Fallunterscheidung).
- In die Grundform umformen: $2(1-p)x < 2(6-p)$
- Für $p < 1$ ist $2(1-p)$ positiv – beim Dividieren bleibt das Ungleichheitszeichen: $x < \frac{p-6}{p-1}$
- Für $p > 1$ ist $2(1-p)$ negativ – beim Dividieren kehrt sich das Ungleichheitszeichen um: $x > \frac{p-6}{p-1}$
- Für $p = 1$ ist der Koeffizient der Unbekannten null: $0 \cdot x < 10$, also $x \in \mathbb{R}$

Graph



$$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \frac{p-6}{p-1}$$

Der eingefärbte Bereich enthält alle Lösungen $[p; x]$. Für einen gewählten Wert von p ist der hervorgehobene Teil der senkrechten Geraden die Lösung – verschiebe sie mit dem Schieberegler.

$p = 1$

Bekannte Einschränkungen

- Bisher lineare und quadratische Gleichungen und lineare Ungleichungen; die vollständige Fallunterscheidung nach Intervallen nur mit einem Parameter, mit mehreren die allgemeinen Fälle.
- Fragen wie „für welche p hat die Gleichung eine positive Lösung“ und Gleichungssysteme mit Parameter werden noch nicht unterstützt.

Terme umformen

Einen Term ohne Gleichheitszeichen formt die App nach dem gewählten Chip um: sie vereinfacht ihn (einen Bruchterm auf den Hauptnenner gebracht und gekürzt, mit Definitionsmenge), multipliziert aus, faktorisiert (durch Ausklammern, binomische Formeln und das Horner-Schema) oder zerlegt in Partialbrüche – wie auf Papier, mit Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten. Faktorisiert wird über den ganzen Zahlen; lässt sich der Term über den reellen Zahlen weiter zerlegen (mit irrationalen Nullstellen), zeigt es der nächste Schritt. Die Wurzel aus einem Monom wird teilweise gezogen – bei einer geraden Wurzel als Betrag, wo die Basis negativ sein kann. Auch komplexe Zahlen gehen – die Division durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl.

Beispiele

Einen Bruchterm vereinfachen.

Eingabe: $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)$

Vereinfachen

Ergebnis

$$\frac{x - 1}{x + 1}$$

Bedingungen: $x \neq -1$

Lösungsweg

- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein: $x \neq -1$
- Zähler und Nenner faktorisieren: $\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2}$
- Den gemeinsamen Faktor $x + 1$ kürzen: $\frac{x - 1}{x + 1}$

Ausmultiplizieren.

Eingabe: $(x + 2)^3$

Ausmultiplizieren

Ergebnis

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Lösungsweg

- Klammern ausmultiplizieren und gleichartige Terme zusammenfassen: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Faktorisieren mit dem Horner-Schema.

Eingabe: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Faktorisieren

Ergebnis

$$(x - 3)(x - 2)(x - 1)$$

Lösungsweg

- Rationale Nullstellen können nur Teiler des Absolutglieds -6 sein: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

- Mit dem Horner-Schema bestätigen wir die Nullstelle $x = 1$ und dividieren das Polynom:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

- Durch Einsetzen sehen wir, dass diese Kandidaten keine Nullstellen sind: $P(-1) = -24 \neq 0$

- Mit dem Horner-Schema bestätigen wir die Nullstelle $x = 2$ und dividieren das Polynom:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Partialbruchzerlegung.

Eingabe: $(3x + 5)/(x^2 + x - 2)$

Partialbrüche

Ergebnis

$$\frac{8}{3(x - 1)} + \frac{1}{3(x + 2)}$$

Bedingungen: $x \neq -2, x \neq 1$

Lösungsweg

- Bedingungen – der Nenner darf nicht null sein:
 $x \neq -2, x \neq 1$

- Nenner faktorisieren: $(x - 1)(x + 2)$

- Ansatz für die Zerlegung: $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$

- Beide Seiten werden mit dem Nenner $(x - 1)(x + 2)$ multipliziert: $3x + 5 = A(x + 2) + B(x - 1)$

- Einsetzen von $x = 1$: $8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$

- Einsetzen von $x = -2$: $-1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

Teilweises Wurzelziehen mit Betrag.

Eingabe: $\sqrt[4]{8a^5 b^2}$

Vereinfachen

Ergebnis

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Lösungsweg

- Teilweise radizieren – Potenzen unter der Wurzel kommen davor (bei einer geraden Wurzel als Betrag, wo die Basis negativ sein kann): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Division komplexer Zahlen.

Eingabe: $(3+4i)/(1-2i)$

Vereinfachen

Ergebnis

$$-1 + 2i$$

Lösungsweg

- Den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners, $1 + 2i$, erweitern

$$\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

Grenzwerte

MathSolver berechnet den Grenzwert einer Funktion einer Variablen an einer Stelle, im Unendlichen und einseitige Grenzwerte und geht vor wie in der Schule: zuerst versucht er einzusetzen. Der Grenzwert einer Folge ($n \rightarrow \infty$) geht genauso – auch die Form 1^∞ oder eine Summe von Potenzen, aus der das am schnellsten wachsende Glied ausgeklammert wird.

Ergibt das Einsetzen einen unbestimmten Ausdruck ($0/0$, ∞/∞ , ...), wählt er eine Umformung nach der Form der Funktion – Faktorisieren und Kürzen, Erweitern mit dem konjugierten Term, Division durch die höchste Potenz, einen bekannten Grenzwert ($\sin x / x$) oder die Regel von L'Hospital, auch wiederholt.

Einen unendlichen Grenzwert oder einen, der nicht existiert (die einseitigen Grenzwerte unterscheiden sich), gibt er nie als Zahl aus – er sagt es in Worten und zeigt die einseitigen Grenzwerte. Zum Ergebnis gehört ein Graph der Funktion in der Nähe der Stelle mit markiertem Grenzwert.

Beim Grenzwert einer Folge zeigt der Graph die Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ statt einer stetigen Kurve.

Eingabe

$\lim(x \rightarrow 2) (x^2 - 4)/(x - 2)$	Ein eingetippter Grenzwert: nach dem Wort <code>lim</code> in Klammern die Variable, der Pfeil <code>-></code> und die Stelle, dann die Funktion.
$\lim(x \rightarrow \infty) (3x^2 + 1)/(x^2 - 5)$	Ein Grenzwert im Unendlichen: unendlich schreibt man <code>oo</code> (minus unendlich <code>-oo</code>).
$\lim(x \rightarrow 0+) 1/x$	Ein einseitiger Grenzwert: <code>+</code> (von rechts) oder <code>-</code> (von links) nach der Stelle.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	Vom Foto oder in LaTeX, wie die Kamera es erkennt.
$\lim(n \rightarrow \infty) ((n+2)/(n+1))^{(2n+3)}$	Der Grenzwert einer Folge im Unendlichen.

Beispiele

Der unbestimmte Ausdruck 0/0 – den Zähler faktorisieren und kürzen.

Eingabe: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) / (x - 2)$

Ergebnis

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Lösungsweg

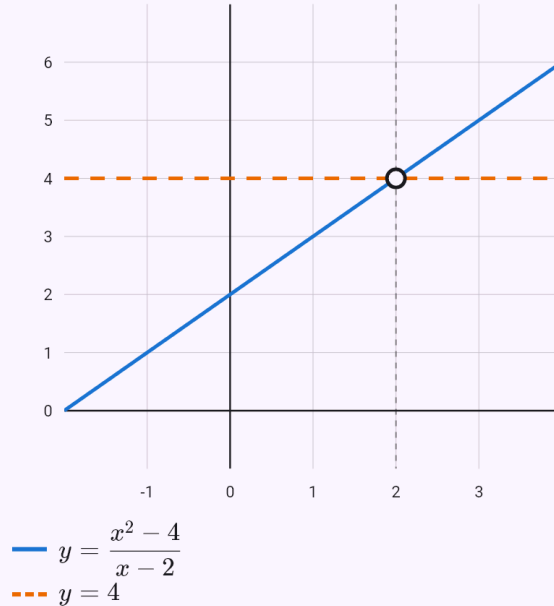
- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.

- Umformen und kürzen

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$

- Einsetzen: $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Graph



Grenzwert:

● (2|4)

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Ein Grenzwert im Unendlichen – Zähler und Nenner durch die höchste Potenz dividiert.

Eingabe: $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) / (x^2 - 5)$

Ergebnis

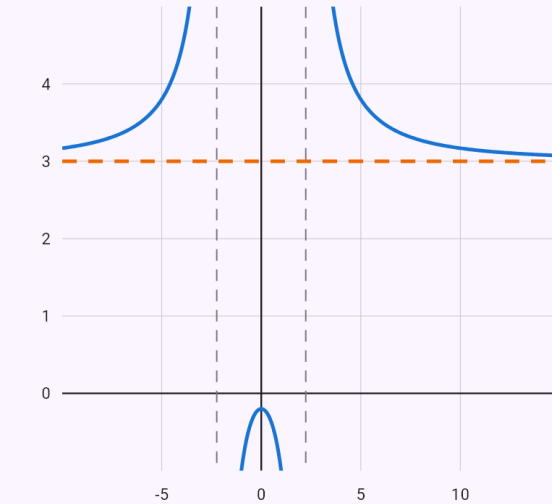
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = 3$$

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Zähler und Nenner durch x^2 teilen – Terme wie c/x^n gehen gegen null

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{5}{x^2}} = 3$$

Graph



$$\begin{aligned} \text{--- } y &= \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} \\ \text{--- } y &= 3 \end{aligned}$$

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Der bekannte Grenzwert $\sin x / x$.

Eingabe: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x) / x$

Ergebnis

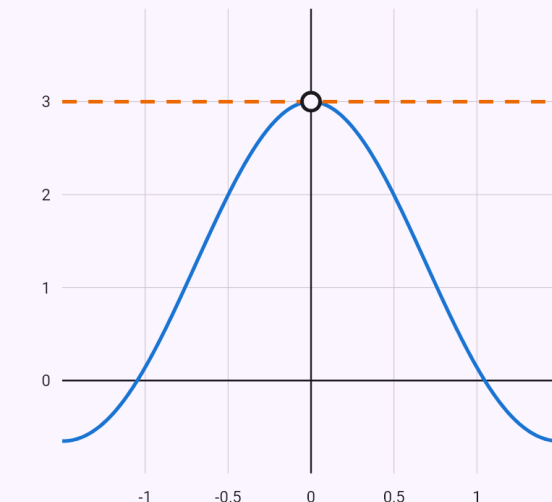
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Wir verwenden den bekannten Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Graph



$$\begin{aligned} \text{--- } y &= \frac{\sin(3x)}{x} \\ \text{--- } y &= 3 \end{aligned}$$

Grenzwert:

• $(0|3)$

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Die Regel von L'Hospital, zweimal nacheinander angewendet.

Eingabe: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x) / x^2$

Ergebnis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.

- Regel von L'Hospital – Zähler und Nenner ableiten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x + e^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

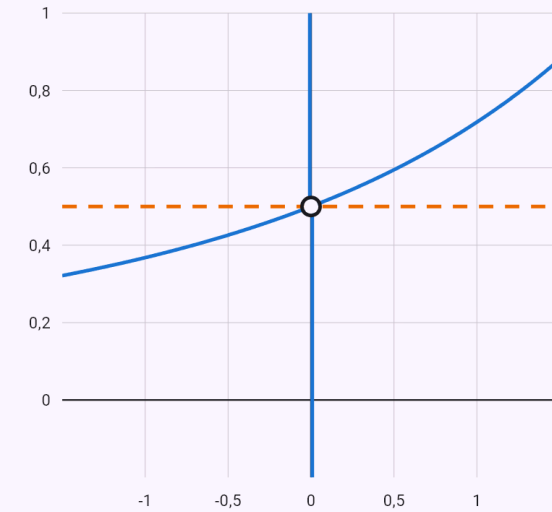
- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.

- Regel von L'Hospital – Zähler und Nenner ableiten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2}$$

- Einsetzen: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$

Graph



$$y = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Grenzwert:

$$\bullet \left(0 \mid \frac{1}{2}\right)$$

Leerer Kreis – der Wert, dem sich die Funktion nähert (an der Stelle selbst muss sie nicht definiert sein); gestrichelt – der Grenzwert.

Die einseitigen Grenzwerte unterscheiden sich – der Grenzwert existiert nicht.

Eingabe: $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$

Ergebnis

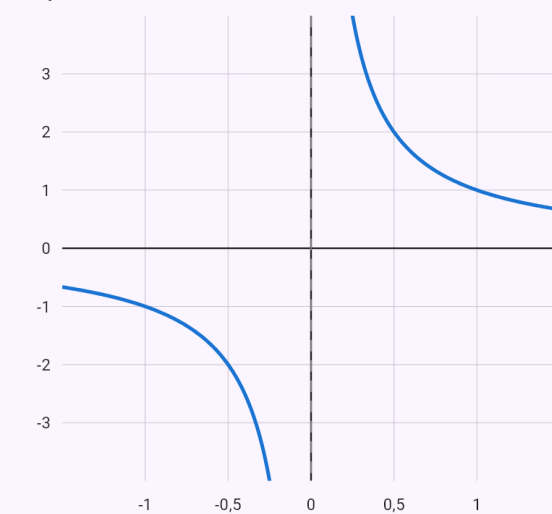
Der Grenzwert existiert nicht – die einseitigen Grenzwerte sind verschieden.

Lösungsweg

- Einsetzen ergibt eine Zahl ungleich null durch null – der Grenzwert ist unendlich, das Vorzeichen von links und von rechts: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{0}$

- Einseitige Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Graph



$$y = \frac{1}{x}$$

Grenzwert einer Folge – das am schnellsten wachsende Glied 9^n ausklammern.

Eingabe: $\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}}$

Ergebnis

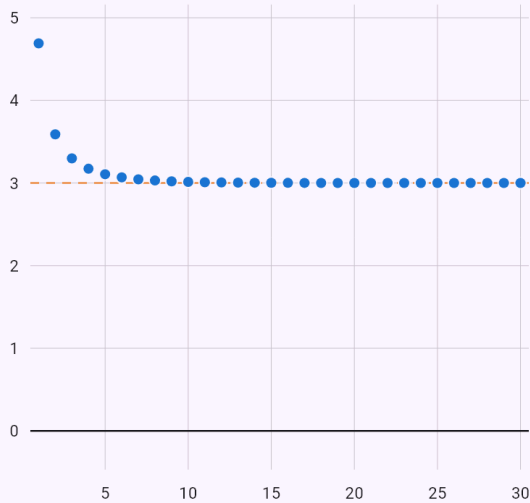
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Lösungsweg

- Den am schnellsten wachsenden Term 9^n ausklammern
– die anderen durch ihn geteilt gehen gegen null

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{9^n \left(\frac{6^n}{9^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1 \right)} =$$

Graph



● Glieder a_n — Grenzwert der Folge

Die Punkte sind die Glieder a_n für $n = 1, 2, 3, \dots$. Hat die Folge einen Grenzwert, nähern sich die Glieder ihm (gestrichelt).

Ableitungen

Die App leitet nach den Regeln ab – Summen-, Faktor-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel – und sagt bei jedem Schritt, welche Regel sie verwendet hat. Sie kann auch höhere Ableitungen und den Wert der Ableitung an einer Stelle. Grundfunktionen (x^2 , $\sin x$, e^x , ...) leitet sie auch nach Definition ab, als Grenzwert des Differenzenquotienten. Zum Ergebnis gehört ein Graph der Funktion und ihrer Ableitung.

Bei einer durch eine Gleichung in x und y implizit gegebenen Funktion ($x^3 + y^3 = 3xy$) leitet sie beide Seiten nach x ab (y als Funktion von x) und drückt y' aus, oder verwendet die Formel $y' = -F_x / F_y$; sie bestimmt auch y'' und in einem gegebenen Punkt Tangente und Normale und zeichnet die Kurve.

In einem singulären Punkt (die Kurve schneidet sich oder hat eine Spitze) bestimmt sie die Tangenten aus den Gliedern niedrigsten Grades – beim kartesischen Blatt im Ursprung $x = 0$ und $y = 0$.

Eingabe

$(x^2 \sin x)'$	Die Ableitung mit einem Strich nach der Klammer.
$d/dx (e^x / x)$	Die Schreibweise d/dx , auch vom Foto ($\frac{d}{dx}$).
$(x^3 \ln x)''$	Höhere Ableitungen mit mehreren Strichen oder mit der Ordnung beim Chip „Ableiten“.
$(x^2 + 1)' _{x=2}$	Die Ableitung an einer Stelle, oder die Stelle beim Chip eintragen.
$x^2 \sin x$	Ein Term mit dem Chip „Ableiten“ – dort wählen Sie auch die Ordnung, die Stelle und den Weg (nach den Regeln / nach Definition).
$x^3 + y^3 = 3xy$	Eine Gleichung in x und y – der Chip „Implizite Ableitung“ (Ordnung 1 oder 2, Verfahren, Punkt $[x_0; y_0]$) oder „Graph der Kurve“; geschrieben $\text{diff}(x^3+y^3=3xy, x)$.

Beispiele

Die Produktregel.

Eingabe: $(x^2 \sin x)'$

Ergebnis

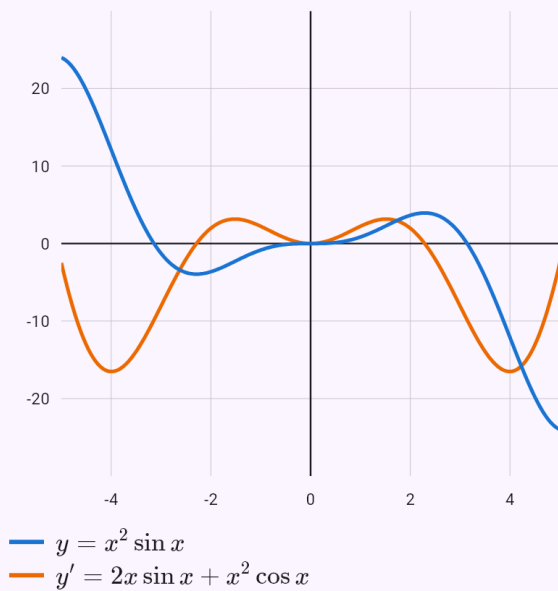
$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Lösungsweg

• Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Graph



Wo die Ableitung positiv ist, steigt die Funktion, wo sie negativ ist, fällt sie. In den Nullstellen der Ableitung hat die Funktion eine waagerechte Tangente.

Die Quotientenregel.

Eingabe: $d/dx (e^x / x)$

Ergebnis

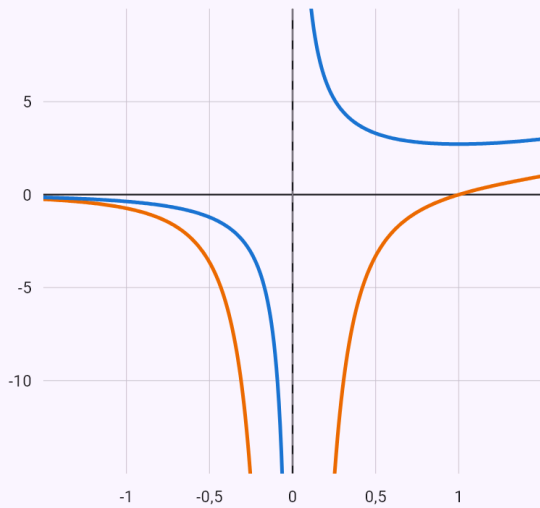
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Lösungsweg

- Quotientenregel $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Graph



$$y = \frac{e^x}{x}$$
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Wo die Ableitung positiv ist, steigt die Funktion, wo sie negativ ist, fällt sie. In den Nullstellen der Ableitung hat die Funktion eine waagerechte Tangente.

Die zweite Ableitung.

Eingabe: $(x^3 \ln x)''$

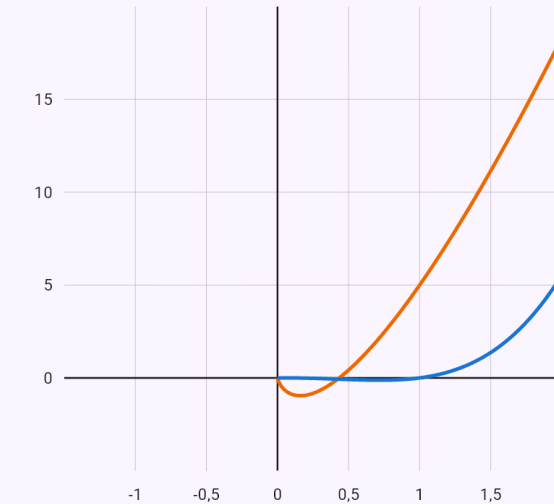
Ergebnis

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

Lösungsweg

- 1. Ableitung: $y' = (x^3 \ln x)'$
- Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $(x^3 \ln x)' = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- 2. Ableitung: $y'' = (x^2 + 3x^2 \ln x)'$
- Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen: $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = (x^2)' + (3x^2 \ln x)'$
- Den konstanten Faktor vor die Ableitung ziehen:
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x^2 \ln x)'$
- Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $(x^2 \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Einsetzen:
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Einsetzen: $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Vereinfachen: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Graph



$y = x^3 \ln x$
 $y'' = 5x + 6x \ln x$

Wo die zweite Ableitung positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo sie negativ ist, konkav (rechtsgekrümmt).

Die Ableitung nach Definition als Grenzwert.

Eingabe: x^2 Ableiten → Nach Definition

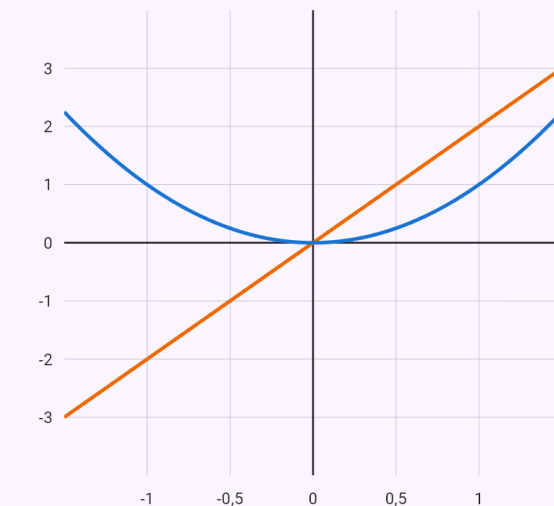
Ergebnis

$$y' = 2x$$

Lösungsweg

- Ableitung nach der Definition
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
- Einsetzen ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ – der Ausdruck muss umgeformt werden.
- Umformen und kürzen
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)$$
- Einsetzen: $\lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$

Graph



$y = x^2$
 $y' = 2x$

Wo die Ableitung positiv ist, steigt die Funktion, wo sie negativ ist, fällt sie. In den Nullstellen der Ableitung hat die Funktion eine waagerechte Tangente.

Implizite Ableitung – das kartesische Blatt, Tangente und Normale in $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$, die zweite Ableitung.

Eingabe: $x^3 + y^3 = 3xy$

Implizite Ableitung, Ordnung 2, Punkt $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$

Ergebnis

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

$$t: y = 3 - x$$

$$n: y = x$$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Bedingungen: $y^2 - x \neq 0$

Lösungsweg

- Die Funktion $y = y(x)$ ist durch die Gleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ gegeben – wir leiten beide Seiten nach x ab, y als Funktion von x (Kettenregel: z. B. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Beide Seiten abgeleitet:
 $(x^3 + y^3)' = (3xy)' \Rightarrow 3y^2 y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Die Terme mit y' nach links, der Rest nach rechts, y' ausgeklammert: $y'(3y^2 - 3x) = -3x^2 + 3y$

- y' ausgedrückt: $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$

- Die zweite Ableitung – y' noch einmal nach x abgeleitet (y und y' sind Funktionen von x)

$$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x} \right)' = \frac{2x^2 y y' - 2x y^2 - y^2 y' + x^2 - x y'}{y^4 - 2x y^2 + x^2}$$

- y' eingesetzt

$$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{(-y^2 + x)^3}$$

- Auf der Kurve gilt $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – das vereinfacht den Ausdruck: $y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$

- Der Punkt $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ liegt auf der Kurve:
 $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}} = 0$

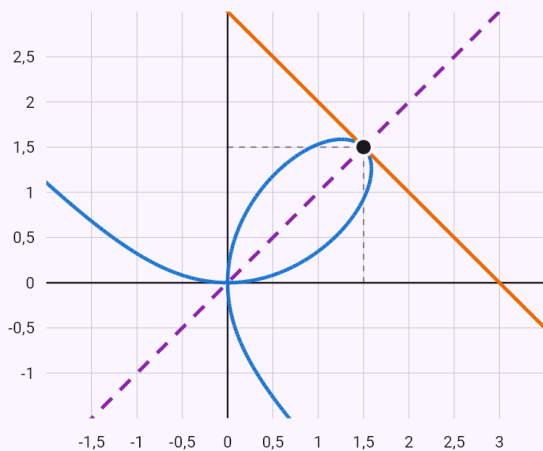
- Die Ableitung im Punkt $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ – die Steigung der Tangente: $y'(\frac{3}{2}) = -1$

- Die Tangente: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$

- Die Normale steht senkrecht auf der Tangente, ihre Steigung ist 1: $y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$

- Die zweite Ableitung im Punkt: $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Graph



— $x^3 + y^3 = 3xy$
 — $t: y = 3 - x$
 - - $n: y = x$

Die durch die Gleichung gegebene Kurve. Im gegebenen Punkt die Tangente (durchgezogen) und die Normale (gestrichelt).

Kurvendiskussion

Die App untersucht eine Funktion in der üblichen Reihenfolge: Definitionsmenge, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Achsen, Vorzeichen der Funktion, Grenzwerte an den Rändern der Definitionsmenge und Asymptoten, die erste Ableitung – Monotonie und Extrema (auch über höhere Ableitungen), die zweite Ableitung – Krümmung und Wendepunkte, schließlich die Wertemenge. Alles fasst sie in einer Übersicht zusammen und zeichnet einen Graphen mit den markierten Punkten.

Bei einer trigonometrischen Funktion bestimmt die App die Periode, untersucht die Funktion auf einer Periode und schreibt die Ergebnisse mit der Periode (Maximum bei $x = \pi/2 + 2k\pi$); ist nur die Ableitung periodisch ($x + 2 \sin x$), wiederholen sich Extrema und Monotonie mit der Periode. Beträge werden nach den Vorzeichen auf den Intervallen aufgelöst und an Knickstellen die einseitigen Ableitungen verglichen; wo die Ableitung unendlich ist, wird eine senkrechte Tangente gezeigt. Verschachtelte Beträge und Summen von Beträgen werden stückweise untersucht; wo die Funktion auf einem Intervall konstant ist, wird das mit ihrem Wert angegeben (ein Minimum in jedem Punkt des Intervalls).

Eingabe

Kurvendiskussion $y = x^3 - 3x$

Mit dem Wort „Kurvendiskussion“ vor der Funktion.

$x^3 - 3x$

Eine Funktion mit dem Chip „Kurvendiskussion“.

Beispiele

Ein Polynom – Extrema und ein Wendepunkt.

Eingabe: $x^3 - 3x$ Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$

Symmetrie: ungerade

Nullstellen: $[-\sqrt{3}; 0]$, $[0; 0]$, $[\sqrt{3}; 0]$

Steigend: $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$

Fallend: $[-1; 1]$

Lokales Maximum: $[-1; 2]$

Lokales Minimum: $[1; -2]$

Konvex: $[0; \infty)$

Konkav: $(-\infty; 0]$

Wendepunkte: $[0; 0]$

Lösungsweg

• Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

• $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).

• Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}, \text{ also } [-\sqrt{3}; 0], [0; 0], [\sqrt{3}; 0]$$

• Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0; 0]$

• Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

$f(x)$	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; 0)$	$(0; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
	-	+	-	+

Die Funktion ist positiv für $x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$
und negativ für $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$

• Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.

• Keine Asymptote für $x \rightarrow \pm\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

• Erste Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

• Stationäre Stellen: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

• Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Die Funktion ist steigend auf $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$ und fallend auf $[-1; 1]$

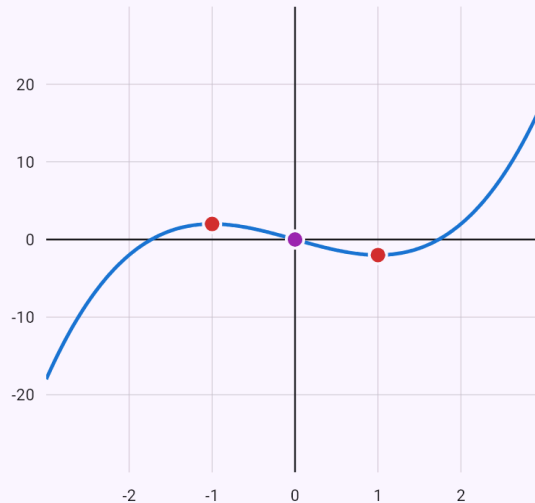
• An der Stelle $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – lokales Maximum.

• An der Stelle $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – lokales Minimum.

- Lokales Maximum $[-1; 2]$, lokales Minimum $[1; -2]$
 - Zweite Ableitung: $f''(x) = 6x$
 - Kandidaten für Wendestellen: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
 - Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):
- | | | |
|----------|----------------|---------------|
| $f''(x)$ | $(-\infty; 0)$ | $(0; \infty)$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | $\cup$ |
- Die Funktion ist konvex auf $[0; \infty)$ und konkav auf $(-\infty; 0]$
- An der Stelle $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – die erste von null verschiedene Ableitung (ab der dritten) hat ungerade Ordnung: Wendestelle.
 - Wendepunkte: $[0; 0]$

• Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = \mathbb{R}$

Graph



$y = x^3 - 3x$

Besondere Punkte:

- Maximum $(-1|2)$
- Minimum $(1|-2)$
- Wendepunkt $(0|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Eine gebrochenrationale Funktion – Asymptoten.

Eingabe: $x^2/(x - 1)$ **Kurvendiskussion**

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Wertebereich: $W(f) = (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade

Nullstellen: $[0; 0]$

Steigend: $(-\infty; 0]$, $[2; \infty)$

Fallend: $[0; 1)$, $(1; 2]$

Lokales Maximum: $[0; 0]$

Lokales Minimum: $[2; 4]$

Konvex: $(1; \infty)$

Konkav: $(-\infty; 1)$

Asymptoten: $x = 1$, $y = x + 1$

Lösungsweg

- Definitionsbereich – Bedingungen $x \neq 1$:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- Der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist nicht symmetrisch zu null – die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, also $[0; 0]$

- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0; 0]$

- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

$f(x)$	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
	-	-	+

Die Funktion ist positiv für $x \in (1; \infty)$ und negativ für $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Senkrechte Asymptoten (dort ist der Grenzwert unendlich): $x = 1$

- Asymptote für $x \rightarrow \pm\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – die Gerade $y = x + 1$

- Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

- Stationäre Stellen: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

$f'(x)$	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Die Funktion ist steigend auf $(-\infty; 0]$, $[2; \infty)$ und fallend auf $[0; 1)$, $(1; 2]$

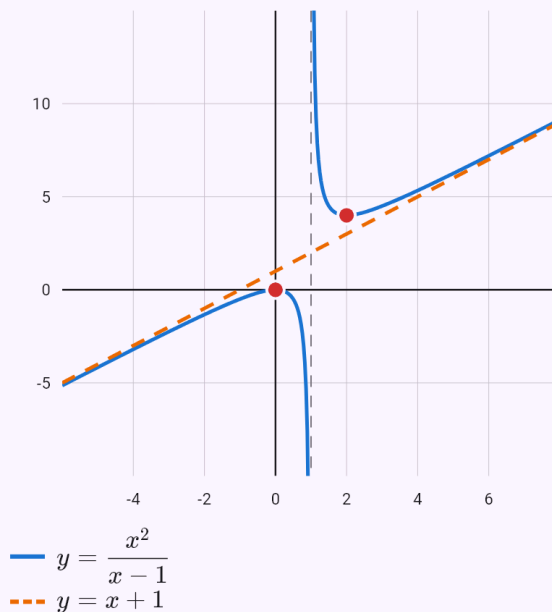
- An der Stelle $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokales Maximum.
- An der Stelle $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – lokales Minimum.
- Lokales Maximum $[0; 0]$, lokales Minimum $[2; 4]$
- Zweite Ableitung: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
- Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat keine Lösung.
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Die Funktion ist konvex auf $(1; \infty)$ und konkav auf $(-\infty; 1)$

- Die Funktion hat keine Wendepunkte.
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$

Graph



Besondere Punkte:

- Maximum $(0|0)$
- Minimum $(2|4)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Periodische Funktion – alles auf einer Periode, die Ergebnisse mit der Periode.

Eingabe: $\sin 2x + 2\cos x$

Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade

Periode: $p = 2\pi$

Nullstellen: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$

Steigend: $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Fallend: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

Lokales Maximum: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Lokales Minimum: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

Konvex:

$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi;$

Konkav:

$\left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi;$

Wendepunkte:

$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right],$

Lösungsweg

• Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

• Die Funktion ist periodisch mit der Periode 2π – wir untersuchen sie auf einer Periode (von 0 bis 2π) und wiederholen die Ergebnisse mit der Periode, $k \in \mathbb{Z}$.

• $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – weder $f(x)$ noch $-f(x)$: die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

• Schnittpunkte mit der x-Achse:
 $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, also $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$

• Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2$, also $[0; 2]$

• Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

$f(x)$	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
	$+$	$-$	$+$

Die Funktion ist positiv für $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

und negativ für $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

• Eine periodische Funktion (die nicht konstant ist) hat keinen Grenzwert bei $\pm\infty$.

• Erste Ableitung: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$

• Stationäre Stellen

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2}$$

- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(0; \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

Die Funktion ist steigend auf $[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$
und fallend auf $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$

- Lokales Maximum $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\sqrt{3}}{2}]$, lokales Minimum $[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$

- Zweite Ableitung: $f''(x) = -2 \cos x - 4 \sin(2x)$

- Kandidaten für Wendestellen

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$$

- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(0; \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; \pi + \arcsin(\frac{1}{4}))$	$(\pi + \arcsin(\frac{1}{4}); \frac{3\pi}{2})$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	∩	∪	∩

Die Funktion ist konvex auf und konkav auf

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi; 2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi\right], \left[-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$$

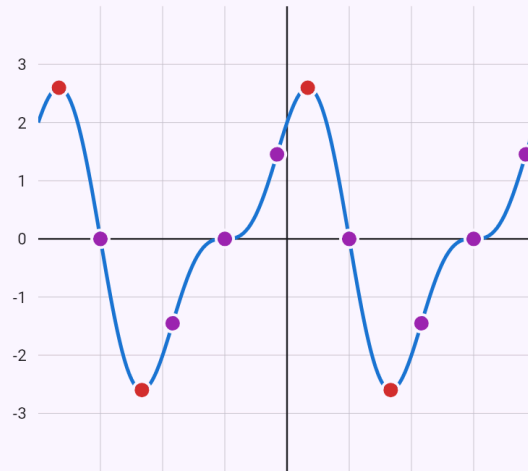
- Wendepunkte

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right], \left[2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; 0\right]$$

- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und

$$\text{Grenzwerten: } W(f) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

Graph



$$-3\pi/2 \quad -\pi \quad -\pi/2 \quad 0 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 3\pi/2$$

$$y = \sin 2x + 2 \cos x$$

Besondere Punkte:

- Maximum $\left(-\frac{11\pi}{6} \mid \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ • Wendepunkt $\left(-\frac{3\pi}{2} \mid 0\right)$
- Minimum $\left(-\frac{7\pi}{6} \mid -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- Wendepunkt $\left(-\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \mid -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- Wendepunkt $\left(-\frac{\pi}{2} \mid 0\right)$
- Wendepunkt $\left(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \mid \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- Maximum $\left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ • Wendepunkt $\left(\frac{\pi}{2} \mid 0\right)$
- Minimum $\left(\frac{5\pi}{6} \mid -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- Wendepunkt $\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \mid -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$
- Wendepunkt $\left(\frac{3\pi}{2} \mid 0\right)$
- Wendepunkt $\left(2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \mid \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Tangens – senkrechte Asymptoten, Wertebereich $\mathbb{R}$.

Eingabe: tg x Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$

Symmetrie: ungerade

Periode: $p = \pi$

Nullstellen: $[k\pi; 0]$

Steigend: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Konvex: $\left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Konkav: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right]$

Wendepunkte: $[k\pi; 0]$

Asymptoten: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Lösungsweg

- Definitionsbereich – Bedingungen $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:
 $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Die Funktion ist periodisch mit der Periode π – wir untersuchen sie auf einer Periode (von 0 bis π) und wiederholen die Ergebnisse mit der Periode, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -\tan x = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).

- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$, also $[k\pi; 0]$

- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0; 0]$

- Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(0; \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; \pi)$
$f(x)$	+	-

Die Funktion ist positiv für $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ und negativ für $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right)$

- Eine periodische Funktion (die nicht konstant ist) hat keinen Grenzwert bei $\pm\infty$.

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

- Senkrechte Asymptoten (dort ist der Grenzwert unendlich): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- Erste Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

- Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine Lösung – es gibt keine stationären Stellen.

- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(0; \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; \pi)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↘

Die Funktion ist steigend auf $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

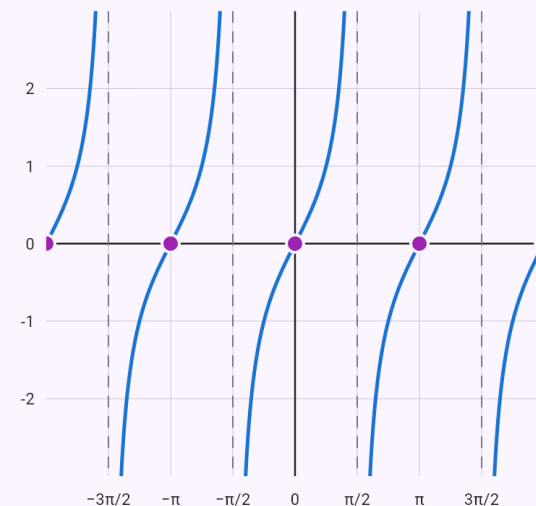
- Die Funktion hat keine lokalen Extrema.
- Zweite Ableitung: $f''(x) = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$
- Kandidaten für Wendestellen: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(0; \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; \pi)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	∪	∩

Die Funktion ist konvex auf $\left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ und konkav auf $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right]$

- Wendepunkte: $[k\pi; 0]$
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = \mathbb{R}$

Graph



— $y = \text{tg } x$

Besondere Punkte:

- Wendepunkt $(-2\pi|0)$
- Wendepunkt $(-\pi|0)$
- Wendepunkt $(0|0)$
- Wendepunkt $(\pi|0)$
- Wendepunkt $(2\pi|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Tangens hyperbolicus – waagerechte Asymptoten $y = \pm 1$.

Eingabe: $\tanh x$ Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = (-1; 1)$

Symmetrie: ungerade

Nullstellen: $[0; 0]$

Steigend: $\mathbb{R}$

Konvex: $(-\infty; 0]$

Konkav: $[0; \infty)$

Wendepunkte: $[0; 0]$

Asymptoten: $y = -1$, $y = 1$

Lösungsweg

• Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

• $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).

• Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, also $[0; 0]$

• Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0; 0]$

• Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f(x)$	-	+

Die Funktion ist positiv für $x \in (0; \infty)$ und negativ für $x \in (-\infty; 0)$

• Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

• Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.

• Asymptote für $x \rightarrow -\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ – die Gerade $y = -1$

• Asymptote für $x \rightarrow +\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ – die Gerade $y = 1$

• Erste Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$

• Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine Lösung – es gibt keine stationären Stellen.

• Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty; \infty)$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

Die Funktion ist steigend auf $\mathbb{R}$

• Die Funktion hat keine lokalen Extrema.

• Zweite Ableitung: $f''(x) = -\frac{2 \tanh x}{\cosh^2 x}$

• Kandidaten für Wendestellen: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

• Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	∪	∩

Die Funktion ist konvex auf $(-\infty; 0]$ und konkav auf $[0; \infty)$

• An der Stelle $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – die erste von null verschiedene Ableitung (ab der dritten) hat ungerade Ordnung: Wendestelle.

• Wendepunkte: $[0; 0]$

• Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = (-1; 1)$

Nur die Ableitung ist periodisch – die Werte der Extrema wachsen mit k.

Eingabe: $x + 2\sin x$

Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Symmetrie: ungerade

Periode: $p = 2\pi$

Nullstellen: $[0; 0]$

Steigend: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Fallend: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Lokales Maximum: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Lokales Minimum: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

Konvex: $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$

Konkav: $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Wendepunkte: $[2k\pi; 2k\pi], [\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Lösungsweg

- Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
- Die Funktion selbst ist nicht periodisch, ihre Ableitung aber schon (Periode 2π) – Monotonie, Extrema und Krümmung wiederholen sich mit dieser Periode, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).

- Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, also $[0; 0]$

- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0; 0]$

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Erste Ableitung: $f'(x) = 2\cos x + 1$

- Stationäre Stellen

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(0; \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3}; 2\pi)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Die Funktion ist steigend auf $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

und fallend auf $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

- Lokales Maximum $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$,
lokales Minimum $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi\right]$

- Zweite Ableitung: $f''(x) = -2\sin x$

- Kandidaten für Wendestellen: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$

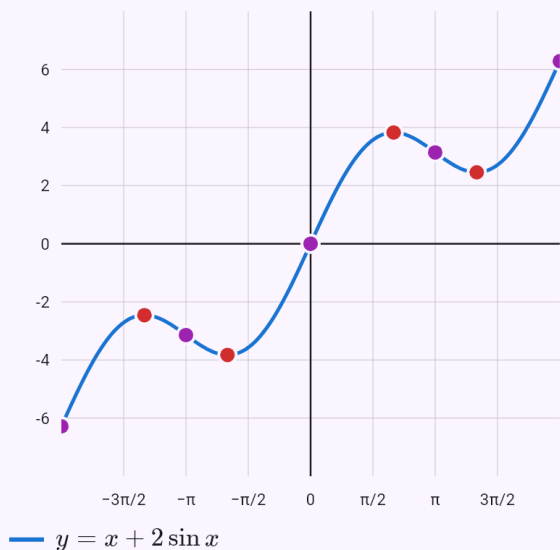
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(0; \pi)$	$(\pi; 2\pi)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Die Funktion ist konvex auf $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$ und konkav auf $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$

- Wendepunkte: $[2k\pi; 2k\pi]$, $[\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Graph



Besondere Punkte:

- Wendepunkt $(-2\pi | -2\pi)$
- Maximum $\left(-\frac{4\pi}{3} | \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)$
- Wendepunkt $(-\pi | -\pi)$
- Minimum $\left(-\frac{2\pi}{3} | -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$
- Wendepunkt $(0 | 0)$
- Maximum $\left(\frac{2\pi}{3} | \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
- Wendepunkt $(\pi | \pi)$
- Minimum $\left(\frac{4\pi}{3} | \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
- Wendepunkt $(2\pi | 2\pi)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Betrag – Knickstellen, einseitige Ableitungen.

Eingabe: $|x^2 - 1|$ **Kurvendiskussion**

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = [0; \infty)$

Symmetrie: gerade

Nullstellen: $[-1; 0]$, $[1; 0]$

Steigend: $[-1; 0]$, $[1; \infty)$

Fallend: $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$

Lokales Maximum: $[0; 1]$

Lokales Minimum: $[-1; 0]$, $[1; 0]$

Konvex: $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$

Konkav: $[-1; 1]$

Lösungsweg

• Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

• Wir lösen die Beträge nach den Vorzeichen ihrer Argumente auf den einzelnen Intervallen auf

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty; -1) \\ 1 - x^2, & x \in [-1; 1] \\ x^2 - 1, & x \in [1; \infty) \end{cases}$$

• – die Funktion ist gerade (der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse).

$$f(-x) = |(-x)^2 - 1| = |x^2 - 1| = f(x)$$

• Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1, \text{ also } [-1; 0], [1; 0]$$

• Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1$, also $[0; 1]$

• Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; \infty)$
$f(x)$	+	+	+

Die Funktion ist positiv für

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ und negativ für $x \in \emptyset$

• Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.

• Keine Asymptote für $x \rightarrow -\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

• Keine Asymptote für $x \rightarrow +\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

• Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{|x^2 - 1|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x^2 - 1|}$$

• Stationäre Stellen: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

• An der Stelle $x = -1$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), der Graph hat dort einen Knick.

- An der Stelle $x = 1$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), der Graph hat dort einen Knick.

- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Die Funktion ist steigend auf $[-1; 0]$, $[1; \infty)$ und fallend auf $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$

- An der Stelle $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokales Maximum.
- Lokales Maximum $[0; 1]$, lokales Minimum $[-1; 0]$, $[1; \infty)$

- Zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)^3}{|x^2 - 1|^3} = \frac{2(x - 1)^3(x + 1)^3}{|x^2 - 1|^3}$$

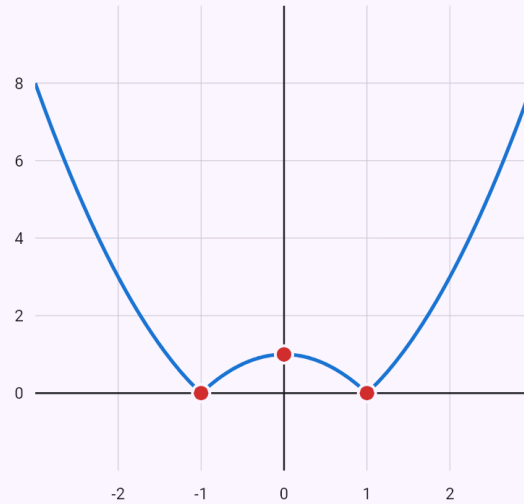
- Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat keine Lösung.
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	∪	∩	∪

Die Funktion ist konvex auf $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$ und konkav auf $[-1; 1]$

- Die Funktion hat keine Wendepunkte.
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = [0; \infty)$

Graph



— $y = |x^2 - 1|$

Besondere Punkte:

- Minimum $(-1|0)$
- Maximum $(0|1)$
- Minimum $(1|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Kubikwurzel – senkrechte Tangente bei null.

Eingabe: $x^{1/3}$ Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$

Symmetrie: ungerade

Nullstellen: $[0; 0]$

Steigend: $\mathbb{R}$

Konvex: $(-\infty; 0]$

Konkav: $[0; \infty)$

Wendepunkte: $[0; 0]$

Lösungsweg

• Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

• $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$ – die Funktion ist ungerade (der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung).

• Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, also $[0; 0]$

• Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $[0; 0]$

• Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f(x)$	–	+

Die Funktion ist positiv für $x \in (0; \infty)$ und negativ für $x \in (-\infty; 0)$

• Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.

• Keine Asymptote für $x \rightarrow -\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, aber $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

• Keine Asymptote für $x \rightarrow +\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, aber $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

• Erste Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

• Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine Lösung – es gibt keine stationären Stellen.

• An der Stelle $x = 0$ ist die Ableitung unendlich ($f'_-(0) = \infty, f'_+(0) = \infty$) – der Graph hat dort eine senkrechte Tangente.

• Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

Die Funktion ist steigend auf $\mathbb{R}$

• Die Funktion hat keine lokalen Extrema.

• Zweite Ableitung: $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

• Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat keine Lösung.

• Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

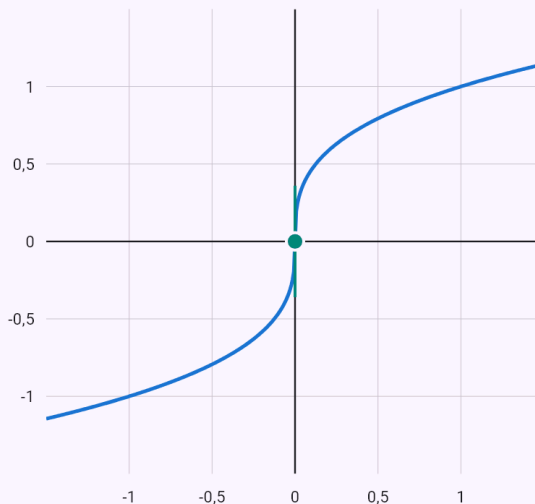
	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f''(x)$	+	–
$f(x)$	∪	∩

Die Funktion ist konvex auf $(-\infty; 0]$ und konkav auf $[0; \infty)$

• Wendepunkte: $[0; 0]$

• Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = \mathbb{R}$

Graph



$y = x^{\frac{1}{3}}$

Besondere Punkte:

● Wendepunkt $(0|0)$ ● senkrechte Tangente $(0|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Verschachtelter Betrag – stückweise, gerade Funktion.

Eingabe: $|-x^2 + 2|x| + 3|$

Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = [0; \infty)$

Symmetrie: gerade

Nullstellen: $[-3; 0], [3; 0]$

Steigend: $[-3; -1], [0; 1], [3; \infty)$

Fallend: $(-\infty; -3], [-1; 0], [1; 3]$

Lokales Maximum: $[-1; 4], [1; 4]$

Lokales Minimum: $[-3; 0], [0; 3], [3; 0]$

Konvex: $(-\infty; -3], [3; \infty)$

Konkav: $[-3; 0], [0; 3]$

Lösungsweg

• Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

• Wir lösen die Beträge nach den Vorzeichen ihrer Argumente auf den einzelnen Intervallen auf

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty; -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in [-3; 0) \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [0; 3) \\ x^2 - 2x - 3, & x \in [3; \infty) \end{cases}$$

• – die Funktion ist gerade (der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse).

$$f(-x) = | -(-x)^2 + 2|(-x)| + 3 | = |-x^2 + 2|x| + 3| :$$

• Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3, \text{ also } [-3; 0], [3; 0]$$

• Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 3$, also $[0; 3]$

• Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen und den Definitionslücken:

$$\begin{array}{c|ccc} f(x) & (-\infty; -3) & (-3; 3) & (3; \infty) \\ \hline & + & + & + \end{array}$$

Die Funktion ist positiv für

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty) \text{ und negativ für } x \in \emptyset$$

• Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.

• Keine Asymptote für $x \rightarrow -\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

• Keine Asymptote für $x \rightarrow +\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

• Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x|(-x^2 + 2|x| + 3)} = \frac{2x(x-1)(x+3)}{|x|(-x^2 + 2|x| + 3)}$$

• Stationäre Stellen: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

- An der Stelle $x = -3$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(-3) = -4$, $f'_+(-3) = 4$), der Graph hat dort einen Knick.
- An der Stelle $x = 0$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), der Graph hat dort einen Knick.
- An der Stelle $x = 3$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), der Graph hat dort einen Knick.

- Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 3)$
$f'(x)$	-	+	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

Die Funktion ist steigend auf $[-3; -1]$, $[0; 1]$, $[3; \infty)$ und fallend auf $(-\infty; -3]$, $[-1; 0]$, $[1; 3]$

- An der Stelle $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – lokales Maximum.
- An der Stelle $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – lokales Maximum.
- Lokales Maximum $[-1; 4]$, $[1; 4]$, lokales Minimum $[-3; 0]$, $[0; 3]$, $[3; 0]$
- Zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

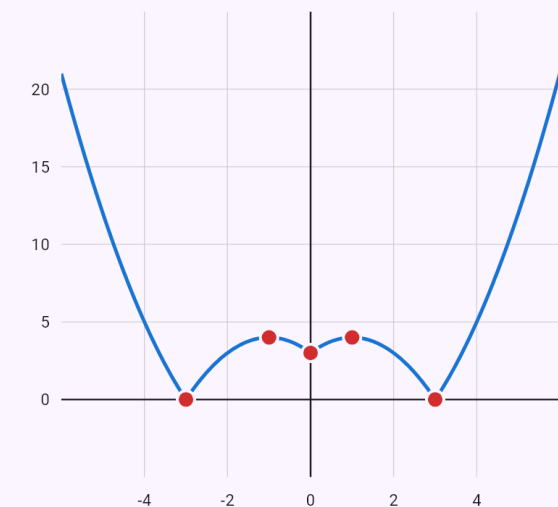
- Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat keine Lösung.
- Vorzeichen der zweiten Ableitung – wo sie positiv ist, ist die Funktion konvex (linksgekrümmt), wo negativ, konkav (rechtsgekrümmt):

	$(-\infty; -3)$	$(-3; 0)$	$(0; 3)$	$(3; \infty)$
$f''(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	∪	∩	∩	∪

Die Funktion ist konvex auf $(-\infty; -3]$, $[3; \infty)$ und konkav auf $[-3; 0]$, $[0; 3]$

- Die Funktion hat keine Wendepunkte.
- Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = [0; \infty)$

Graph



$$y = |-x^2 + 2|x| + 3|$$

Besondere Punkte:

- Minimum $(-3|0)$ • Maximum $(-1|4)$
- Minimum $(0|3)$ • Maximum $(1|4)$ • Minimum $(3|0)$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Summe von Beträgen – ein konstantes Stück und zwei schiefe Asymptoten.

Eingabe: $|x - 2| + |x + 3|$ Kurvendiskussion

Ergebnis

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = [5; \infty)$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade

Steigend: $[2; \infty)$

Fallend: $(-\infty; -3]$

Konstant: $[-3; 2]$

Lokales Minimum: $f(x) = 5, x \in [-3; 2]$

Asymptoten: $y = -2x - 1, y = 2x + 1$

Lösungsweg

• Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

• Wir lösen die Beträge nach den Vorzeichen ihrer Argumente auf den einzelnen Intervallen auf

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty; -3) \\ 5, & x \in [-3; 2] \\ 2x + 1, & x \in [2; \infty) \end{cases}$$

• – weder $f(x)$ noch $-f(x)$: die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x|$$

• Die Gleichung $f(x) = 0$ hat keine Lösung – der Graph schneidet die x-Achse nicht.

• Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 5$, also $[0; 5]$

• Das Vorzeichen der Funktion zwischen den Nullstellen

• An der Stelle $x = 2$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(2) = 0, f'_+(2) = 2$), der Graph hat dort einen Knick.

• Vorzeichen der ersten Ableitung – wo sie positiv ist, steigt die Funktion, wo negativ, fällt sie:

	$(-\infty; -3)$	$(-3; 2)$	$(2; \infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Die Funktion ist steigend auf $[2; \infty)$ und fallend auf $(-\infty; -3]$. Auf $[-3; 2]$ ist sie konstant ($f' = 0$).

• Lokales Minimum $f(x) = 5, x \in [-3; 2]$, kein lokales Maximum.

• Zweite Ableitung: $f''(x) = 0$

• Die zweite Ableitung ist null – der Graph ist (Teil) einer Geraden, weder konvex noch konkav.

• Wertebereich – aus Monotonie, Extrema und Grenzwerten: $W(f) = [5; \infty)$

und den Definitionslücken:

$$\frac{f(x)}{f(x)} \left| \begin{array}{c} (-\infty; \infty) \\ + \end{array} \right.$$

Die Funktion ist positiv für $x \in \mathbb{R}$ und negativ für $x \in \emptyset$

• Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Die Funktion hat keine senkrechten Asymptoten.

• Asymptote für $x \rightarrow -\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$,
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – die Gerade
 $y = -2x - 1$

• Asymptote für $x \rightarrow +\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – die Gerade $y = 2x + 1$

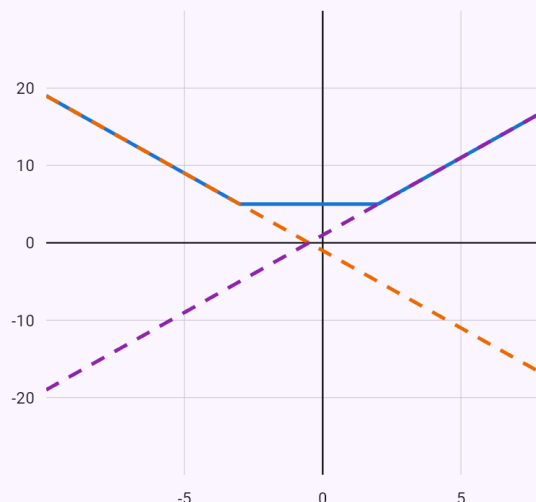
• Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x - 2| + x|x + 3| - 2|x - 2| + 3|x + 3|}{|x - 2||x + 3|}$$

• Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine Lösung – es gibt keine stationären Stellen.

• An der Stelle $x = -3$ existiert keine Ableitung – die einseitigen Ableitungen sind verschieden ($f'_-(-3) = -2, f'_+(-3) = 0$), der Graph hat dort einen Knick.

Graph



— $y = |x - 2| + |x + 3|$
- - - $y = -2x - 1$
- - - $y = 2x + 1$

Lokale Extrema rot, Wendepunkte violett, ein leerer Kreis – eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist; Asymptoten gestrichelt.

Bekannte Einschränkungen

- Eine Funktion, die nicht einmal eine periodische Ableitung hat ($x \cdot \sin x$), wird nur numerisch auf $(-2\pi; 2\pi)$ und ohne Periode untersucht; Arkusfunktionen ($\arcsin$, $\arctan$) werden noch nicht unterstützt.

Taylorpolynom

Die App stellt das Taylorpolynom (an der Stelle 0 das Maclaurin-Polynom) vom gegebenen Grad auf: eine Tabelle der Ableitungen an der Stelle, Einsetzen in die Formel und das Restglied in Lagrange-Form. Den Grad kann sie auch selbst bestimmen – den kleinsten, bei dem der Fehler an einer Stelle oder auf einem Intervall eine gegebene Schranke nicht überschreitet. Der Graph zeigt Funktion und Polynom; mit einem Schieberegler ändern Sie den Grad und sehen, wie die Näherung besser wird.

Eingabe

<code>taylor(sin x, 0, 5)</code>	Funktion, Stelle und Grad.
<code>maclaurin(e^x, 4)</code>	Das Maclaurin-Polynom – die Stelle ist 0.
<code>taylor(e^x, 0, fehler=0.001, x=0.5)</code>	Der Grad nach dem Fehler an der Stelle x (auf einem Intervall statt x r=... eingeben).
<code>ln(1 + x)</code>	Eine Funktion mit dem Chip „Taylorpolynom“ – Stelle, Grad oder Genauigkeit tragen Sie dort ein.

Beispiele

Ein Polynom vom Grad 4 mit Restglied.

Eingabe: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Ergebnis

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Lösungsweg

- Das Maclaurin-Polynom (das Taylorpolynom an der Stelle

$$0): T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Die Ableitungen und ihre Werte an der Stelle a

$$f(x) = \ln(x+1) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \quad f^{(4)}(0) = -6$$

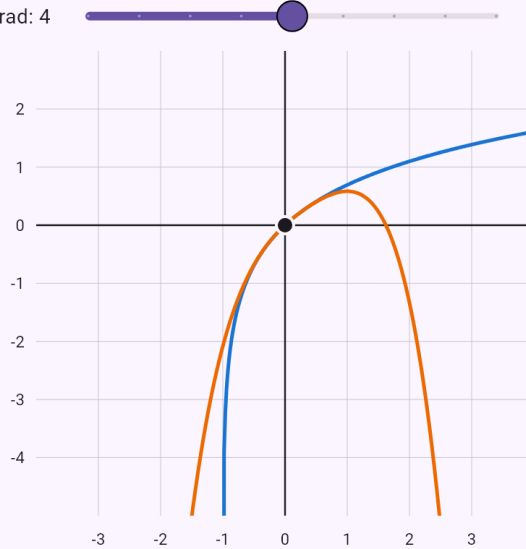
- Die Werte der Ableitungen eingesetzt

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

- Das Restglied (der Fehler) in Lagrange-Form, ξ zwischen a und x: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$

Graph

Grad: 4



— $y = \ln(1+x)$

— $T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Die Stelle, um die das Polynom die Funktion annähert:

• (0|0)

Mit dem Schieberegler über dem Graphen wählst du den Grad – je höher, desto besser und weiter um die Stelle nähert das Polynom die Funktion an.

Der Grad nach der geforderten Genauigkeit – ein Näherungswert von $e^{0,5}$.

Eingabe: `taylor(e^x, 0, fehler=0.001, x=0.5)`

Ergebnis

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0,5) \approx 1,6484$$

Lösungsweg

- Das Maclaurin-Polynom (das Taylorpolynom an der Stelle

$$0): T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Die Ableitungen und ihre Werte an der Stelle a

$$f(x) = e^x \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \quad f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \quad f^{(4)}(0) = 1$$

- Die Werte der Ableitungen eingesetzt

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Das Restglied (der Fehler) in Lagrange-Form, ξ zwischen

$$a \text{ und } x: R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^\xi}{5!} x^5$$

- Der kleinste Grad n, dessen Restgliedabschätzung an der

Stelle x den Fehler nicht überschreitet

$$M_k = \max_{t \in [0; 0,5]} |f^{(k)}(t)|, \quad h = |x - a| = 0,5$$

$$n = 1: |R_1| \leq \frac{1,6487}{2!} \cdot 0,5^2 \approx 0,2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: |R_2| \leq \frac{1,6487}{3!} \cdot 0,5^3 \approx 0,0344 > 10^{-3}$$

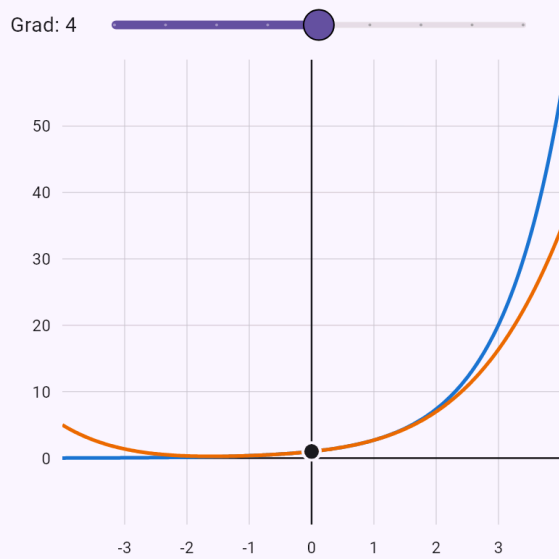
$$n = 3: |R_3| \leq \frac{1,6487}{4!} \cdot 0,5^4 \approx 4,3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: |R_4| \leq \frac{1,6487}{5!} \cdot 0,5^5 \approx 4,3 \cdot 10^{-4} \leq 10^{-3}$$

- Der Näherungswert: $f(0,5) \approx T_4(0,5) = \frac{211}{128} \approx 1,6484$

Graph

Grad: 4



— $y = e^x$

— $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

Die Stelle, um die das Polynom die Funktion annähert:

- (0|1)

Mit dem Schieberegler über dem Graphen wählst du den Grad – je höher, desto besser und weiter um die Stelle nähert das Polynom die Funktion an.

Unbestimmte Integrale

Die App integriert mit den Verfahren aus der Schule und sagt bei jedem Schritt, was sie tut. Das Ergebnis prüft sie durch Ableiten (die Probe ist der letzte Schritt) und zeichnet den Integranden und die Stammfunktion.

Wurzeln aus Potenzen der Variablen ($\sqrt[3]{x^4}$, $\sqrt{x^3}$) werden als Potenzen mit rationalem Exponenten geschrieben; ein Betrag ($|\cos x|$, $\sqrt{1 - \sin^2 x}$) mit der Signumfunktion sgn .

Hat ein Integral keine elementare Stammfunktion (etwa e^{-x^2}), sagt die App es und gibt sie mit einer speziellen Funktion an (erf , Si , ...).

Eingabe

<code>int(x e^x, x)</code>	Ein Integral mit der Variablen.
<code>int(x^2 sin x)</code>	Ohne Variable, wenn es nur eine gibt.
<code>∫ x^2 dx</code>	Mit dem Integralzeichen, auch vom Foto.
<code>x e^x</code>	Eine Funktion mit dem Chip „Integrieren“.

Grundintegrale und Substitution

Das Integral einer Summe gliedweise, Konstanten vor das Integral, Grundintegrale aus der Tabelle (auch mit linearer innerer Funktion) und Substitution, wenn im Integranden eine Funktion zusammen mit der Ableitung ihres Inneren steht.

Beispiele

Gliedweise nach der Tabelle.

Eingabe: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

Ergebnis

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = x^3 + e^x - 2 \ln |x|$$

Lösungsweg

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = \int 3x^2 dx + \int e^x dx + \int -\frac{2}{x} dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int e^x dx = e^x$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

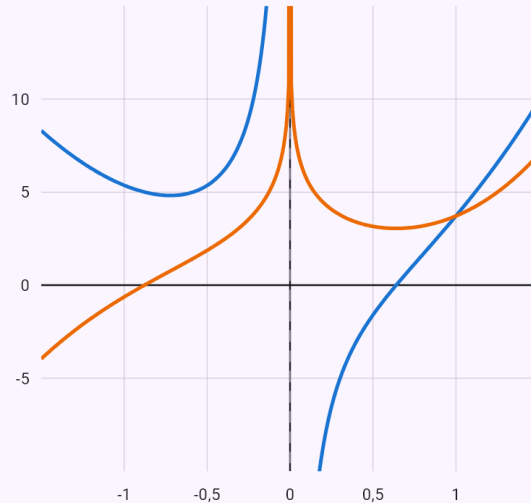
$$\int -\frac{2}{x} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand:

$$(x^3 + e^x - 2 \ln |x|)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$$

Graph



$$\begin{aligned} \text{--- } f(x) &= 3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \\ \text{--- } F(x) &= x^3 + e^x - 2 \ln |x| \end{aligned}$$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für $C = 0$ (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F ; wo negativ, fällt F .

Die Substitution $t = x^2$.

Eingabe: `int(2x cos(x^2))`

Ergebnis

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$

Lösungsweg

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int 2x \cos(x^2) dx = 2 \int x \cos(x^2) dx$$

- Substitution $t = x^2, dt = 2x dx$:

$$\int x \cos(x^2) dx = \int \frac{\cos t}{2} dt$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

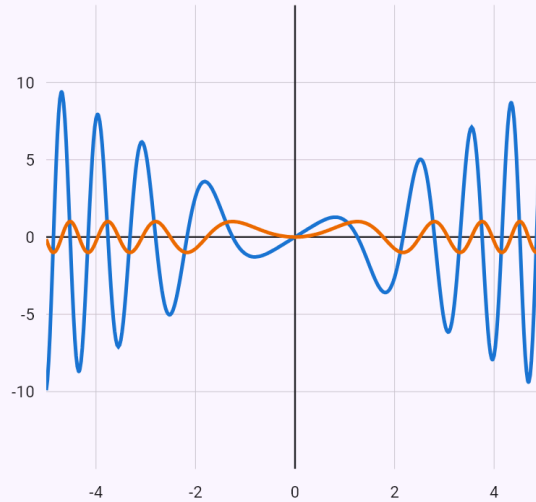
$$\int \frac{\cos t}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \cos t dt = \sin t$

- Zurück zur ursprünglichen Variablen: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin(x^2)}{2}$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand:
 $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$

Graph



— $f(x) = 2x \cos(x^2)$
— $F(x) = \sin(x^2)$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für $C = 0$ (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F ; wo negativ, fällt F .

Integral mit Konstanten a, b .

Eingabe: `int(1/(a - bx)^3)`

Ergebnis

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2} + C$$

Bedingungen: $b \neq 0$

Lösungsweg

- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt:

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2}$$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand:

$$\left(\frac{1}{2b(bx - a)^2} \right)' = \frac{1}{(a - bx)^3}$$

Partielle Integration

Ein Produkt aus einem Polynom und einer Exponential-, trigonometrischen oder Logarithmusfunktion integriert die App partiell, bei Bedarf mehrfach; Integrale wie $e^x \sin x$ durch zyklische partielle Integration.

Beispiele

Zweimal hintereinander partiell integriert.

Eingabe: `int(x^2 e^x)`

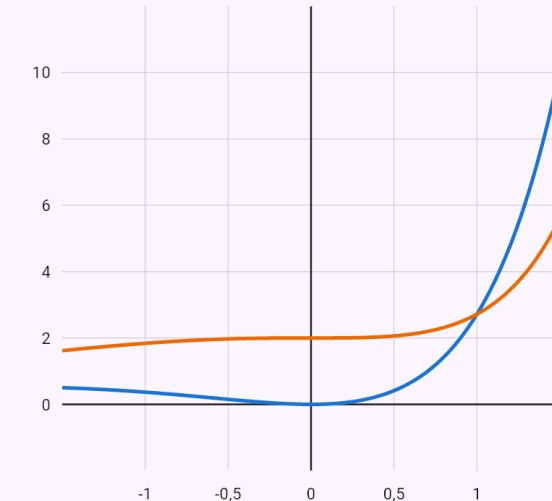
Ergebnis

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Lösungsweg

- Partielle Integration ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = e^x$, also $u' = 2x$, $v = e^x$: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$
- Die Konstante vor das Integral gezogen: $\int 2x e^x dx = 2 \int x e^x dx$
- Partielle Integration ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = e^x$, also $u' = 1$, $v = e^x$: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int e^x dx = e^x$
- Probe – die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand: $(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x)' = x^2 e^x$

Graph



— $f(x) = x^2 e^x$
— $F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für $C = 0$ (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F ; wo negativ, fällt F .

Gebrochenrationale Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion dividiert die App bei Bedarf, zerlegt den Nenner und die Funktion in Partialbrüche, die sie zu Logarithmen und Arkustangens integriert.

Einen Nenner, der sich über den rationalen Zahlen nicht zerlegen lässt ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$), zerlegt sie über den reellen Zahlen – jedes Paar konjugiert komplexer Nullstellen ergibt einen quadratischen Faktor ohne reelle Nullstellen.

Beispiele

Partialbruchzerlegung.

Eingabe: `int((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))`

Ergebnis

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx = 3 \ln|x-2| - 2 \ln|x-1|$$

Lösungsweg

- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt:

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} \right) dx$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} \right) dx = \int \frac{3}{x-2} dx + \int -\frac{2}{x-1} dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{3}{x-2} dx = 3 \int \frac{1}{x-2} dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2|$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int -\frac{2}{x-1} dx = -2 \int \frac{1}{x-1} dx$$

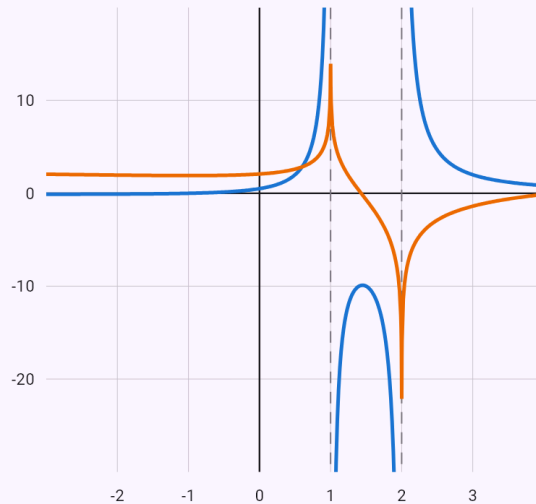
- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1|$$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand

$$(3 \ln|x-2| - 2 \ln|x-1|)' = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

Graph



$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

$$F(x) = 3 \ln|x-2| - 2 \ln|x-1|$$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für $C = 0$ (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F ; wo negativ, fällt F .

Zerlegung des Nenners $x^4 + 1$ über den reellen Zahlen.

Eingabe: `int(1/(x^4 + 1))`

Ergebnis

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x + 1) \right)$$

Lösungsweg

- Den Nenner über $\mathbb{R}$ in Faktoren zerlegen: Seine komplexen Nullstellen bilden konjugierte Paare $r, \bar{r}$, und jedes Paar ergibt einen quadratischen Faktor $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2 \operatorname{Re} r \cdot x + |r|^2$ ohne reelle Nullstellen:
 $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx = \int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx + \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx$$

- Der Nenner hat keine reellen Nullstellen: ein Vielfaches seiner Ableitung im Zähler ergibt $\ln$, der Rest nach quadratischer Ergänzung $\arctan$

$$\int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$$

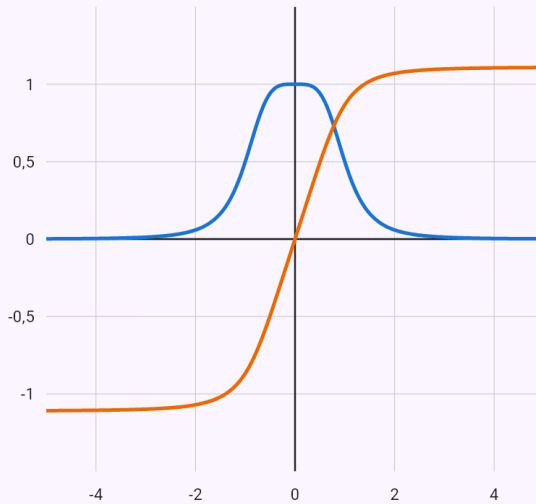
- Der Nenner hat keine reellen Nullstellen: ein Vielfaches seiner Ableitung im Zähler ergibt $\ln$, der Rest nach quadratischer Ergänzung $\arctan$

$$\int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx = -\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2 + \sqrt{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) \right)' + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan' \left(\sqrt{2} (x + 1) \right)$$

Graph



— $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

— $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left(\sqrt{2} (x + 1) \right)$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für $C = 0$ (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F ; wo negativ, fällt F .

Trigonometrische Funktionen

Vorrangig Formeln ($\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, Produkte in Summen), bei einer ungeraden Potenz die Substitution $t = \sin x$ oder $t = \cos x$, bei einer rationalen Funktion von Sinus und Kosinus eine Substitution nach der Parität, die Weierstraß-Substitution $t = \tan(x/2)$ erst zuletzt.

Beispiele

Eine ungerade Potenz des Sinus – die Substitution $t = \cos x$.

Eingabe: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

Ergebnis

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} .$$

Lösungsweg

- Eine ungerade Potenz – die Substitution $t = \cos x$,
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$dt = -\sin x dx$$

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \int (t^4 - t^2) dt$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale:

$$\int (t^4 - t^2) dt = \int t^4 dt + \int -t^2 dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int t^4 dt = \frac{t^5}{5}$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int -t^2 dt = -\int t^2 dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}$

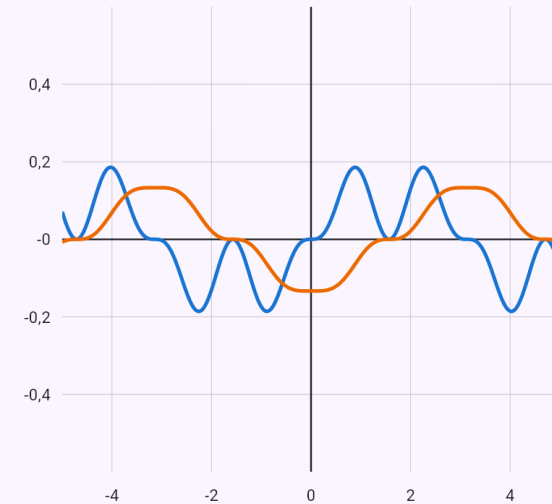
- Zurück zur ursprünglichen Variablen:

$$t = \cos x : \quad \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand:

$$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$

Graph



$$\begin{aligned} \text{--- } f(x) &= \cos^2 x \sin^3 x \\ \text{--- } F(x) &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \end{aligned}$$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für $C = 0$ (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F ; wo negativ, fällt F .

Hyperbelfunktionen

Grundintegrale ($\int \sinh x dx = \cosh x + C$, $\int 1/\cosh^2 x dx = \tanh x + C$, ...), $\int \tanh x dx$ über den Logarithmus der Ableitung, partielle Integration ($x \sinh x$, $\operatorname{arsinh} x$), Quadrate mit den Formeln $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$, $\tanh^2 x = 1 - 1/\cosh^2 x$; der Rest nach der Definition über Exponentialfunktionen.

Beispiele

Die Formel $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$.

Eingabe: `int(sinh(x)^2)`

Ergebnis

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Lösungsweg

- Wir verwenden die Formel $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:

$$\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$$

- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt:

$$\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$$

- Probe – die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand

$$\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} = \sinh^2 x$$

Wurzeln

Integrale mit der Wurzel einer linearen gebrochenen Funktion durch Substitution, mit der Wurzel eines quadratischen Terms durch eine Eulersche Substitution und binomische Integrale nach den Bedingungen von Tschebyschow – gilt keine davon, sagt die App, dass das Integral nicht elementar ist.

Beispiele

Eine Eulersche Substitution.

Eingabe: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Ergebnis

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$$

Lösungsweg

- Eulersche Substitution (Typ 1) $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$ - das Integral wird zu einem einer gebrochenrationalen Funktion von t

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt$$

- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \int t dt + \int \frac{2}{t} dt + \int \frac{1}{t^3} dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int t dt = \frac{t^2}{2}$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{2}{t} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t|$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2}$

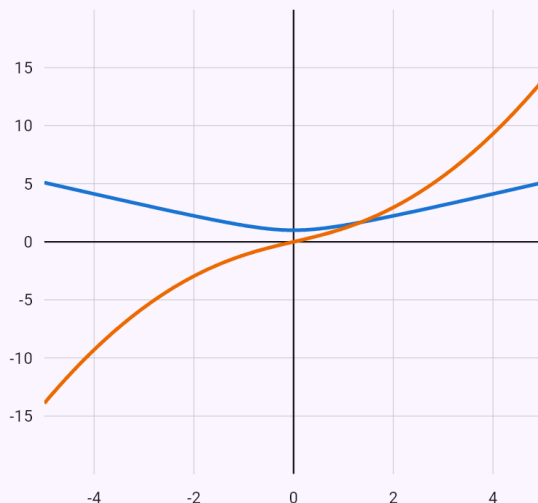
- Zurück zur ursprünglichen Variablen

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} : \quad \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} + \frac{(-x^2 - 1)}{2}$$

- Probe - die Ableitung des Ergebnisses ist der Integrand

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} \right)' = \sqrt{x^2 + 1}$$

Graph



$$\text{— } f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{— } F(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$$

Der Integrand f und die Stammfunktion F für C = 0 (ein anderes C verschiebt sie nach oben oder unten). Wo f positiv ist, steigt F; wo negativ, fällt F.

Bekannte Einschränkungen

- Bei manchen Integralen finden wir das Ergebnis ohne Lösungsweg – die App sagt es im Lösungsweg.
- Eine Berechnung ohne Lösungsweg, die zu lange dauert, bricht die App ab und sagt es.

Bestimmte Integrale und ihre Anwendungen

Ein bestimmtes Integral berechnet die App mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und zeichnet die Fläche unter dem Graphen – den Teil oberhalb der x-Achse in einer anderen Farbe als den Teil darunter. Sie kann auch uneigentliche Integrale und Anwendungen: Fläche, Bogenlänge, Volumen und Mantelfläche eines Rotationskörpers, auch für Kurven in Parameterform und in Polarkoordinaten.

Bestimmtes Integral

Die Stammfunktion findet die App wie beim unbestimmten Integral und setzt die Grenzen ein. Bei einer Substitution rechnet sie die Grenzen gleich um. Hat das Integral keine elementare Stammfunktion, berechnet sie es numerisch.

Eingabe

`int(x^2, x, 0, 3)`

Ein Integral mit Variable und Grenzen.

`\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx`

Vom Foto oder in LaTeX.

`x^2`

Eine Funktion mit dem Chip „Integrieren“ – die Grenzen in die Felder eintragen.

Beispiele

Substitution mit umgerechneten Grenzen.

Eingabe: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Ergebnis

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = \sin 1 \approx 0,8415$$

Lösungsweg

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int 3x^2 \cos(x^3) dx = 3 \int x^2 \cos(x^3) dx$$

- Substitution $t = x^3$, $dt = 3x^2 dx$:

$$\int x^2 \cos(x^3) dx = \int \frac{\cos t}{3} dt$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{\cos t}{3} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \cos t dt = \sin t$

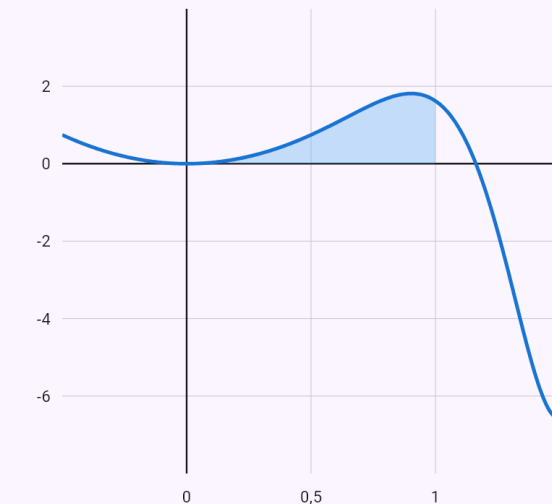
- Mit der Substitution werden auch die Grenzen umgerechnet – keine Rücksubstitution nötig:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$$

- Hauptsatz (Newton–Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$$

Graph



$$f(x) = 3x^2 \cos(x^3)$$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (-)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Uneigentliche Integrale

Eine unendliche Grenze oder eine unbeschränkte Funktion behandelt die App mit einem Grenzwert der Stammfunktion und sagt, ob das Integral konvergiert oder divergiert. Lässt sich dieser Grenzwert nicht berechnen, entscheidet sie mit einem Vergleichskriterium.

Beispiele

Eine unendliche obere Grenze.

Eingabe: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Ergebnis

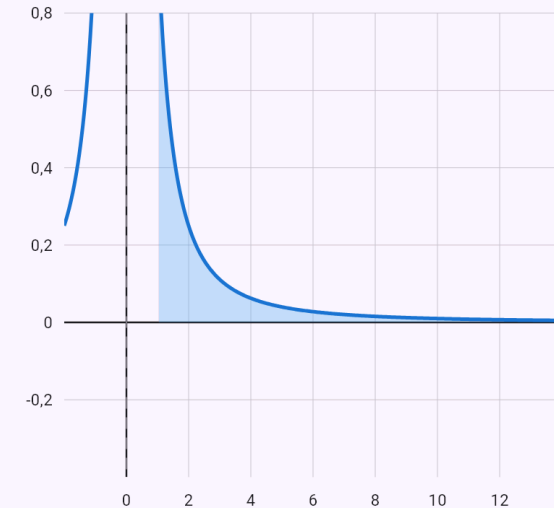
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Lösungsweg

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$
- Ein uneigentliches Integral – an einer unendlichen Grenze und wo die Funktion unbeschränkt ist, nehmen wir den Grenzwert der Stammfunktion. Die Grenzwerte sind endlich, das Integral konvergiert

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Graph



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (-)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Eine an der unteren Grenze unbeschränkte Funktion.

Eingabe: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Ergebnis

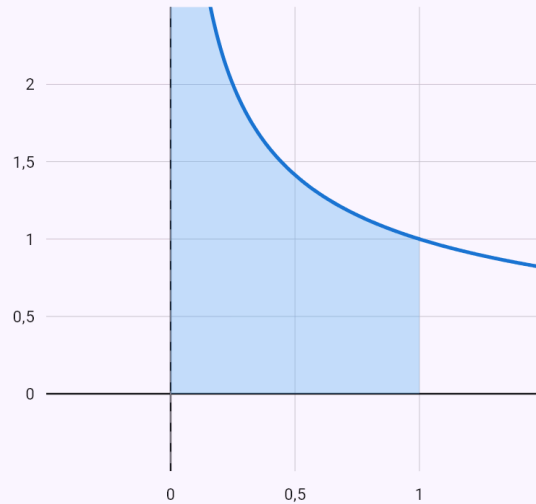
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Lösungsweg

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$
- Ein uneigentliches Integral – an einer unendlichen Grenze und wo die Funktion unbeschränkt ist, nehmen wir den Grenzwert der Stammfunktion. Die Grenzwerte sind endlich, das Integral konvergiert

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Graph



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

über der x-Achse (+) unter der x-Achse (-)

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse – der Teil über der Achse zählt positiv, der Teil darunter negativ.

Fläche unter einer Kurve und zwischen Kurven

Die Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse oder zwischen zwei Kurven berechnet die App als Integral des Betrags der Differenz – Teile oberhalb und unterhalb zählen beide positiv. Die Grenzen müssen Sie nicht angeben: sie findet sie als Schnittpunkte der Kurven.

Eingabe

`fläche(x^2, x)`

Die Fläche zwischen zwei Kurven, Grenzen aus den Schnittpunkten.

`fläche(sin x, 0, pi)`

Die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse auf einem Intervall.

`x^2`

Eine Funktion mit dem Chip „Integrieren“ → „Fläche zwischen Kurven“; zweite Kurve und Grenzen in die Felder eintragen.

Beispiele

Die Fläche zwischen einer Parabel und einer Geraden.

Eingabe: x^2 Fläche zwischen Kurven, zweite Kurve x

Ergebnis

$$S = \frac{1}{6}$$

Lösungsweg

- Die Grenzen sind die Schnittpunkte der Kurven:

$$x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$$

- Der Flächeninhalt zwischen den Kurven (Teile oberhalb und unterhalb zählen positiv), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$:

$$S = \int_0^1 |x^2 - x| dx$$

- Der Ausdruck im Betrag wechselt auf dem Intervall sein Vorzeichen nicht – der Betrag danach aufgelöst:

$$\int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale:

$$\int (-x^2 + x) dx = \int -x^2 dx + \int x dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int -x^2 dx = - \int x^2 dx$$

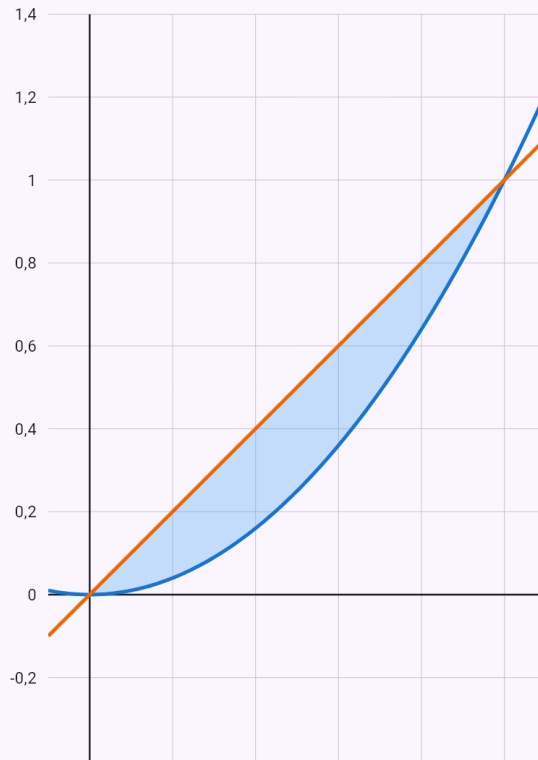
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- Hauptsatz (Newton–Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

Graph



0 0,2 0,4 0,6 0,8 1

— $f(x) = x^2$
— $g(x) = x$

Die schattierte Fläche – ihr Inhalt ist das Ergebnis (Teile ober- und unterhalb der Achse zählen positiv).

Bogenlänge

Die Länge eines Graphen auf einem Intervall berechnet die App mit der Formel $l = \int \sqrt{1 + f'^2} dx$. Sie versucht, die Wurzel zu vereinfachen (beim Halbkreis ergibt sich der Arkussinus); hat das Integral keine elementare Stammfunktion, ist das Ergebnis numerisch.

Eingabe

`länge( $x^{(3/2)}$ , 0, 4)`

Die Bogenlänge auf einem Intervall.

Beispiele

Die Länge eines Halbkreises.

Eingabe: `sqrt(1 - x^2)` Bogenlänge, Grenzen -1 und 1

Ergebnis

$$l = \pi \approx 3,1416$$

Lösungsweg

- Die Bogenlänge

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

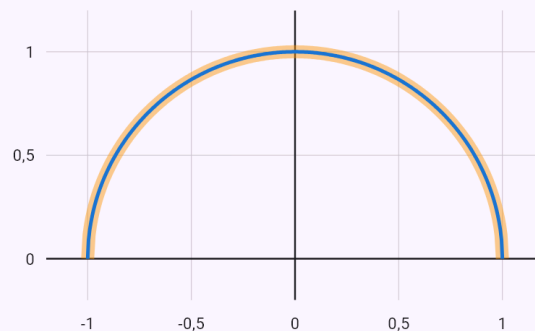
- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

- Ein uneigentliches Integral – an einer unendlichen Grenze und wo die Funktion unbeschränkt ist, nehmen wir den Grenzwert der Stammfunktion. Die Grenzwerte sind endlich, das Integral konvergiert

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x - \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Graph



$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Der hervorgehobene Bogen – seine Länge ist das Ergebnis.

Volumen eines Rotationskörpers

Das Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse berechnet die App mit der Formel $V = \pi \int f^2 dx$ (zwischen zwei Kurven als Kreisringe), um die y-Achse mit der Zylindermantelmethode. Den Körper zeigt sie auch in 3D – drehen Sie ihn mit dem Finger.

Eingabe

`volumen(sqrt(x), 0, 4)`

Das Volumen des Körpers bei Rotation um die x-Achse.

`volumen(x^2, 0, 2, y)`

Rotation um die y-Achse.

Beispiele

Ein Rotationsparaboloid.

Eingabe: `sqrt(x)` Volumen eines Körpers, Grenzen 0 und 4

Ergebnis

$$V = 8\pi \approx 25,1327$$

Lösungsweg

- Das Volumen des Rotationskörpers um die x-Achse,
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx: V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Hauptsatz (Newton–Leibniz), $F(b) - F(a)$:
$$\int_0^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8 - 0 = 8$$
- Der Wert des Integrals mal die Konstante davor:
$$V = \pi \cdot 8 = 8\pi$$

Rotationskörper



Mantelfläche eines Rotationskörpers

Die Mantelfläche berechnet die App mit der Formel $S = 2\pi \int f \sqrt{1 + f'^2} dx$; das Produkt unter der Wurzel vereinfacht sich oft (bei der Kugel ergibt sich eine Konstante).

Eingabe

`oberfläche(sqrt(4 - x^2), -2, 2)`

Die Mantelfläche bei Rotation um die x-Achse.

Beispiele

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius 2.

Eingabe: `sqrt(4 - x^2)` Oberfläche eines Körpers, Grenzen -2 und 2

Ergebnis

$$S = 16\pi \approx 50,2655$$

Lösungsweg

- Die Mantelfläche des Rotationskörpers um die x-Achse

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-2}^2 2 dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 2 dx = 2x$

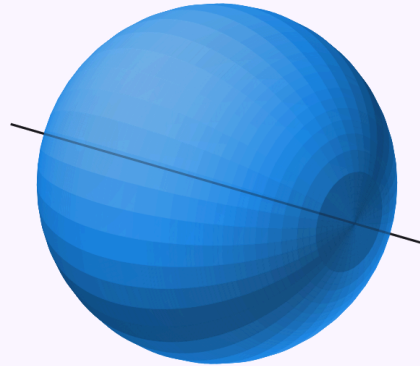
- Hauptsatz (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$:

$$\int_{-2}^2 2 dx = [2x]_{-2}^2 = 4 - (-4) = 8$$

- Der Wert des Integrals mal die Konstante davor:

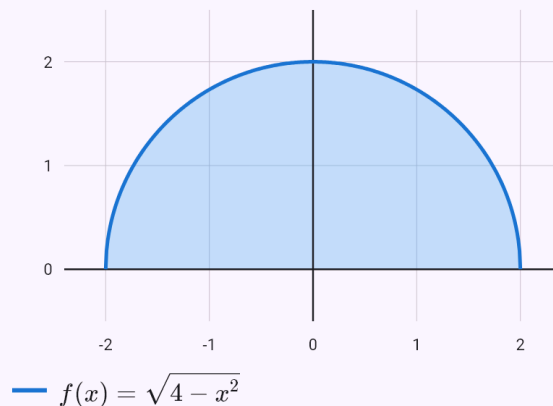
$$S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

Rotationskörper



Die schattierte Fläche dreht sich um die x-Achse – es entsteht der Körper oben; dreh ihn mit dem Finger.

Graph



Kurven in Parameterform und in Polarkoordinaten

Eine Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ schreiben Sie auf zwei Zeilen, eine Kurve in Polarkoordinaten als $r = \rho(\varphi)$. Der Chip „Integrieren“ bietet dann Fläche, Länge, Volumen und Mantelfläche an; die Grenzen des Parameters sind optional (ohne sie von 0 bis 2π). Volumen und Mantelfläche berechnet die App durch Rotation des Kurventeils oberhalb der x-Achse um die x-Achse.

Eingabe

$$x = t - \sin(t)$$

$$y = 1 - \cos(t)$$

Eine Kurve in Parameterform auf zwei Zeilen.

$$r = 1 + \cos(\varphi)$$

Eine Kurve in Polarkoordinaten (auch $r^2 = \dots$ für eine Lemniskate).

länge($x=\cos(t)^3$, $y=\sin(t)^3$, t , 0 , 2π)

Die geschriebene Form mit Parameter und Grenzen.

Beispiele

Die Fläche unter einem Zykloidenbogen.

Eingabe: $x = t - \sin(t)$

$y = 1 - \cos(t)$ **Fläche**

Ergebnis

$$S = 3\pi \approx 9,4248$$

Lösungsweg

- Die Ableitungen nach dem Parameter:

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$$

- Der Flächeninhalt unter einer Parameterkurve (bei einer geschlossenen Kurve innerhalb) für $t \in [0; 2\pi]$,

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \right|$$

$$S = \left| \int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt \right|$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \int 1 dt + \int -2 \cos t dt -$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 1 dt = t$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int -2 \cos t dt = -2 \int \cos t dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \cos t dt = \sin t$

- Wir verwenden die Formel $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:

$$\int \cos^2 t dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2}$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt$$

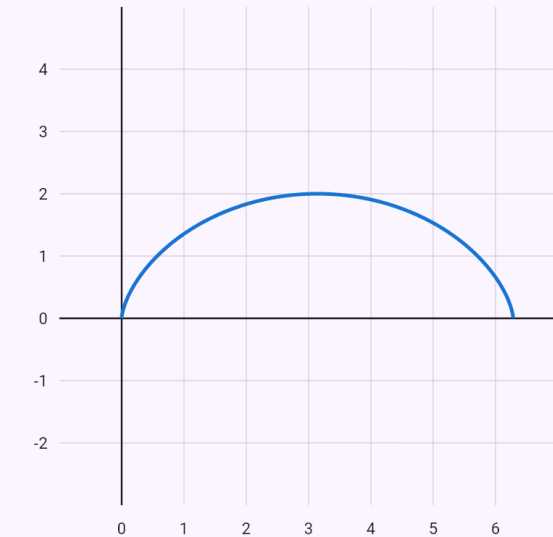
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt:

$$\int \cos(2t) dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$

- Hauptsatz (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{\sin(2t)}{4} \right]$$

Graph



$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

Die parametrisch (oder in Polarkoordinaten) gegebene Kurve, gezeichnet für die gewählten Grenzen des Parameters.

Die Länge einer Kardioide.

Eingabe: $r = 1 + \cos(\phi)$ **Bogenlänge**

Ergebnis

$$l = 8$$

Lösungsweg

- Die Ableitungen nach dem Parameter: $\rho'(\varphi) = -\sin \varphi$

- Die Länge einer Kurve in Polarkoordinaten für

$$\varphi \in [0; 2\pi], \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi$$

- Wir teilen das Intervall an den Nullstellen der Ausdrücke im Betrag (π) und lösen den Betrag in jedem Teil nach dem Vorzeichen auf

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen

$$\int 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt:

$$\int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

- Hauptsatz (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{\pi} 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen

$$\int -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = -2 \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt:

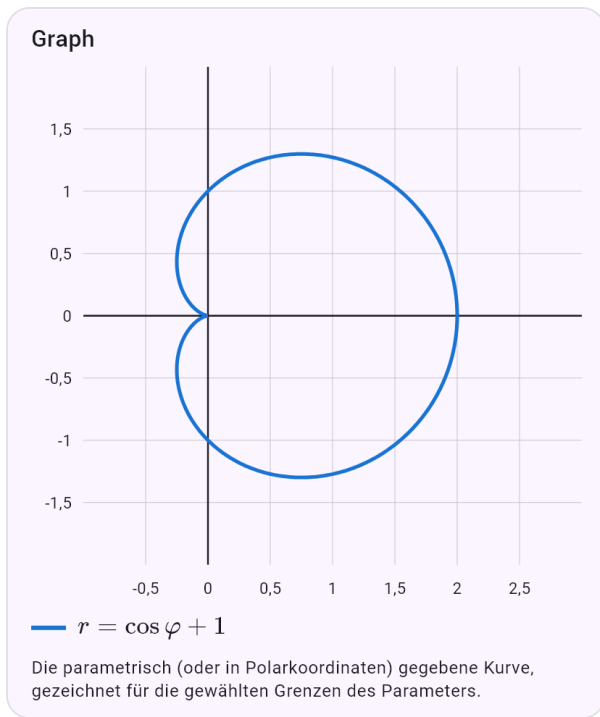
$$\int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

- Hauptsatz (Newton-Leibniz), $F(b) - F(a)$

$$\int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[-4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) = 4$$

- Die Werte der Teile addiert:

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$



Durch eine Gleichung gegebene Kurven

Bei einer Gleichung in x und y ($x^3 + y^3 = 3xy$) bietet der Chip „Integrieren“ Fläche, Länge, Volumen und Mantelfläche an. Ohne Grenzen nimmt er die ganze geschlossene Kurve: Kreis und Ellipse in Parameterform über $\cos$ und $\sin$, eine Schleife durch den Ursprung (das kartesische Blatt) über die Geraden $y = tx$ – den Flächeninhalt der Schleife dann exakt aus den Sektoren, Länge, Volumen und Mantelfläche numerisch. Mit Grenzen in x verwendet er den oberen Zweig $y = f(x)$.

Eingabe

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Eine geschlossene Kurve – der Chip „Integrieren“ ohne Grenzen.

$$y^2 = x^3$$

Eine nicht geschlossene Kurve – der Chip „Integrieren“ mit Grenzen in x (der obere Zweig $y = x^{3/2}$).

Beispiele

Der Flächeninhalt der Schleife des kartesischen Blatts – über die Geraden $y = tx$ und die Sektoren, $S =$

3/2.

Eingabe: $x^3 + y^3 = 3xy$

Integrieren → Fläche

Ergebnis

$$S = \frac{3}{2}$$

Lösungsweg

- Die Schleife durch den Ursprung in Parameterform über die Geraden $y = tx$ – in die Gleichung eingesetzt, x ausgedrückt

$$y = tx \Rightarrow x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}, \quad t \in (0; \infty)$$

- Der Flächeninhalt der Schleife aus den Sektoren vom Ursprung: $S = \frac{1}{2} \int (x \cdot y' - y \cdot x') dt$, auf der Geraden $y = tx$ ist $x \cdot y' - y \cdot x' = x^2$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen

$$\int \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \frac{9}{2} \int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt$$

- Substitution $u = t^3 + 1, du = 3t^2 dt$:

$$\int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt = \int \frac{1}{3u^2} du$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{1}{3u^2} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2} du$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}$

- Zurück zur ursprünglichen Variablen:

$$-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3(t^3 + 1)}$$

- Ein uneigentliches Integral – an einer unendlichen Grenze und wo die Funktion unbeschränkt ist, nehmen wir den Grenzwert der Stammfunktion. Die Grenzwerte sind endlich, das Integral konvergiert

$$\int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2(t^3 + 1)} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

Graph



— $x^3 + y^3 = 3xy$
 — $x = \frac{3t}{t^3 + 1}, y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$

Die ganze durch die Gleichung gegebene Kurve; hervorgehoben ist der Teil, mit dem gerechnet wird.

Bekannte Einschränkungen

- Die Bogenlänge von $y = \sqrt[3]{x}$ (und ähnlichen Kurven) berechnen wir nur numerisch – sie führt auf ein elliptisches Integral, das keine elementare Stammfunktion hat.
- Bei Kurven in Parameterform und in Polarkoordinaten fehlen noch die eingefärbte Fläche und der 3D-Körper; Rotation nur um die x-Achse.
- Rotation um die y-Achse nur für einen Bereich auf einer Seite der Achse.
- Bei impliziten Kurven ohne Grenzen werden nur Kreis, Ellipse und eine Schleife durch den Ursprung unterstützt; Rotation nur um die x-Achse.

Unendliche Reihen

Bei einer Zahlenreihe prüft die App zuerst das notwendige Konvergenzkriterium (Nullfolge) und wählt dann ein Kriterium nach der Form der Reihe – geometrische Reihe, $\sum 1/n^p$, Quotienten-, Wurzel-, Grenzwertvergleichs-, Integral- oder Leibniz-Kriterium; bei einer alternierenden Reihe unterscheidet sie absolute und bedingte Konvergenz. Wo es geht, summiert sie die Reihe. Der Graph zeigt die Glieder und die Partialsummen.

Zahlenreihen

Die Summe findet die App bei geometrischen und Teleskopreihen, bei Reihen $\sum P(n)q^n$ und bei bekannten Reihen ($\sum 1/n^2 = \pi^2/6$); sonst berechnet sie sie numerisch. Eine endliche Summe wird wie in der Schule berechnet – Teleskopsumme, arithmetisch, geometrisch, sonst Glied für Glied. Auch eine Gleichung mit der Summe einer geometrischen Reihe wird gelöst und die Konvergenzbedingung $|q| < 1$ geprüft.

Eingabe

<code>summe(1/n^2)</code>	Das allgemeine Glied; der Index n ab 1 (auch sum).
<code>summe(1/n^2, n, 1, oo)</code>	Mit Index und Startwert.
<code>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}</code>	Vom Foto oder in LaTeX.
<code>1/n^2</code>	Das allgemeine Glied mit dem Chip „Reihe“ – den Startindex in das Feld eintragen.
<code>summe(2k+1, k, 1, 100)</code>	Eine endliche Summe – mit Index, unterer und oberer Grenze.

Beispiele

Die Reihe $\sum 1/n^2$ – konvergiert, Summe $\pi^2/6$.

Eingabe: `sum(1/n^2)`

Ergebnis

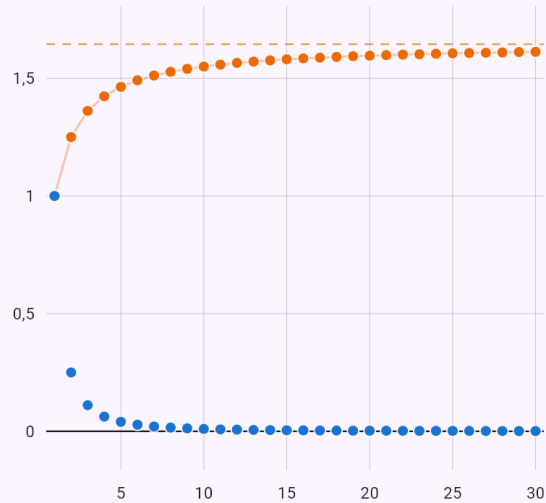
Die Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$$

Lösungsweg

- Die notwendige Konvergenzbedingung ist erfüllt (sie entscheidet allein nicht): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist von der Form $\sum 1/n^p$ mit $p = 2 > 1$ – sie konvergiert.
- Die Summe einer bekannten Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Graph



● Glieder a_n ● Partialsummen s_n — die Summe

Die Punkte sind die Glieder a_n und die Partialsummen $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Konvergiert die Reihe, gehen die Glieder gegen null und die Partialsummen gegen ihre Summe.

Das Leibniz-Kriterium – bedingt konvergent.

Eingabe: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Ergebnis

Die Reihe konvergiert, aber nicht absolut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0,6931$$

Lösungsweg

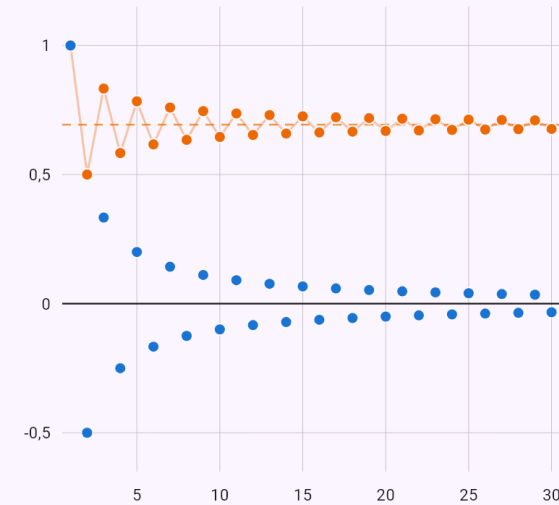
- Die notwendige Konvergenzbedingung ist erfüllt (sie entscheidet allein nicht): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Die Glieder haben verschiedene Vorzeichen – zuerst die absolute Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
- Die harmonische Reihe divergiert – die Glieder nach Zweierpotenzen gruppiert, jede Gruppe mindestens $1/2$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots > 1 + \frac{1}{2}$$
- Leibniz-Kriterium: $|a_n| = \frac{1}{n}$ fällt und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ – die Reihe konvergiert.

- Ergebnis: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut (nach dem Leibniz-Kriterium).
- Die Summe einer bekannten Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Graph



● Glieder a_n ● Partialsummen s_n — die Summe

Die Punkte sind die Glieder a_n und die Partialsummen $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Konvergiert die Reihe, gehen die Glieder gegen null und die Partialsummen gegen ihre Summe.

Das Quotientenkriterium und die Summe.

Eingabe: `sum(n/2^n)`

Ergebnis

Die Reihe konvergiert.

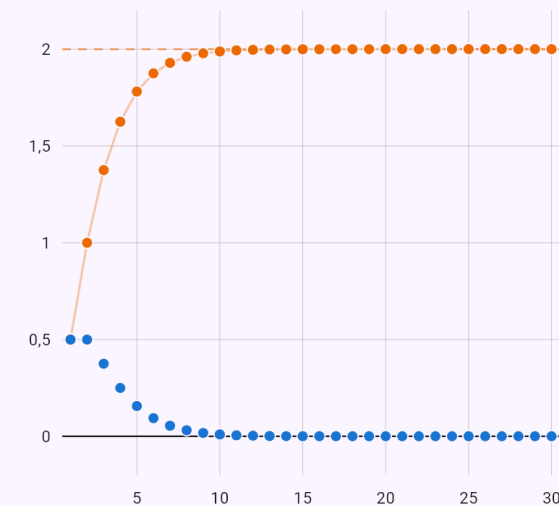
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Lösungsweg

- Die notwendige Konvergenzbedingung ist erfüllt (sie entscheidet allein nicht): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Quotientenkriterium (d'Alembert) – die Reihe konvergiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$
- Eine Reihe $\sum P(n) \cdot q^n$, summiert durch Ableiten der geometrischen Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$, $s = 2$

Graph



● Glieder a_n ● Partialsummen s_n — die Summe

Die Punkte sind die Glieder a_n und die Partialsummen $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Konvergiert die Reihe, gehen die Glieder gegen null und die Partialsummen gegen ihre Summe.

Das notwendige Kriterium ist nicht erfüllt – die Reihe divergiert.

Eingabe: `sum(n/(n+1))`

Ergebnis

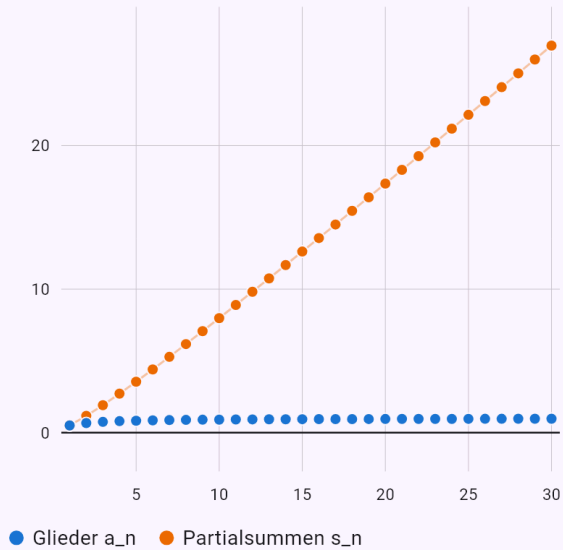
Die Reihe divergiert.

Lösungsweg

- Die notwendige Konvergenzbedingung ist nicht erfüllt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

Graph



Die Punkte sind die Glieder a_n und die Partialsummen s_n = a_1 +

... + a_n. Konvergiert die Reihe, gehen die Glieder gegen null und die Partialsummen gegen ihre Summe.

Teleskopsumme – das erste und das letzte Glied bleiben.

Eingabe: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Ergebnis

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 10$$

Lösungsweg

- Teleskopsumme – benachbarte Glieder heben sich auf, nur das erste und das letzte bleiben:

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 11 - 1 = 10$$

Gleichung mit der Summe einer geometrischen Reihe.

Eingabe: `sum((2^x)^n, n, 1, oo) = 1`

Ergebnis

$$x = -1$$

Lösungsweg

- Die Reihe ist geometrisch mit $q = 2^x$ und konvergiert für $|2^x| < 1$; ihre Summe: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Lösen: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ erfüllt die Konvergenzbedingung: $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$

Potenzreihen

Bei einer Potenzreihe bestimmt die App den Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium, untersucht die Randpunkte als Zahlenreihen und gibt den Konvergenzbereich an; wo es geht, auch die Summe. Der Graph zeigt die Partialsummen mit einem Schieberegler für die Anzahl der Glieder.

Beispiele

Der Konvergenzbereich $[-1; 1)$.

Eingabe: `sum(x^n/n)`

Ergebnis

$$x \in [-1; 1)$$

Lösungsweg

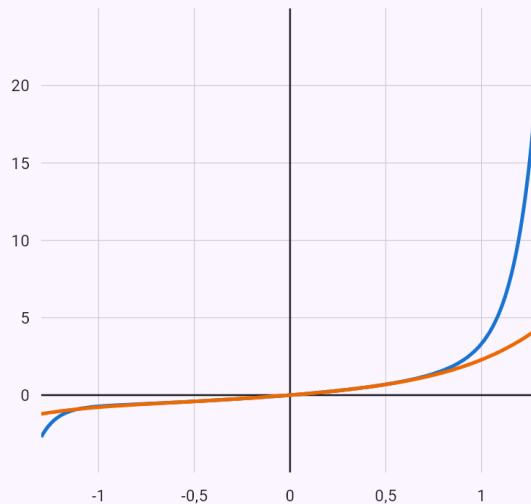
- Der Konvergenzradius $R = 1$ mit dem Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1$$

- Der Randpunkt $x = -1$: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut (nach dem Leibniz-Kriterium).
- Der Randpunkt $x = 1$: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert nach der Gruppierung der Glieder der harmonischen Reihe.
- Das Konvergenzintervall: $x \in [-1; 1)$

Graph

Glieder: 5



$$s_{15}(x) = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10}$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

Wähle mit dem Schieberegler die Anzahl der Glieder – die Partialsummen nähern sich der Summe nur im Konvergenzintervall.

Taylorreihe

Die Taylorreihe einer Funktion leitet die App aus bekannten Entwicklungen (e^x , $\sin x$, $\ln(1+x)$, ...) durch Einsetzen her und bestimmt ihren Konvergenzbereich.

Eingabe

`taylor(e^x, 0, oo)`

Funktion, Stelle und oo statt des Grades; oder der Chip „Taylorpolynom“ → „Reihe“.

Beispiele

Die Reihe von $\ln(1 + x)$ und ihr Konvergenzbereich.

Eingabe: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Ergebnis

$$\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

Lösungsweg

- Aus der bekannten Entwicklung

$$\ln(1 + u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n} \text{ mit } u = x:$$

$$\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

- Der Konvergenzradius $R = 1$ mit dem Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{xn}{n+1} \right| = |x| < 1$$

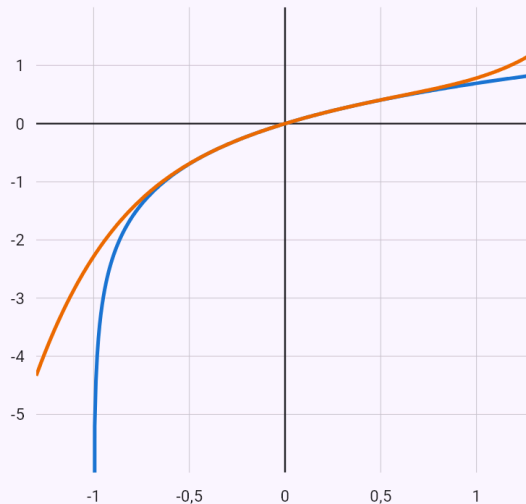
- Der Randpunkt $x = -1$: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ divergiert nach der Gruppierung der Glieder der harmonischen Reihe.

- Der Randpunkt $x = 1$: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut (nach dem Leibniz-Kriterium).

- Das Konvergenzintervall: $x \in (-1; 1]$

Graph

Glieder: 5



$$s(x) = \ln(x + 1)$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

Wähle mit dem Schieberegler die Anzahl der Glieder – die Partialsummen nähern sich der Summe nur im Konvergenzintervall.

Fourierreihen

Die App stellt die Fourierreihe einer Funktion auf einem Intervall als einer Periode auf (ohne Angabe auf $[-\pi; \pi]$) oder die Sinus- bzw. Kosinusreihe einer Funktion auf $[0; L]$. Die Funktion kann auch stückweise gegeben sein.

Die Koeffizienten berechnet sie über Integrale mit vollständigem Lösungsweg (partielle Integration mit dem Parameter n), setzt $\sin n\pi = 0$ und $\cos n\pi = (-1)^n$ ein und nutzt bei geraden und ungeraden Funktionen die Symmetrie. An Sprungstellen bestimmt sie die Summe der Reihe nach dem Satz von Dirichlet, und durch Einsetzen eines Punktes und mit der Parsevalschen Gleichung leitet sie Summen von Zahlenreihen her (etwa $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$). Der Graph zeigt die periodische Fortsetzung der Funktion und die Partialsummen mit einem Schieberegler.

Eingabe

<code>fourier(x^2, -pi, pi)</code>	Funktion und Intervall.
<code>fouriersin(x, 0, pi)</code>	Die Sinusreihe (fouriercos – die Kosinusreihe).
<code>-1, -pi < x < 0</code> <code>1, 0 < x < pi</code>	Eine stückweise Funktion zeilenweise, mit dem Chip „Fourierreihe“.
<code>x^2</code>	Eine Funktion mit dem Chip „Fourierreihe“ – Art der Reihe und Intervall wählen Sie dort.

Beispiele

Eine gerade Funktion – nur Kosinusse; die Summen $\sum 1/n^2$ und $\sum 1/n^4$.

Eingabe: `fourier(x^2)`

Ergebnis

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad ;$$

Lösungsweg

- Das Intervall $[-\pi; \pi]$ ist eine Periode: $T = 2\pi$, die halbe Periode $l = \pi$. Wir suchen die Reihe mit den Koeffizienten

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Die Funktion ist gerade, $f(-x) = x^2 = f(x)$, also sind die Sinuskoeffizienten null und die übrigen genügt es über das halbe Intervall zu berechnen

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

- Der Koeffizient a_0 : $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$
- Wir setzen die Grenzen ein: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
- Der Koeffizient a_n : $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$
- Partielle Integration ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = \cos(nx)$, also $u' = 2x$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$
$$\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
$$\int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx) dx$$
- Partielle Integration ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = \sin(nx)$, also $u' = 1$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$
$$\int x \sin(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n} dx$$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
$$\int -\frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx) dx$$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$),

das Ergebnis wird daher durch a geteilt:

$$\int \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

• Für ganzzahliges n gilt $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

• Wir setzen die Grenzen ein

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_0^\pi = \frac{4}{n^3}$$

• Wir setzen die Koeffizienten in die Reihe ein

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

• Die periodische Fortsetzung der Funktion ist stetig, also ist die Summe der Reihe nach dem Satz von Dirichlet gleich $f(x)$ für $x \in [-\pi; \pi]$

• Einsetzen von $x = 0$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

• Einsetzen von $x = \pi$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

• Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

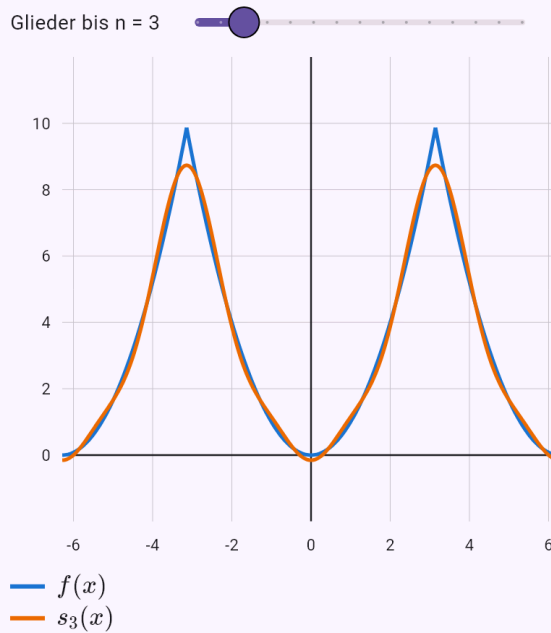
$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Die Funktion ist periodisch fortgesetzt. Mit dem Schieberegler fügst du Glieder der Reihe hinzu – die Partialsummen nähern sich der Funktion; an einer Sprungstelle schwingen sie über (Gibbssches Phänomen) und gehen durch den Mittelwert beider Seiten, als Punkt markiert.

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Graph

Glieder bis n = 3



Eine stückweise Funktion – Sprünge und das Gibbs-Phänomen.

Eingabe: $-1, -\pi < x < 0$

Ergebnis

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

Lösungsweg

- Das Intervall $[-\pi; \pi]$ ist eine Periode: $T = 2\pi$, die halbe Periode $l = \pi$. Wir suchen die Reihe mit den Koeffizienten

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Die Funktion ist ungerade, $f(-x) = -f(x)$, also sind das konstante Glied und die Kosinuskoeffizienten null und die Sinuskoeffizienten genügt es über das halbe Intervall zu berechnen

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- Der Koeffizient b_n : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt:

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Für ganzzahliges n gilt $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

- Wir setzen die Grenzen ein

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi}$$

- Wir setzen die Koeffizienten in die Reihe ein:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi} \sin(nx)$$

- Die Glieder mit geradem n sind null – es bleiben nur die ungeraden $n = 2k - 1$

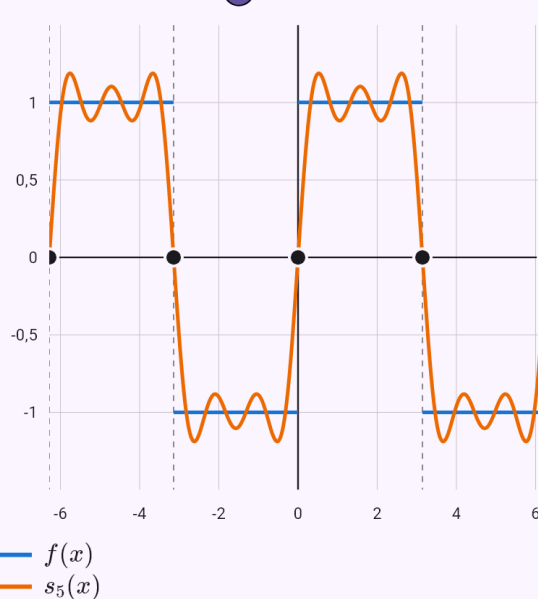
$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

- Nach dem Satz von Dirichlet ist die Summe der Reihe gleich $f(x)$ für $x \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$; an einer Unstetigkeitsstelle ist sie der Mittelwert der einseitigen Grenzwerte

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

Graph

Glieder bis $n = 5$ 

Die Funktion ist periodisch fortgesetzt. Mit dem Schieberegler fügst du Glieder der Reihe hinzu – die Partialsummen nähern sich der Funktion; an einer Sprungstelle schwingen sie über (Gibbssches Phänomen) und gehen durch den Mittelwert beider Seiten, als Punkt markiert.

Eine Sinusreihe und die Summe $1 - 1/3^3 + 1/5^3 - \dots = \pi^3/32$.

Eingabe: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Ergebnis

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

Lösungsweg

- Wir setzen die Funktion von $[0; \pi]$ ungerade und dann periodisch fort ($T = 2\pi$) – es entsteht die Sinusreihe

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \text{ wobei}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Der Koeffizient b_n : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx$
- Partielle Integration ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x(\pi - x)$, $v' = \sin(nx)$, also $u' = \pi - 2x$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$\int x(\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{x(x - \pi) \cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen

$$\int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx = \frac{1}{n} \int (2x - \pi) \cos(nx) dx$$

- Partielle Integration ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = 2x - \pi$, $v' = \cos(nx)$, also $u' = 2$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$\int (2x - \pi) \cos(nx) dx = \frac{(2x - \pi) \sin(nx)}{n} - \int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int \sin(nx) dx$$

- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt:

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Für ganzzahliges n gilt $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

- Wir setzen die Grenzen ein

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \cos(nx)}{n} - \frac{\pi x \cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x) \sin(nx)}{n^2} \right]$$

- Wir setzen die Koeffizienten in die Reihe ein:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \sin(nx)$$

- Die Glieder mit geradem n sind null – es bleiben nur die ungeraden $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

- Die periodische Fortsetzung der Funktion ist stetig, also ist die Summe der Reihe nach dem Satz von Dirichlet gleich $f(x)$ für $x \in [0; \pi]$

- Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt die Summe einer Zahlenreihe

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

- Aus der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \text{ folgt}$$

$$\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

Graph

Glieder bis n = 5



-6 -4 -2 0 2 4 6

— $f(x)$
— $s_5(x)$

Die Funktion ist periodisch fortgesetzt. Mit dem Schieberegler fügst du Glieder der Reihe hinzu – die Partialsummen nähern sich der Funktion; an einer Sprungstelle schwingen sie über (Gibbssches Phänomen) und gehen durch den Mittelwert beider Seiten, als Punkt markiert.

Bekannte Einschränkungen

- Eine unbeschränkte Funktion (etwa $\ln x$ auf $[0; 2\pi]$) lässt sich nicht entwickeln – die Reihe würde an der Stelle divergieren, an der die Funktion über alle Grenzen wächst.
- Führen die Koeffizienten auf ein Integral ohne elementare Stammfunktion ($\ln x$ auf $[1; 3]$), werden sie mit dem Integralsinus und Integralkosinus ausgedrückt.

Differentialgleichungen

Die App löst gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung: separierbare, lineare, exakte, homogene ($y' = f(y/x)$), Bernoullische Gleichungen und Gleichungen $y' = f(ax + by + c)$. Sie erkennt den Typ selbst und zeigt den Lösungsweg wie in der Schule – Trennung der Variablen, Variation der Konstanten oder integrierender Faktor, Substitution, Stammfunktion einer exakten Gleichung. Die Integrale im Lösungsweg haben eigene Schritte.

Höhere Ordnungen: lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten beliebiger Ordnung über die charakteristische Gleichung (auch mehrfache und komplexe Nullstellen), eine partikuläre Lösung nach der speziellen rechten Seite (auch Resonanz und Summe rechter Seiten) oder durch Variation der Konstanten, ein Anfangswertproblem in null auch mit der Laplace-Transformation (Chip „Methode“). Außerdem die Eulersche Gleichung mit $x = e^t$, $y^{(n)} = f(x)$ durch wiederholtes Integrieren und die Reduktion der Ordnung – wenn y fehlt ($p = y'$) oder x ($y' = p(y)$).

Die Gleichung $y' = y \cdot (a(x) \cdot \ln y + b(x))$ wird durch die Substitution $z = \ln y$ linear. Eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten wird gelöst, wenn sich eine Lösung erraten lässt (x^k , e^{cx} , ...): die zweite durch Reduktion der Ordnung (d'Alembert), die rechte Seite durch Variation der Konstanten. Die Ordnung wird auch um mehr als eins reduziert ($p = y^{(m)}$ mit einer Gleichung 2. Ordnung für p). Bei Parametern werden Fälle unterschieden – ein gedämpfter Oszillator nach dem Vorzeichen von $\delta^2 - \omega^2$ (Kriechfall, aperiodischer Grenzfall, Schwingfall), eine Resonanz ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ für $\omega = 2$) und das Vorzeichen einer Konstanten, von dem das Integral abhängt ($y'' = 2yy'$). Die Laplace-Transformation löst auch Anfangswertprobleme an einer anderen Stelle als 0 (Verschiebung $\tau = t - t_0$) und mit Parametern.

Das Ergebnis ist die allgemeine Lösung mit einer Konstanten C , bei höheren Ordnungen mit Konstanten $C_1, C_2, \dots$ (explizit, wo das nicht geht, implizit); mit Bedingungen die Lösung, die sie erfüllt – Anfangs- und Randbedingungen, auch die Fälle „keine Lösung“ und „unendlich viele Lösungen“. Durch Division verlorene konstante Lösungen findet die App ebenfalls. Jede Lösung wird durch Einsetzen in die Gleichung geprüft. Der Graph zeigt bei 1. Ordnung das Richtungsfeld und Lösungen für verschiedene C , bei höheren Ordnungen Lösungen für verschiedene Konstanten; bei einer autonomen Gleichung 2. Ordnung (ohne x) zeigt ein Umschalter auch die Phasenebene (y, y').

Eingabe

$$y' = x*y$$

Die Ableitung mit Strich.

$$dy/dx = x \cdot y^2$$

Leibniz-Schreibweise – sie nennt auch die Variable (dm/dt , dT/dt).

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$	Schreibweise aus einem Foto.
$(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$	Die Form $M dx + N dy = 0$ (exakte Gleichung).
$y' = y^2 + 1, y(0) = 1$	Eine Anfangsbedingung nach einem Komma oder in der nächsten Zeile.
$dm/dt = m + 2, m(0) = 0$	Funktion und Variable können beliebige Buchstaben sein.
$y'' - 3y' + 2y = 3e^{(2x)}$	Eine Gleichung höherer Ordnung – die Ableitungen mit mehreren Strichen.
$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$	Höhere Ableitungen als $y^{(4)}$ (auch vom Foto).
$y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$	Anfangsbedingungen $y(0), y'(0)$ – oder Randbedingungen in verschiedenen Punkten.
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	Newtons Punkte (Ableitungen nach der Zeit t) und griechische Parameter.

Beispiele

Getrennte Variablen – die allgemeine Lösung und das Richtungsfeld.

Eingabe: $y' = x \cdot y$

Ergebnis

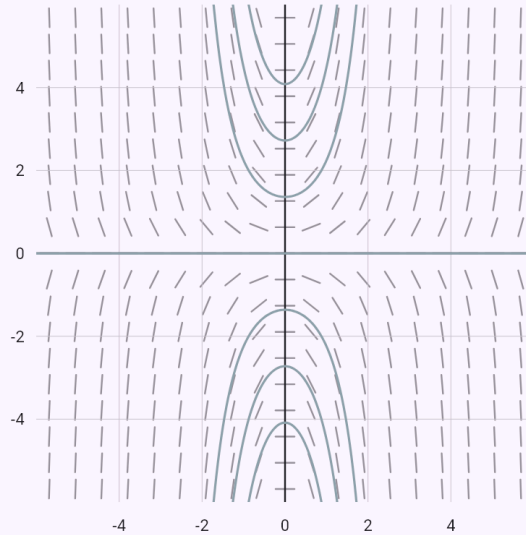
$$y = C e^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine Gleichung mit getrennten Variablen – die rechte Seite ist ein Produkt einer Funktion der Variablen und einer Funktion der Unbekannten: $y' = xy$
- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $y \neq 0$): $\frac{dy}{y} = x dx$
- Wir integrieren beide Seiten: $\int \frac{dy}{y} = \int x dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form:
 $\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante $\pm e^C$ heißt wieder C : $y = C e^{\frac{x^2}{2}}$
- Die konstante Lösung $y = 0$, die wir durch das Dividieren ausgeschlossen haben, ist in der allgemeinen Lösung für $C = 0$ enthalten.

- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = C x e^{\frac{x^2}{2}}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.

Graph



— Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Die Anfangsbedingung bestimmt die Konstante C.

Eingabe: $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$

Ergebnis

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

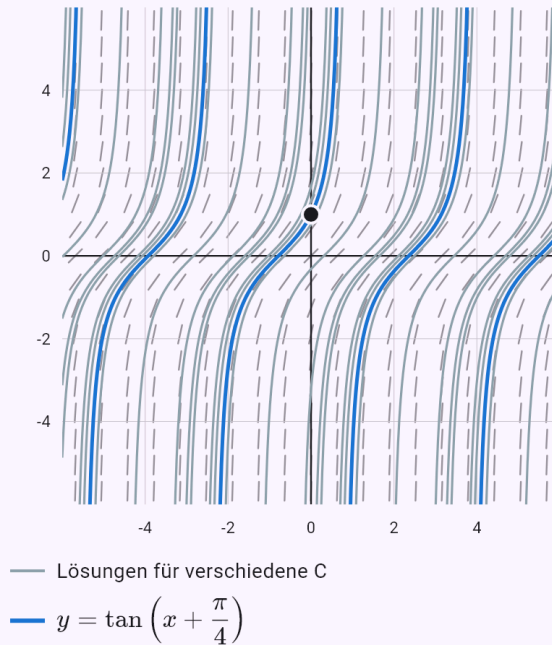
Lösungsweg

- Eine Gleichung mit getrennten Variablen – die rechte Seite ist ein Produkt einer Funktion der Variablen und einer Funktion der Unbekannten: $y' = y^2 + 1$
- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2 + 1} = dx$
- Wir integrieren beide Seiten: $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan y$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 1 dx = x$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $\arctan y = x + C$
- Wir stellen die Lösung explizit dar: $y = \tan(x + C)$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ein: $1 = \tan C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall. Hervorgehoben ist die Lösung der Anfangsbedingung; der Punkt ist die Anfangsbedingung.

- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.

Graph



Eine lineare Gleichung durch Variation der Konstanten.

Eingabe: $y' + 2y = e^x$

Variation der Konstanten

Ergebnis

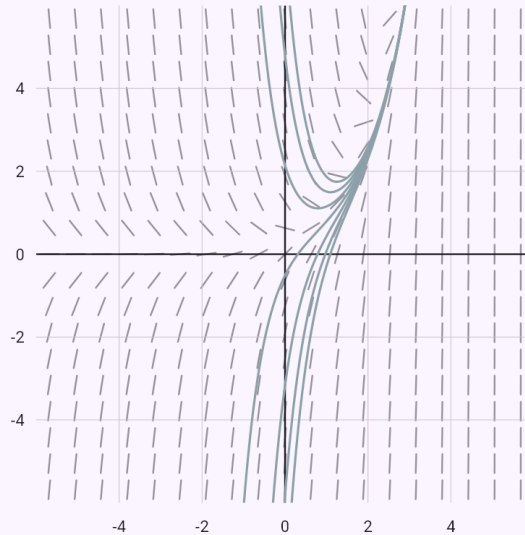
$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung 1. Ordnung $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:
 $y' + 2y = e^x$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y' + 2y = 0$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 2 dx = 2x$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $y = C(x)e^{-2x}$; eingesetzt in die Gleichung:
 $C'(x)e^{-2x} = e^x$
- Daraus $C'(x) = e^{3x}$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt: $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Wir integrieren: $C(x) = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Die allgemeine Lösung: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$

- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.

Graph



— Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Dieselbe Gleichung mit integrierendem Faktor.

Eingabe: $y' + 2y = e^x$

Integrierender Faktor

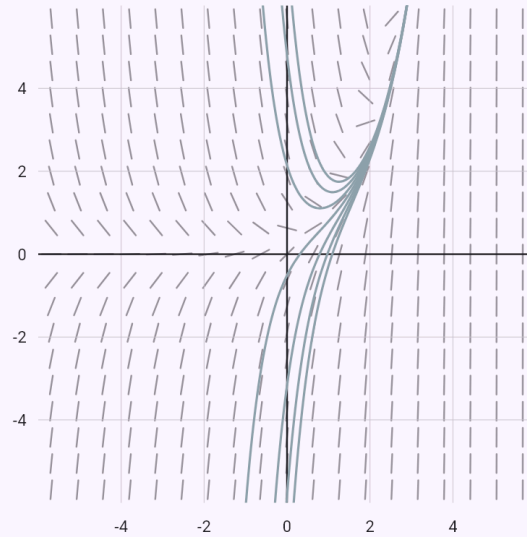
Ergebnis

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung 1. Ordnung $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:
 $y' + 2y = e^x$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 2 dx = 2x$
- Der integrierende Faktor: $\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$
- Wir multiplizieren mit dem integrierenden Faktor – die linke Seite ist die Ableitung eines Produkts:
 $(ye^{2x})' = e^{3x}$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear $(ax + b)$, das Ergebnis wird daher durch a geteilt: $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Wir integrieren beide Seiten: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Die allgemeine Lösung: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.

Graph



— Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Eine homogene Gleichung – die Substitution $u = y/x$.

Eingabe: $y' = (x - y)/(x + y)$

Ergebnis

$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine homogene Gleichung – die rechte Seite hängt nur vom Quotienten y/x ab: $y' = \frac{x-y}{x+y}$

- Die Substitution $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $y' = u + xu'$ führt die Gleichung über in $xu' = -u - 1 + \frac{2}{u+1}$

- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $u^2 + 2u - 1 \neq 0$): $\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{x} dx$

- Wir integrieren beide Seiten:
$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = \int -\frac{1}{x} dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:
$$\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du$$

- Im Zähler steht die Ableitung des Nenners (oder ihr Vielfaches), $f(x) = -u^2 - 2u + 1$, nach der Formel
$$\int \frac{f'(u)}{f(u)} du = \ln |f(u)| + C$$

$$\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\frac{1}{2} \int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1} du = -\frac{\ln}{2}$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int -\frac{1}{x} dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

- Die allgemeine Lösung in impliziter Form:

$$\frac{\ln |-u^2 - 2u + 1|}{2} = C - \ln |x|$$

- Wir entlogarithmieren – die Konstante $\pm e^C$ heißt wieder

$$C: -u^2 - 2u + 1 = \frac{C}{x^2}$$

- Die konstante Lösung $u = -1 - \sqrt{2}$, die wir durch das Dividieren ausgeschlossen haben, ist in der allgemeinen Lösung für $C = 0$ enthalten.

- Die konstante Lösung $u = -1 + \sqrt{2}$, die wir durch das Dividieren ausgeschlossen haben, ist in der allgemeinen Lösung für $C = 0$ enthalten.

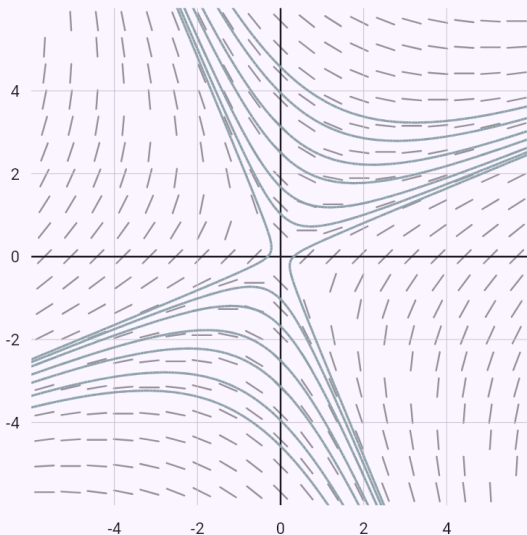
- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten:

$$\frac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \frac{C}{x^2}$$

- Die allgemeine Lösung in impliziter Form:

$$x^2 - 2xy - y^2 = C$$

Graph



— Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Eine Bernoullische Gleichung – die Substitution $z = y^{1-n}$ und die konstante Lösung $y = 0$.

Eingabe: $xy' - y = -xy^2$

Ergebnis

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Lösungsweg

- Eine Bernoullische Gleichung $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$:
 $y' - \frac{y}{x} = -y^2$

- Die Substitution $z = \frac{1}{y}$, $z' = -1 \cdot \frac{1}{y^2} y'$ führt die Gleichung über in $z' + \frac{z}{x} = 1$

- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $z' + \frac{z}{x} = 0$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

- Lösung der homogenen Gleichung: $z_h = \frac{C}{x}$

- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $z = C(x) \cdot \frac{1}{x}$; eingesetzt in die Gleichung:

$$C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$$

- Daraus $C'(x) = x$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- Wir integrieren: $C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

- Die allgemeine Lösung: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- Wir stellen die Lösung explizit dar: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$

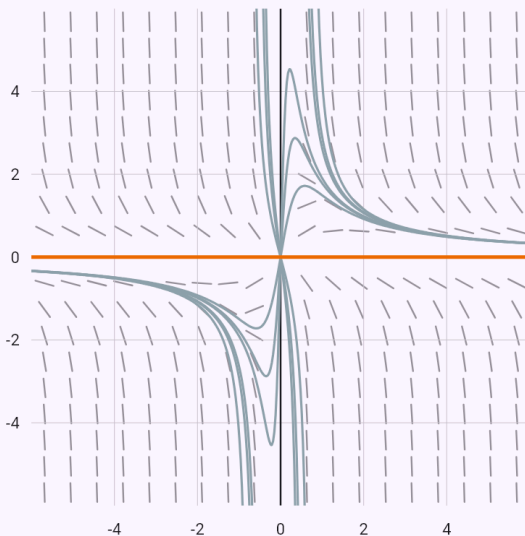
- Durch das Dividieren haben wir die konstante Lösung $y = 0$ ausgeschlossen – sie ist eine weitere Lösung der Gleichung.

- Wir benennen die Konstante um (ein Vielfaches einer beliebigen Konstante ist wieder eine beliebige

Konstante): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$

- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.

Graph



— Lösungen für verschiedene C

— $y = 0$

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Eine exakte Gleichung – die Stammfunktion $F(x, y) = C$.

Eingabe: $(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$

Ergebnis

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine Gleichung $M dx + N dy = 0$ – wir prüfen, ob sie exakt ist (die linke Seite ein totales Differential):
 $(2xy + 6x)dx + (4y^3 + x^2)dy = 0$

- $M = 2xy + 6x$, $N = 4y^3 + x^2$; die Gleichung ist exakt, denn $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale:
 $\int (6x + 2yx) dx = \int 6x dx + \int 2yx dx$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:
 $\int 6x dx = 6 \int x dx$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:
 $\int 2yx dx = 2y \int x dx$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- Die Stammfunktion F durch Integration von M nach x :
 $F(x, y) = \int (2xy + 6x) dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

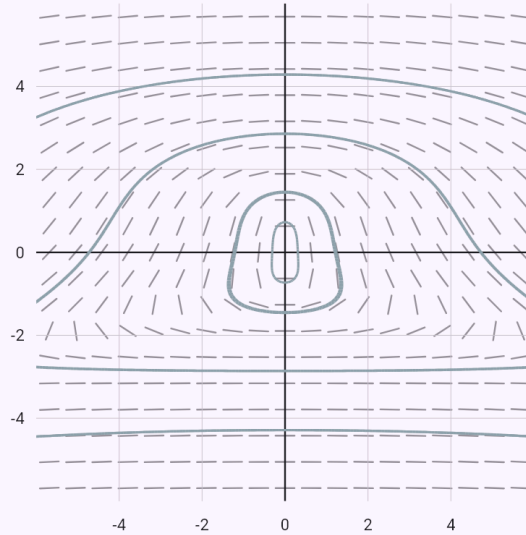
$$\int 4y^3 dy = 4 \int y^3 dy$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$

- Aus $\partial F / \partial y = N$: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$

- Die allgemeine Lösung in impliziter Form:
 $y^4 + x^2y + 3x^2 = C$

Graph



— Lösungen für verschiedene C

Die kurzen Striche zeigen in jedem Punkt die Richtung, die die Gleichung vorschreibt (Richtungsfeld). Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene C – sie berühren die Striche überall.

Die Substitution $z = x - y$; Symja würde hier einen Faktor 2 verlieren, die App prüft das Ergebnis.

Eingabe: $y' = \cos(x - y)$, $y(0) = \pi/2$

Ergebnis

$$y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + 1)$$

Lösungsweg

- Die rechte Seite ist eine Funktion von $ax + by + c$ – wir nehmen es als neue Unbekannte: $y' = \cos(x - y)$

- Die Substitution $z = x - y$, $z' = 1 - y'$ führt die Gleichung über in $z' = 1 - \cos z$

- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $1 - \cos z \neq 0$): $\frac{dz}{1 - \cos z} = dx$

- Wir integrieren beide Seiten: $\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx$

- Keine einfachere Substitution passt – die universelle Substitution $t = \tan\left(\frac{z}{2}\right)$

$$\sin z = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dz = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{1 - \cos z} dz = \int \frac{1}{t^2} dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}$

- Zurück zur ursprünglichen Variablen:

$$t = \tan\left(\frac{z}{2}\right) : \quad -\cot\left(\frac{z}{2}\right)$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 1 dx = x$

- Die allgemeine Lösung in impliziter Form:
 $-\cot\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$

- Wir stellen die Lösung explizit dar: $z = 2 \operatorname{arccot}(C - x)$

- Durch das Dividieren haben wir die konstante Lösung $z = 0$ ausgeschlossen – sie ist eine weitere Lösung der Gleichung.

- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten:
 $y = x - 2 \operatorname{arccot}(C - x)$

- Wir benennen die Konstante um (ein Vielfaches einer beliebigen Konstante ist wieder eine beliebige Konstante): $y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + C)$

- Wir setzen die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{\pi}{2}$ ein:
 $\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arccot} C \Rightarrow C = 1$

- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):
 $y = x + 2 \operatorname{arccot}(x + 1)$

- Probe – die Ableitung der Lösung $y' = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2}$ eingesetzt in die Gleichung ergibt eine Gleichheit.

Die charakteristische Gleichung mit komplexen Nullstellen $-2 \pm 3i$.

Eingabe: $y'' + 4y' + 13y = 0$

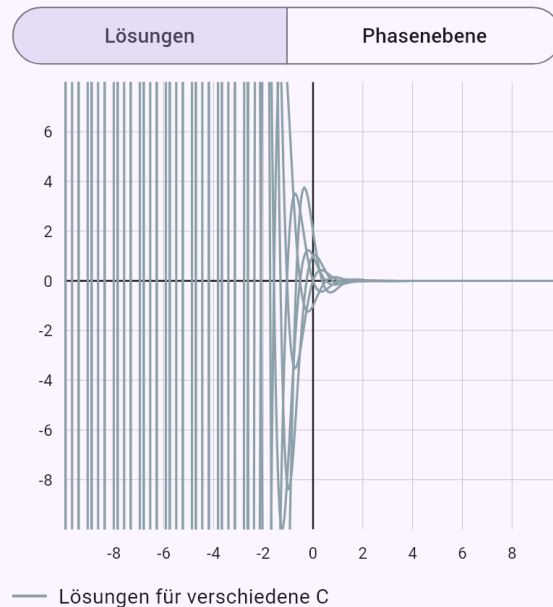
Ergebnis

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
 $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Wir suchen Lösungen $y = e^{\lambda x}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda x}$ ergibt die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Die Diskriminante $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; die Nullstellen: $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung $e^{\lambda x}$, eine k -fache außerdem $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, ein Paar $\alpha \pm \beta i$ die Lösungen $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ und $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Das Fundamentalsystem:
 $y_1 = e^{-2x} \cos(3x)$, $y_2 = e^{-2x} \sin(3x)$
- Die allgemeine Lösung:
 $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Graph



Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Spezielle rechte Seite mit Resonanz – 2 ist Nullstelle der charakteristischen Gleichung.

Eingabe: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

Spezielle rechte Seite

Ergebnis

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

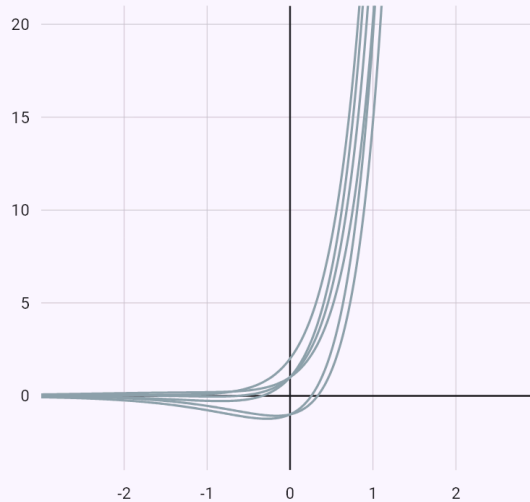
Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
 $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Wir suchen Lösungen $y = e^{\lambda x}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda x}$ ergibt die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung $e^{\lambda x}$, eine k -fache außerdem $x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, ein Paar $\alpha \pm \beta i$ die Lösungen $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ und $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Das Fundamentalsystem: $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
- Die rechte Seite $3e^{2x}$ hat eine spezielle Form; die Zahl 2 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit x multipliziert:
 $y_p = A x e^{2x}$
- Die Ableitungen:
 $y_p' = 2A x e^{2x} + A e^{2x}, y_p'' = 4A x e^{2x} + 4A e^{2x}$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die

Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst: $A = 3$

- Eine partikuläre Lösung: $y_p = 3xe^{2x}$
- Die allgemeine Lösung:
 $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

Graph



— Lösungen für verschiedene C

Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Die rechte Seite $\tan x$ ist nicht speziell – Variation der Konstanten und Wronski-Determinante.

Eingabe: $y'' + y = \tan x$

Ergebnis

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln |\sec x|$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
 $y'' + y = \tan x$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' + y = 0$
- Wir suchen Lösungen $y = e^{\lambda x}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda x}$ ergibt die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 + 1 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:
 $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung $e^{\lambda x}$, eine k -fache außerdem $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, ein Paar $\alpha \pm \beta i$ die Lösungen $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ und $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Das Fundamentalsystem: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$
- Lösung der homogenen Gleichung:
 $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variation der Konstanten – wir suchen die Lösung in der Form $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, die Ableitungen der Funktionen C_k erfüllen das System
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x \end{cases}$$

- Die Determinante des Systems (Wronski-Determinante)

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

- Daraus $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$
- Daraus $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \sin x$
- Die Konstante vor das Integral gezogen:
$$\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = - \int \sin x \cdot \tan x \, dx$$
- Die Funktion ist ungerade im Kosinus – die Substitution
 $t = \sin x$

$$dt = \cos x \, dx$$

$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$

- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt

$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) \, dt$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) \, dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{1}{2} \, dt + \int \frac{1}{2} \, dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int -1 \, dt = -t$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int -\frac{1}{2(t-1)} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{t-1} dt = \ln |t-1|$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{1}{2(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1|$$

- Zurück zur ursprünglichen Variablen

$$t = \sin x : \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$

- Integriert (die Integrationskonstanten stecken schon in der homogenen Lösung):

$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \tan x dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

- Integriert (die Integrationskonstanten stecken schon in der homogenen Lösung): $C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x$

- Eine partikuläre Lösung:

$$y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right|$$

- Die allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| +$$

Ein Anfangswertproblem – ein System für die Konstanten C_1, C_2 .

Eingabe: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Ergebnis

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

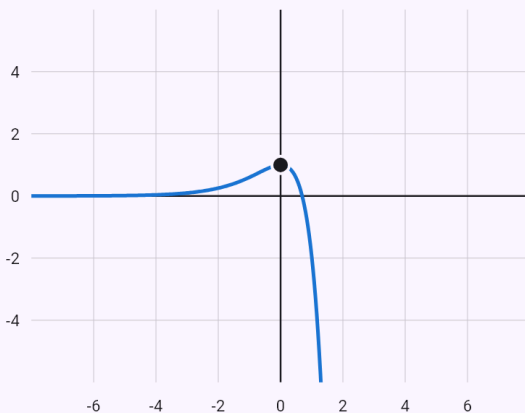
Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Wir suchen Lösungen $y = e^{\lambda x}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda x}$ ergibt die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung $e^{\lambda x}$, eine k -fache außerdem $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, ein Paar $\alpha \pm \beta i$ die Lösungen $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ und $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Das Fundamentalsystem: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{3x}$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
- Die rechte Seite e^{2x} hat eine spezielle Form; die Zahl 2 ist keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung, die partikuläre Lösung suchen wir daher in der Form $y_p = A e^{2x}$
- Die Ableitungen: $y'_p = 2A e^{2x}$, $y''_p = 4A e^{2x}$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die

Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst: $-A = 1$

- Daraus $A = -1$
- Eine partikuläre Lösung: $y_p = -e^{2x}$
- Die allgemeine Lösung:
 $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Die Ableitungen der allgemeinen Lösung:
 $y' = C_1 e^x - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Die Bedingungen ergeben das System daraus $C_1 = 2$, $C_2 = 0$
$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
 $y = 2e^x - e^{2x}$

Graph



— $y = 2e^x - e^{2x}$

Hervorgehoben ist die Lösung, die die Bedingungen erfüllt; die Punkte sind die gegebenen Werte.

Dieselbe Aufgabe mit der Laplace-Transformation.

Eingabe: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Laplace-Transformation

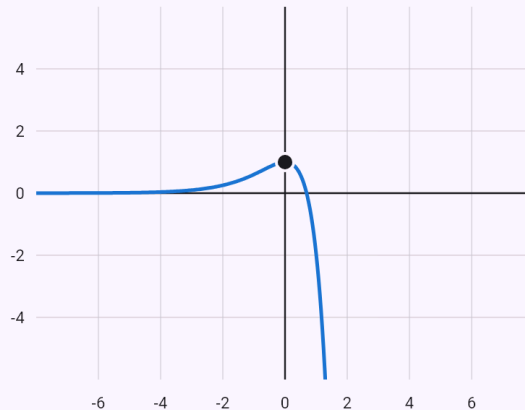
Ergebnis

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Laplace-Transformation beider Seiten: $\mathcal{L}(y) = Y$, $\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = s^2Y - sy(0) - y'(0)$; mit den Anfangsbedingungen:
 $(s^2Y - s) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s - 2}$
- Wir drücken die Bildfunktion Y aus: $Y = \frac{s - 3}{(s - 2)(s - 1)}$
- Partialbruchzerlegung: $Y = -\frac{1}{s - 2} + \frac{2}{s - 1}$
- Die Rücktransformation (nach der Korrespondenztabelle) ergibt die Lösung: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^x - e^{2x}$

Graph



$$y = 2e^x - e^{2x}$$

Hervorgehoben ist die Lösung, die die Bedingungen erfüllt; die Punkte sind die gegebenen Werte.

Ein Randwertproblem mit unendlich vielen Lösungen.

Eingabe: $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

Ergebnis

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
 $y'' + y = 0$
- Wir suchen Lösungen $y = e^{\lambda x}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda x}$ ergibt die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 + 1 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:
 $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung $e^{\lambda x}$, eine k -fache außerdem $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, ein Paar $\alpha \pm \beta i$ die Lösungen $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ und $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Das Fundamentalsystem: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$
- Die allgemeine Lösung: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$
- Die Konstante C_2 bleibt beliebig – die Aufgabe hat unendlich viele Lösungen.
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
 $y = C_2 \sin x$

Eulersche Gleichung – die Substitution $x = e^t$.

Eingabe: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$

Ergebnis

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

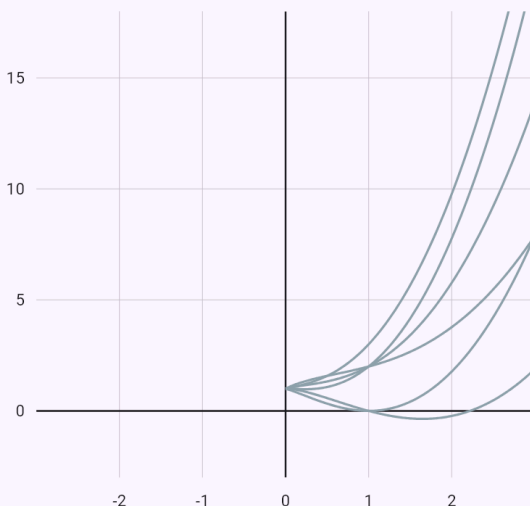
Lösungsweg

- Eulersche Gleichung – bei jeder Ableitung $y^{(k)}$ steht x^k ; die Substitution $x = e^t$ macht daraus eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- Die Substitution $x = e^t$, $xy' = \dot{y}$, $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ führt die Gleichung über in $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Wir suchen Lösungen $y = e^{\lambda t}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda t}$ ergibt die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung $e^{\lambda t}$, eine k -fache außerdem $x \cdot e^{\lambda t}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda t}$, ein Paar $\alpha \pm \beta i$ die Lösungen $e^{\alpha t} \cos \beta t$ und $e^{\alpha t} \sin \beta t$. Das Fundamentalsystem: $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$
- Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Wir teilen die rechte Seite in Teile spezieller Form – für jeden eine partikuläre Lösung, die wir addieren: $f_1 = 2$, $f_2 = e^{2t}$
- Die rechte Seite 2 hat eine spezielle Form; die Zahl 0 ist

keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung, die partikuläre Lösung suchen wir daher in der Form $y_{p_1} = A$

- Die Ableitungen: $y'_{p_1} = 0$, $y''_{p_1} = 0$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst: $2A = 2$
- Daraus $A = 1$
- Eine partikuläre Lösung: $y_{p_1} = 1$
- Die rechte Seite e^{2t} hat eine spezielle Form; die Zahl 2 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit x multipliziert: $y_{p_2} = A t e^{2t}$
- Die Ableitungen: $y'_{p_2} = 2A t e^{2t} + A e^{2t}$, $y''_{p_2} = 4A t e^{2t} + 4A e^{2t}$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst: $A = 1$
- Eine partikuläre Lösung: $y_{p_2} = t e^{2t}$
- Eine partikuläre Lösung: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = t e^{2t} + 1$
- Die allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + t e^{2t} + 1$
- Zurück zur ursprünglichen Variablen ($t = \ln x$, für $x > 0$): $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Graph



— Lösungen für verschiedene C

Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Reduktion $y' = p(y)$, die Konstanten schrittweise aus den Anfangsbedingungen.

Eingabe: $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Ergebnis

$$y = -\ln(1 - x)$$

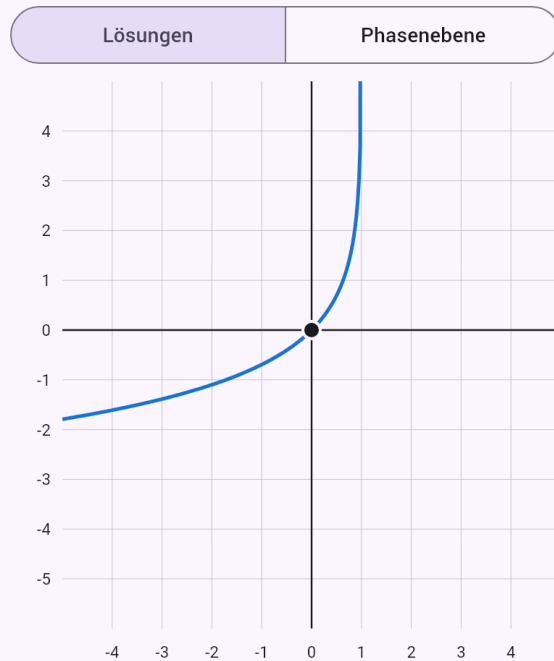
Lösungsweg

- Die unabhängige Variable fehlt – wir fassen y' als Funktion von y auf: $y'' = e^{2y}$
- Die Substitution $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ führt die Gleichung über in $p \frac{dp}{dy} = e^{2y}$; aus den Anfangsbedingungen folgt $p(0) = 1$
- Eine Gleichung mit getrennten Variablen – die rechte Seite ist ein Produkt einer Funktion der Variablen und einer Funktion der Unbekannten: $\frac{dp}{dy} = \frac{e^{2y}}{p}$
- Trennung der Variablen: $p \, dp = e^{2y} \, dy$
- Wir integrieren beide Seiten: $\int p \, dp = \int e^{2y} \, dy$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int p \, dp = \frac{p^2}{2}$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt: $\int e^{2y} \, dy = \frac{e^{2y}}{2}$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form:
$$\frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1$$

- Wir stellen die Lösung explizit dar: $p^2 = e^{2y} + C_1$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $p(0) = 1$ ein:
 $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):
 $p = e^y$
- Zurück zur ursprünglichen Unbekannten: $y' = e^y$
- Eine Gleichung mit getrennten Variablen – die rechte Seite ist ein Produkt einer Funktion der Variablen und einer Funktion der Unbekannten: $y' = e^y$
- Trennung der Variablen (wir dividieren unter der Annahme $e^y \neq 0$): $\frac{dy}{e^y} = dx$
- Wir integrieren beide Seiten: $\int \frac{dy}{e^y} = \int dx$
- Nach der Tabelle – die innere Funktion ist linear ($ax + b$), das Ergebnis wird daher durch a geteilt:
 $\int e^{-y} \, dy = -e^{-y}$
- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int 1 \, dx = x$
- Die allgemeine Lösung in impliziter Form:
 $-e^{-y} = x + C_2$
- Wir stellen die Lösung explizit dar: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ein:
 $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$

- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):
 $y = -\ln(1 - x)$

Graph



— $y = -\ln(1 - x)$

Hervorgehoben ist die Lösung, die die Bedingungen erfüllt; die Punkte sind die gegebenen Werte.

Ein gedämpfter Oszillator – drei Fälle nach δ und ω .

Eingabe: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$

Ergebnis

$$\delta > \omega : y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

$$\delta = \omega : y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega : y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

- Wir suchen Lösungen $y = e^{\lambda x}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda x}$ ergibt die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

- Für $\delta > \omega$ also

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$$y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

- Für $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, also $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$

- Für $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}i$, also

$$y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

Resonanz – für $\omega = 2$ hat die Lösung eine andere Form.

Eingabe: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$

Ergebnis

$$\omega \neq 2: y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:
 $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Zuerst lösen wir die homogene Gleichung (rechte Seite null): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Wir suchen Lösungen $y = e^{\lambda t}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda t}$ ergibt die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:
 $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Jede Nullstelle λ liefert die Lösung $e^{\lambda x}$, eine k -fache außerdem $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$, ein Paar $\alpha \pm \beta i$ die Lösungen $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ und $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Das Fundamentalsystem: $y_1 = \cos(\omega t)$, $y_2 = \sin(\omega t)$
- Lösung der homogenen Gleichung:
 $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Die rechte Seite $\cos(2t)$ hat eine spezielle Form; die Zahl $2i$ ist keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung,

die partikuläre Lösung suchen wir daher in der Form
 $y_p = A \cos(2t) + B \sin(2t)$

- Die Ableitungen
 $y'_p = 2B \cos(2t) - 2A \sin(2t)$, $y''_p = -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t)$
- In die Gleichung eingesetzt (durch die Exponentialfunktion geteilt), gleichartige Terme zusammengefasst
 $(A\omega^2 - 4A) \cos(2t) + (B\omega^2 - 4B) \sin(2t) = \cos(2t)$
- Koeffizientenvergleich gleichartiger Terme auf beiden Seiten daraus $A = \frac{1}{\omega^2 - 4}$, $B = 0$
$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$
- Eine partikuläre Lösung: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- Die allgemeine Lösung
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$
- Für $\omega = 2$ ist die Zahl der rechten Seite eine Wurzel der charakteristischen Gleichung (Resonanz) – die Lösung hat eine andere Form:
$$y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$$

Eine erratene Lösung $y_1 = x$ und Reduktion der Ordnung (d'Alembert).

Eingabe: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

Ergebnis

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln |x - 1| - x \ln |x + 1| + 2)$$

Lösungsweg

- Eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten: $y'' + \frac{2x}{x^2 - 1}y' + \frac{2}{1 - x^2}y = 0$

- Eine Lösung erraten wir und prüfen sie durch Einsetzen: $y_1 = x$. Die zweite durch Reduktion der Ordnung (d'Alembert, $y = y_1 \cdot u$)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = x \ln |x - 1|$$

- Die gebrochenrationale Funktion in ein Polynom und Partialbrüche zerlegt

$$\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

- Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)} dx$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int \frac{1}{2(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln |x - 1|$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

$$\int -\frac{1}{2(x+1)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x + 1|$$

- Die Konstante vor das Integral gezogen:

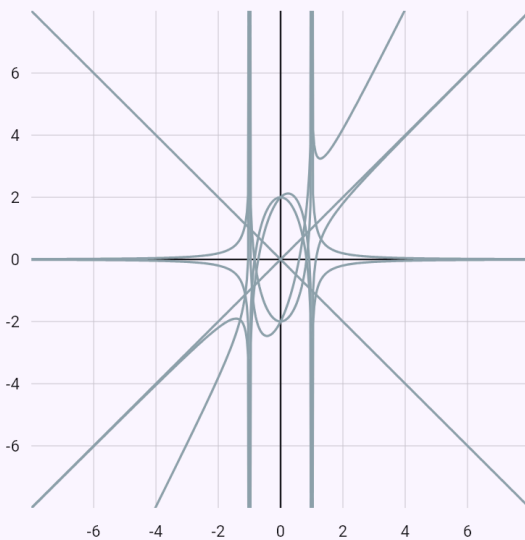
$$\int -\frac{1}{x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

- Nach der Tabelle der Grundintegrale: $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$

- Die allgemeine Lösung:

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln |x - 1| - x \ln |x + 1| + 2)$$

Graph



— Lösungen für verschiedene C

Die grauen Kurven sind Lösungen für verschiedene Werte der Konstanten.

Bekannte Einschränkungen

- Eine Gleichung, die einen Hinweis aus der Aufgabe braucht (außer $z = \ln y$), wird noch nicht gelöst.
- Bei einer Gleichung mit Parameter (k, λ, ω) zeichnet die App keinen Graphen und nimmt die Parameter als positiv an.
- Wo sich die Lösung nicht explizit ausdrücken lässt, bleibt sie implizit.
- Die Laplace-Transformation kennt die Heaviside-Funktion, Verschiebungen und periodische rechte Seiten noch nicht.

Rekursionen und erzeugende Funktionen

Die App löst lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten beliebiger Ordnung über die charakteristische Gleichung – auch mehrfache und komplexe Wurzeln (die komplexe Form der Lösung und ihre Umwandlung in die reelle nach dem Satz von Moivre) – und mit einer rechten Seite der Form $P(n) \cdot q^n$ (auch $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, Resonanz und eine Summe rechter Seiten). Die Anfangsbedingungen bestimmen die Konstanten; zur Probe berechnet die App weitere Glieder aus der Rekursion und vergleicht sie mit der Formel.

Mit dem Chip „Methode“ lassen sich auch die erzeugende Funktion ($A(x) = \sum a_n x^n$, Partialbrüche, geometrische Reihen), Matrixpotenzen (Diagonalisierung) oder bei 1. Ordnung das Aufsummieren wählen. Eine Rekursion 1. Ordnung mit variablem Koeffizienten ($a_{n+1} = (n+1)a_n$) wird über ein Produkt gelöst (Fakultäten), umformbare nichtlineare Rekursionen über die Substitution $b_n = 1/a_n$ oder $b_n = \ln a_n$. Ein System zweier Rekursionen löst sie durch Elimination einer Folge oder mit der Matrix, eine Teile-und-herrsche-Rekursion $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ über $n = b^k$ – mit der Abschätzung nach dem Master-Theorem.

Mit der Operation „Erzeugende Funktion“ findet die App die erzeugende Funktion einer Folge, gegeben durch eine Formel ($n^2 + 2^n$) oder ihre ersten Glieder (1, 0, 1, 0, ...), und umgekehrt die Formel für a_n aus einer Funktion $A(x)$. Die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen von $x_1 + x_2 + \dots = N$ (auch mit Schranken oder Koeffizienten – Bezahlen mit Münzen) ist ein Koeffizient einer erzeugenden Funktion.

Der Graph zeigt die Glieder der Folge als Punkte (bei einem System beide Folgen).

Eingabe

$$a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), \quad a(0) = 1, \\ a(1) = 4$$

Mit Klammern, die Bedingungen nach einem Komma.

$$a_{\{n+2\}} = 5a_{\{n+1\}} - 6a_n$$

Mit Indizes (auch vom Foto). Ohne Bedingungen: die allgemeine Lösung mit Konstanten C_1, C_2 .

$$F_n = F_{\{n-1\}} + F_{\{n-2\}}, \quad F_1 = F_2 = 1$$

Der Index darf sinken (a_{n-1}, a_{n-2}); ein Wert kann mehreren Gliedern gegeben werden.

$$a_{\{n+1\}} = a_n + 2b_n \\ b_{\{n+1\}} = 3a_n + b_n \\ a_0 = 1, \quad b_0 = 0$$

Ein System – die Gleichungen in Zeilen, die Bedingungen in der letzten.

$$T(n) = 2T(n/2) + n, \quad T(1) = 1$$

Teile und herrsche – ein Glied bei n/b .

$$n^2 + 2^n$$

Die Formel einer Folge mit der Operation „Erzeugende Funktion“ (auch $a_n = \dots$).

1, 0, 1, 0, ...

Die ersten Glieder, durch Kommas getrennt.

$$1/(1 - x - x^2)$$

Eine erzeugende Funktion in x (auch $A(x) = \dots$) – die Formel für a_n .

$$\text{Anzahl der Lösungen } x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1 \leq 3$$

Die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen mit Schranken.

Beispiele

Zwei verschiedene reelle Wurzeln, die Probe mit weiteren Gliedern.

Eingabe: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

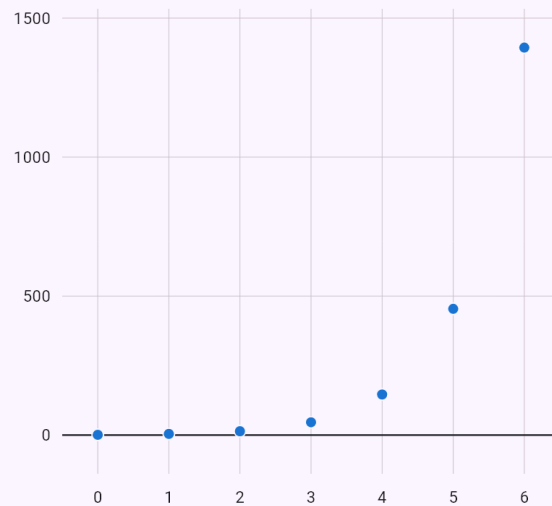
Ergebnis

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Wir suchen Lösungen $a_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$
- Die allgemeine Lösung: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein
daraus $C_1 = -1$, $C_2 = 2$
 $C_1 + C_2 = 1$
 $2C_1 + 3C_2 = 4$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
 $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 14$, $a_3 = 46$, $a_4 = 146$ – genauso wie die Formel.

Graph



• a_n

Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Die Fibonacci-Folge – die Formel von Binet.

Eingabe: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

Ergebnis

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

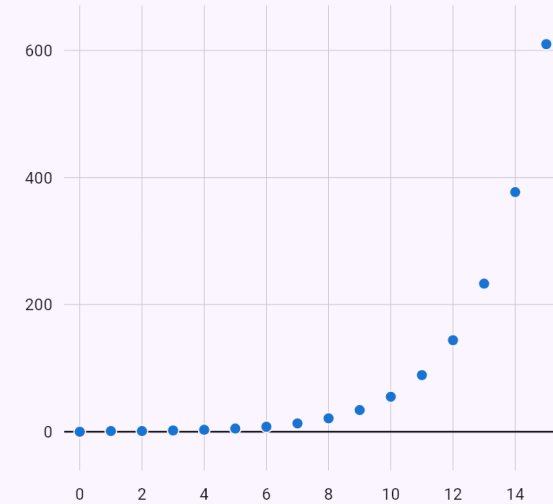
Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Wir suchen Lösungen $F_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^{n-2} geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; die Nullstellen: $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
- Die allgemeine Lösung
$$F_n = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein
daraus $C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$
$$C_1 + C_2 = 0$$
$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} C_2 = 1$$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Probe: Die Rekursion liefert $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ – genauso wie die Formel.

Graph



● F_n

Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Komplexe Wurzeln $1 \pm i$ – die komplexe Form und der Satz von Moivre.

Eingabe: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Ergebnis

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Wir suchen Lösungen $a_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; die Nullstellen: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Die komplexen Wurzeln $1 \pm i$ schreiben wir in Polarform:
 $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, also $\lambda = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4}\right)$. Nach dem Satz von Moivre ist $\lambda^n =$
 $\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Die allgemeine Lösung in komplexer Form (komplexe Konstanten): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Die konjugierten Glieder addiert, mit neuen reellen Konstanten, ergibt sich die reelle Form
 $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 1$, $C_2 = 1$

liefert dieselben Werte.

$$C_1 = 1$$

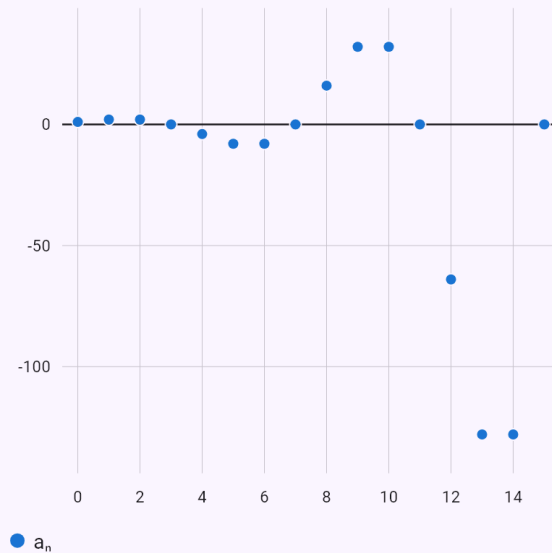
$$C_1 + C_2 = 2$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = -4$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst

Die rechte Seite n, eine doppelte Wurzel 2.

Eingabe: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$

Ergebnis

$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

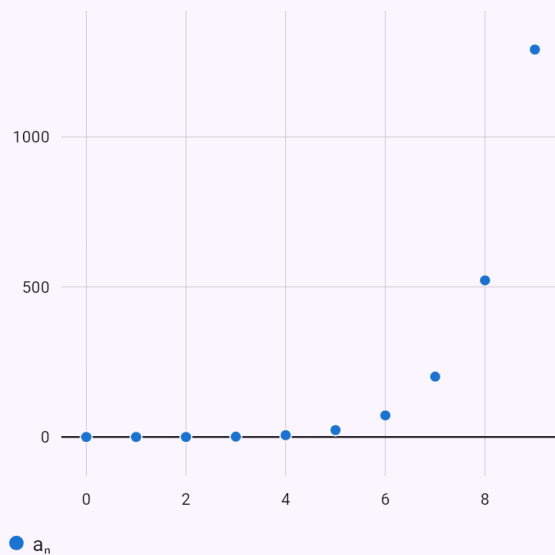
Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Zuerst lösen wir die homogene Rekursion (rechte Seite 0): $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Wir suchen Lösungen $a_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Die Diskriminante $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; die Nullstellen: $\lambda_{1,2} = 2$
- Die allgemeine Lösung der homogenen Rekursion:
 $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Die rechte Seite n hat eine spezielle Form; die Zahl 1 ist keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung, die partikuläre Lösung suchen wir daher in der Form
 $a_n^{(p)} = An + B$
- In die Rekursion eingesetzt und zusammengefasst:
 $An + B - 2A = n$
- Koeffizientenvergleich gleichartiger Terme auf beiden Seiten daraus $A = 1$, $B = 2$
 $A = 1$

$$B - 2A = 0$$

- Eine partikuläre Lösung: $a_n^{(p)} = n + 2$
- Die allgemeine Lösung:
 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein
daraus $C_1 = -2$, $C_2 = \frac{1}{2}$
 $C_1 + 2 = 0$
 $2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
 $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 6$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Dieselbe Rekursion mit der erzeugenden Funktion.

Eingabe: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Erzeugende Funktion

Ergebnis

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

- Wir führen die erzeugende Funktion ein:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Die Rekursion mit x^{n+2} multipliziert und über alle $n \geq 0$ summiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Die Summen durch die erzeugende Funktion und die Anfangswerte ausgedrückt:

$$A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$$

- Die erzeugende Funktion ausgedrückt, der Nenner zerlegt: $A(x) = \frac{1-x}{(1-2x)(1-3x)}$

- Partialbruchzerlegung: $A(x) = -\frac{1}{1-2x} + \frac{2}{1-3x}$

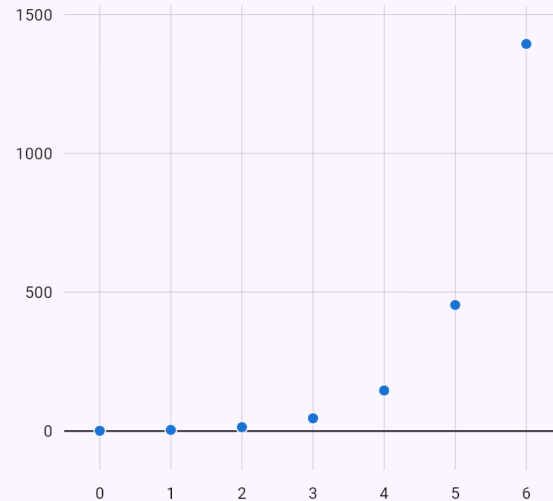
- Die Brüche als geometrische Reihen

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

- Der Koeffizient von x^n ist das gesuchte Glied:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Graph



• a_n

Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Dieselbe Rekursion mit Matrixpotenzen.

Eingabe: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Matrixpotenzen

Ergebnis

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 2. Ordnung mit konstanten

$$\text{Koeffizienten: } a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

- Die Rekursion in Matrixform also $v_{n+1} = M \cdot v_n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Durch wiederholtes Einsetzen $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenwerte der Matrix:

$$\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \text{ also } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

- Die Eigenvektoren – Lösungen von $(M - \lambda E)u = 0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Matrix diagonalisiert, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Die Matrixpotenz die Koeffizienten also $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1}v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

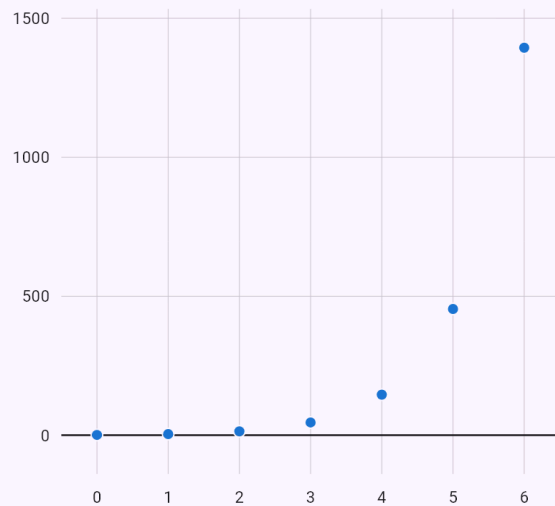
$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 14$, $a_3 = 46$, $a_4 = 146$ – genauso wie die Formel.

Graph



• a_n

Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Eine Rekursion 1. Ordnung durch Aufsummieren.

Eingabe: $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_0 = 0$

Aufsummieren

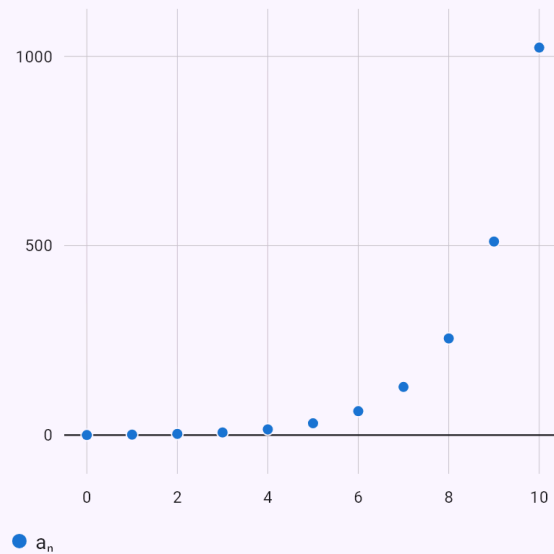
Ergebnis

$$a_n = 2^n - 1$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Wir setzen die Rekursion wiederholt in sich selbst ein:
 $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \dots$, allgemein
$$a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$$
- Die Summe ausgewertet: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
 $a_n = 2^n - 1$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Ein variabler Koeffizient – das Produkt ergibt eine Fakultät.

Eingabe: $a_{n+1} = (n+1)a_n$, $a_0 = 1$

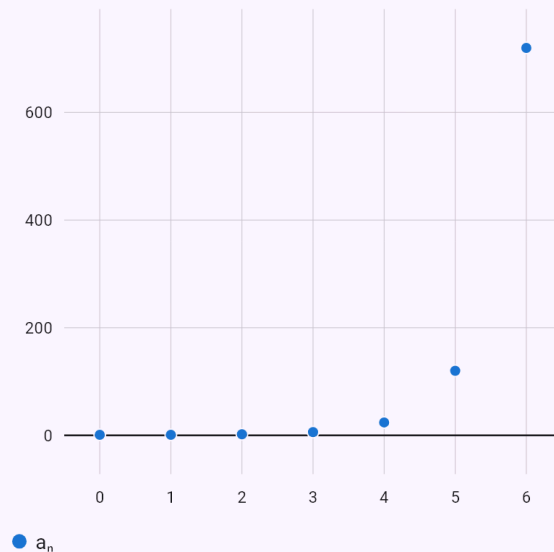
Ergebnis

$$a_n = n!$$

Lösungsweg

- Lineare Rekursion 1. Ordnung mit variablem Koeffizienten: $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Wir setzen die Rekursion wiederholt in sich selbst ein – das Glied ist ein Produkt
$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \dots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1)$$
- Das Produkt vereinfacht (die Fakultäten kürzen sich):
$$\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
 $a_n = n!$
- Probe: Die Rekursion liefert $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ – genauso wie die Formel.

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Eine nichtlineare Rekursion – die Substitution $b_n = 1/a_n$.

Eingabe: $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$, $a_0 = 1$

Ergebnis

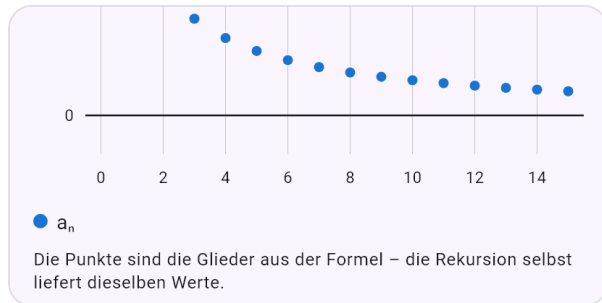
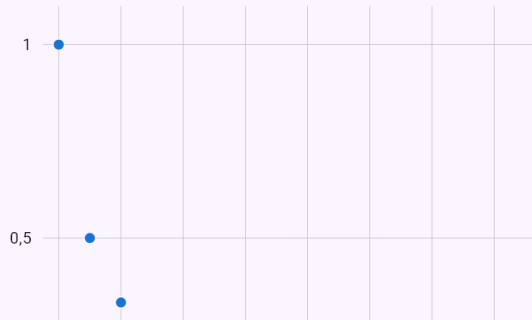
$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Lösungsweg

- Eine nichtlineare Rekursion – die Kehrwerte der Glieder machen sie linear: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Beide Seiten als Kehrwert: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; die Substitution $b_n = \frac{1}{a_n}$ macht die Rekursion so linear:
 $b_{n+1} = b_n + 1$
- Die Anfangsbedingungen der neuen Folge: $b_0 = 1$
- Zuerst lösen wir die homogene Rekursion (rechte Seite 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Wir suchen Lösungen $b_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung:
 $\lambda - 1 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = 1$
- Die allgemeine Lösung der homogenen Rekursion:
 $b_n^{(h)} = C_1$
- Die rechte Seite 1 hat eine spezielle Form; die Zahl 1 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit n multipliziert:
 $b_n^{(p)} = An$

- In die Rekursion eingesetzt und zusammengefasst:
 $A = 1$
- Eine partikuläre Lösung: $b_n^{(p)} = n$
- Die allgemeine Lösung: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 1$
 $C_1 = 1$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:
 $b_n = 1 + n$
- Probe: Die Rekursion liefert $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$ – genauso wie die Formel.
- Zurück zur ursprünglichen Folge: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Graph



Ein System zweier Rekursionen durch Elimination der Folge b_n .

Eingabe: $a_{n+1} = a_n + 2b_n$

$b_{n+1} = 3a_n + b_n$

$$a_0 = 1, b_0 = 0$$

Ergebnis

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

Lösungsweg

- Ein System zweier linearer Rekursionen

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$b_{n+1} = 3a_n + b_n$$

- Aus der ersten Gleichung $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, also

$b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$; in die zweite eingesetzt ergibt sich eine Rekursion für eine einzige Folge:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$$

- Die zweite Anfangsbedingung aus der ersten Gleichung:
 $a_1 = 1 + 0 = 1$

- Wir suchen Lösungen $a_n = \lambda^n$; eingesetzt und durch λ^n geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung:
 $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$

- Die Diskriminante $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; die Nullstellen: $\lambda_1 = 1 - \sqrt{6}$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$

- Die allgemeine Lösung:

$$a_n = C_1 (1 - \sqrt{6})^n + C_2 (1 + \sqrt{6})^n$$

- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein
daraus $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$(1 - \sqrt{6})C_1 + (1 + \sqrt{6})C_2 = 1$$

- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt:

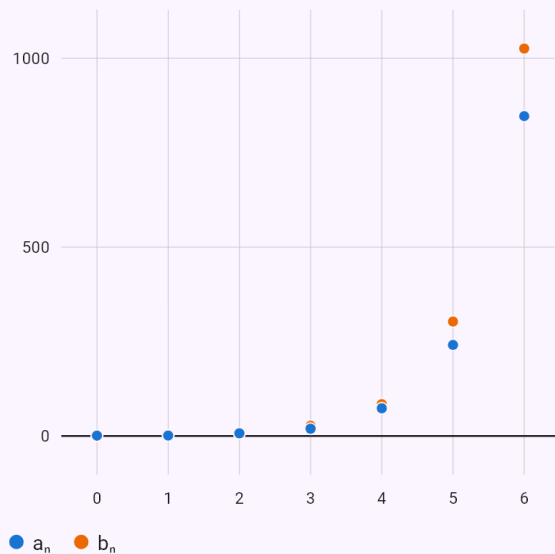
$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

- Probe: Die Rekursion liefert $a_2 = 7$, $a_3 = 19$, $a_4 = 73$ – genauso wie die Formel.

- Die andere Folge aus dem Ausdruck

$$b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

Graph



Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Teile und herrsche (Mergesort) – $n = 2^k$ und das Master-Theorem.

Eingabe: $T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1$

Ergebnis

$$T(n) = n + n \log_2 n$$

Bedingungen: $n = 2^k, k \in \mathbb{N}_0$

Lösungsweg

- Eine Teile-und-herrsche-Rekursion: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Für n eine Potenz der Basis: die Substitution $n = 2^k, S_k = T(2^k)$ ergibt eine lineare Rekursion 1. Ordnung: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Die Anfangsbedingungen der neuen Folge: $S_0 = 1$
- Zuerst lösen wir die homogene Rekursion (rechte Seite 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Wir suchen Lösungen $S_k = \lambda^k$; eingesetzt und durch λ^k geteilt ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\lambda - 2 = 0$
- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = 2$
- Die allgemeine Lösung der homogenen Rekursion: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- Die rechte Seite 2^{k+1} hat eine spezielle Form; die Zahl 2 ist eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung (Vielfachheit 1), der Ansatz wird daher mit k multipliziert: $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- In die Rekursion eingesetzt, durch 2^k geteilt und zusammengefasst: $2A = 2$

- Daraus $A = 1$
- Eine partikuläre Lösung: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$
- Die allgemeine Lösung: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein daraus $C_1 = 1$
 $C_1 = 1$
- Die Lösung, die die gegebenen Bedingungen erfüllt: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Probe: Die Rekursion liefert $S_1 = 4, S_2 = 12, S_3 = 32$ – genauso wie die Formel.
- Zurück zu n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n \log_2 n$
- Das Master-Theorem ($a = 2, b = 2, f(n) = \Theta(n)$): $2 = 2^1$, also $T(n) = \Theta(n \log n)$

Die erzeugende Funktion der Folge $n^2 + 2^n$.

Eingabe: $n^2 + 2^n$

Erzeugende Funktion

Ergebnis

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Lösungsweg

- Wir führen die erzeugende Funktion ein:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n) x^n$$

- Die Reihe nach Linearität zerlegt:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

- Eine bekannte Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$

- Eine bekannte Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

- Die Glieder mit n multiplizieren heißt ableiten und mit x multiplizieren

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- Die Glieder mit n multiplizieren heißt ableiten und mit x multiplizieren

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

- Die erzeugende Funktion: $A(x) = \frac{1-2x+2x^2-3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$
- Probe – die Entwicklung beginnt mit den Gliedern der Folge: $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \dots$

Die Formel für a_n aus einer erzeugenden Funktion – Partialbrüche über irrationale Wurzeln.

Eingabe: $1/(1 - x - x^2)$

Erzeugende Funktion

Ergebnis

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Lösungsweg

- Die erzeugende Funktion ausgedrückt, der Nenner zerlegt

$$A(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Partialbruchzerlegung

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Die Brüche als geometrische Reihen

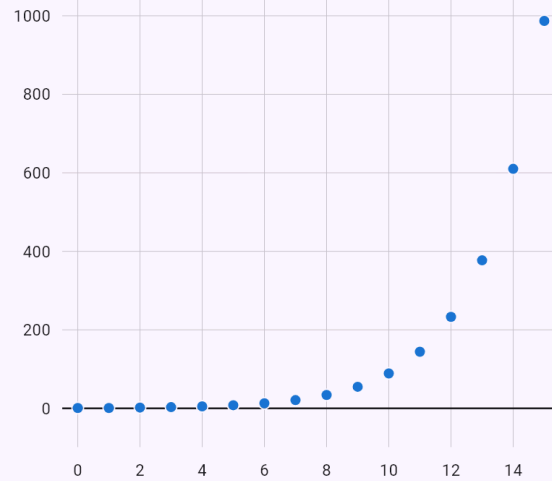
$$\frac{1}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n, \quad \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n$$

- Der Koeffizient von x^n ist das gesuchte Glied

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Probe – die Entwicklung beginnt mit den Gliedern der Folge: $A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

Graph



• a_n

Die Punkte sind die Glieder aus der Formel – die Rekursion selbst liefert dieselben Werte.

Die Anzahl der Lösungen von $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ mit $x_1 \leq 3$.

Eingabe: Anzahl der Lösungen $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 \leq 3$

Ergebnis

38

Lösungsweg

- Die Unbekannte x_1 ($0 \leq x_1 \leq 3$) liefert die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

- Die Unbekannte x_2 ($x_2 \geq 0$) liefert die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- Die Unbekannte x_3 ($x_3 \geq 0$) liefert die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- Die erzeugende Funktion ist ihr Produkt – der Koeffizient von x^N zählt die Lösungen: $G(x) = \frac{1 - x^4}{(1 - x)^3}$

- Die Anzahl der Lösungen ist der Koeffizient von x^{10} : 38

Bekannte Einschränkungen

- Noch nicht: lineare Rekursionen höherer Ordnung mit variablen Koeffizienten, Systeme aus drei oder mehr Rekursionen, Teile und herrsche mit mehreren Gliedern ($T(n/2)$ und $T(n/3)$) und nichtlineare Rekursionen, die diese Substitutionen nicht linear machen.

Anwendungen von Differentialgleichungen

Die Schaltfläche „Anwendungen von Differentialgleichungen“ auf dem Startbildschirm öffnet ein Formular mit 23 Modellen: Radiokarbonmethode, Zerfall und Halbwertszeit, exponentielles Wachstum, Zerfallsreihe, Newtonsche Abkühlung (auch Todeszeitpunkt aus zwei Messungen), chemische Kinetik 0.–2. Ordnung, Medikament im Blut, Blutalkohol, Sparen und Kredit, RC-, RL- und RLC-Kreis, Federpendel, Fall mit Luftwiderstand, Ausfluss aus einem Gefäß, Mischen, logistisches und Gompertz-Wachstum, Population mit Ernte, SIR-Epidemie, Räuber und Beute, Konkurrenz zweier Arten und Chemostat.

Sie wählen das Modell, die Variante und die gesuchte Größe; Konstanten sind vorausgefüllt und änderbar. Für jede Größe und das Ergebnis wählen Sie die Einheit – die App rechnet um (die Umrechnung ist ein Schritt). Das „?“ beim Modell erklärt, woher seine Gleichung kommt.

Die Schritte stellen das Modell auf, lösen die Gleichung (Trennung der Variablen, integrierender Faktor, charakteristische Gleichung), setzen die Bedingungen ein, drücken die gesuchte Größe aus und setzen die Zahlen ein. Systeme werden numerisch mit Runge-Kutta gelöst, Gleichgewichte und Stabilität exakt. Der Graph zeigt die Größen im Zeitverlauf, bei Systemen auch die Phasenebene.

Beispiele

Alter eines Fundes mit 35 % verbliebenem ^{14}C .

Eingabe: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Ergebnis

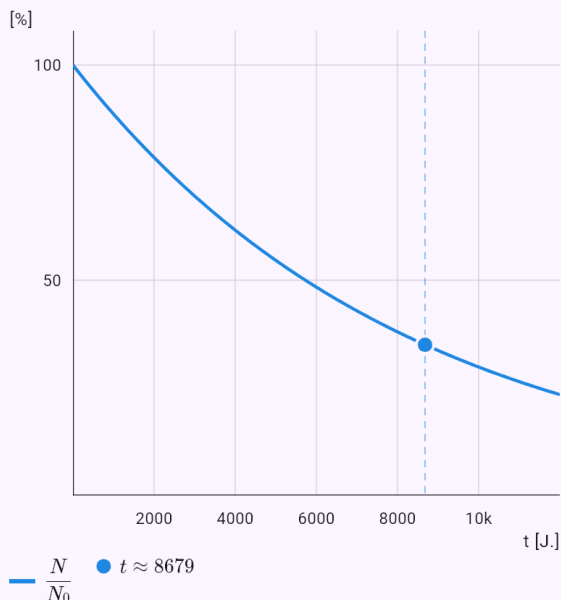
$$t \approx 8700 \text{ J.}$$

Lösungsweg

- Gesucht t ; gegeben: $T_{1/2} = 5730 \text{ J.}$, $\frac{N}{N_0} = 35 \%$
- Einheiten umrechnen: $\frac{N}{N_0} = 35 \% = 0,35$
- Lebewesen nehmen Kohlenstoff aus der Luft auf und enthalten daher denselben Anteil des radioaktiven Isotops ^{14}C wie die Atmosphäre. Nach dem Tod endet die Aufnahme und das ^{14}C zerfällt. Die Zahl der Zerfälle pro Zeit ist proportional zur Zahl der verbleibenden Kerne: $dN/dt = -\lambda N$ mit der Zerfallskonstante λ . Die Lösung ist $N = N_0 \cdot e^{(-\lambda t)}$; nach der Halbwertszeit $T_{1/2} = 5730$ Jahre ist die Hälfte zerfallen, also $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$. Aus dem verbleibenden Anteil von ^{14}C (oder der gemessenen Aktivität im Vergleich zu einer lebenden Probe) folgt das Alter. Gleichung des Modells: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Trennung der Variablen: $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln |N| = -\lambda t + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante $\pm e^C$ heißt wieder C : $N = C e^{-\lambda t}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ ein: $N_0 = C$

- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):
 $N = N_0 e^{-\lambda t}$
- In einer Halbwertszeit halbiert sich die Menge – die Zerfallskonstante
$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ J.}^{-1}$$
- Gesuchte Größe ausdrücken:
$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}$$
- Einsetzen: $t = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{1}{0,35} \approx 8679 \text{ J.}$
- Labore geben das „Radiokarbonalter“ mit Libbys Halbwertszeit von 5568 Jahren an und rechnen es mit einer Kalibrierkurve um (der ^{14}C -Gehalt der Atmosphäre war nicht immer gleich) – das wahre Alter kann etwas abweichen.

Graph



Todeszeitpunkt: 30 °C beim Fund, eine Stunde später 28 °C, Raum 20 °C.

Eingabe: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC]; Tt=37[degC]; k=measured)`

Ergebnis

$$t \approx -2,38 \text{ h}$$

Lösungsweg

- Gesucht t ; gegeben

$$T_0 = 30^\circ\text{C}, \quad T_a = 20^\circ\text{C}, \quad t_1 = 1 \text{ h}, \quad T_1 = 28^\circ\text{C},$$

- Ein Körper gibt Wärme umso schneller ab, je größer der Temperaturunterschied ist: $dT/dt = -k(T - T_a)$, T_a ist die Umgebungstemperatur, k hängt vom Körper ab. Die Lösung ist $T = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt}$. k lässt sich aus zwei Messungen bestimmen. So schätzt die Rechtsmedizin den Todeszeitpunkt: Man misst die Körpertemperatur beim Fund und etwas später und berechnet, wann der Körper 37 °C hatte. Gleichung des Modells:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

- Trennung der Variablen: $\frac{dT}{T - T_a} = -k dt$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln |T - T_a| = -kt + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante $\pm e^C$ heißt wieder C : $T = T_a + C e^{-kt}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $T(0) = T_0$ ein: $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $T = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt}$
- k aus der zweiten Messung

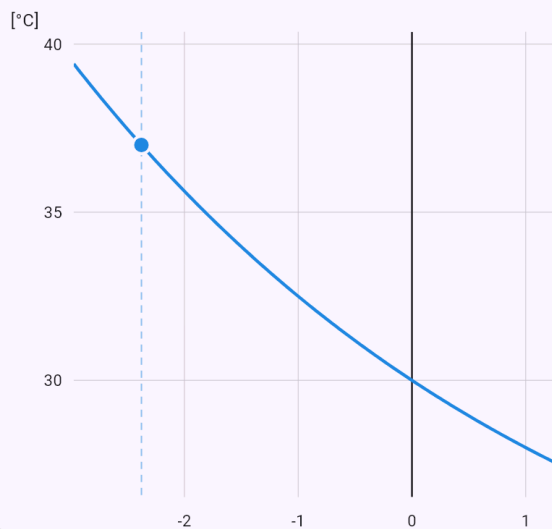
$$T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1} \ln \frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$$

- Gesuchte Größe ausdrücken

$$T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$$

- Einsetzen: $t = -\frac{1}{0,2231} \ln \frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2,378 \text{ h}$
- Eine negative Zeit bedeutet vor der ersten Messung (beim Todeszeitpunkt so viele Stunden vor dem Fund).

Graph



— T • $t \approx -2,378$

t [h]

Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

500 mg alle 8 Stunden – der stationäre Spiegel.

Eingabe: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

Ergebnis

$$c_{max} \approx 20,7 \text{ mg/l}$$

$$c_{min} \approx 8,22 \text{ mg/l}$$

Lösungsweg

- Gesucht c_{max} ; gegeben

$$D = 500 \text{ mg}, \quad V = 40 \text{ l}, \quad T_{1/2} = 6 \text{ h}, \quad \tau = 8 \text{ h}$$

- Ein Medikament verteilt sich im Verteilungsvolumen V ; Nieren und Leber scheiden es mit einer zur Konzentration proportionalen Geschwindigkeit aus: $dc/dt = -kc$ mit $k = \ln 2 / T_{1/2}$. Nach einer Dosis D ist $c = (D/V) \cdot e^{-(k)t}$. Bei wiederholter Gabe im Abstand τ addieren sich die Reste (geometrische Reihe) und der Spiegel pendelt sich zwischen c_{min} und c_{max} ein. Bei einer Infusion mit der Rate R gilt $dc/dt = R/V - kc$ und die Konzentration nähert sich $R/(kV)$. Gleichung des Modells: $\frac{dc}{dt} = -kc$

$$\text{Modells: } \frac{dc}{dt} = -kc$$

- Anfangskonzentration nach der Dosis:

$$c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12,5 \text{ mg/l}$$

- Eliminationskonstante aus der biologischen

$$\text{Halbwertszeit: } k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0,1155 \text{ h}^{-1}$$

- Trennung der Variablen: $\frac{dc}{c} = -k dt$

- Wir integrieren beide Seiten: $\ln |c| = -kt + C$

- Wir entlogarithmieren – die Konstante $\pm e^C$ heißt wieder C : $c = C e^{-kt}$

- Wir setzen die Anfangsbedingung $c(0) = c_0$ ein: $c_0 = C$

- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung): $c = c_0 e^{-kt}$

- Anteil des Medikaments, der bis zur nächsten Dosis bleibt: $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0,1155 \cdot 8} \approx 0,3969$

- Gesuchte Größe ausdrücken

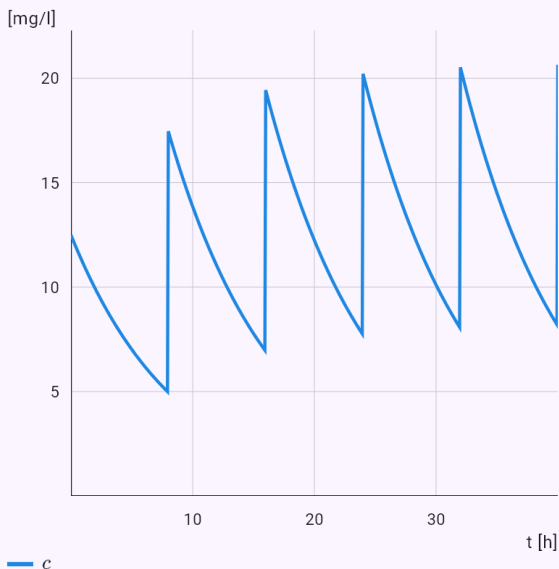
$$c_{max} = c_0 (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{c_0}{1 - q}, \quad c_{min} = q c_{max}$$

- Einsetzen: $c_{max} = \frac{12,5}{1 - 0,3969} \approx 20,72 \text{ mg/l}$

- Einsetzen: $c_{min} = 0,3969 \cdot 20,72 \approx 8,225 \text{ mg/l}$

- Kumulationsfaktor (wie viel höher der stationäre Spiegel als nach einer Dosis ist): $R = \frac{1}{1 - q} \approx 1,658$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Monatliche Rate eines Kredits von 1 000 000 CZK für 20 Jahre bei 5 %.

Eingabe: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];`

kind=loan)

Ergebnis

$$a \approx 6592 \text{ CZK/Mon.}$$

Lösungsweg

- Gesucht a ; gegeben

$$D_0 = 1\,000\,000 \text{ CZK}, \quad r = 5\% \text{ p. a.}, \quad t = 20 \text{ J.}, \quad D$$

- Einheiten umrechnen: $r = 5\% \text{ p. a.} = 0,05 \text{ J.}^{-1}$

- Bei stetiger Verzinsung wächst der Zins in jedem Augenblick proportional zum Guthaben: $dB/dt = rB$ mit dem Jahreszinssatz r . Regelmäßige Einzahlungen a erhöhen das Guthaben ($dB/dt = rB + a$), Kreditraten senken die Schuld ($dB/dt = rB - a$). Die Gleichung wird durch Trennung der Variablen gelöst; daraus folgen Guthaben, Laufzeit oder Ratenhöhe (stetige Annuität).

$$\text{Gleichung des Modells: } \frac{dD}{dt} = rD - a$$

- Trennung der Variablen: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r dt$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln \left| D - \frac{a}{r} \right| = rt + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante $\pm e^C$ heißt wieder C : $D = \frac{a}{r} + C e^{rt}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $D(0) = D_0$ ein:
 $C = D_0 - \frac{a}{r}$

- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):

$$D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r} \right) e^{rt}$$

- Stetige Verzinsung ist ein Modell – Banken verzinsen monatlich oder jährlich; die Unterschiede sind gering.

- Gesuchte Größe ausdrücken: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$

- Einsetzen

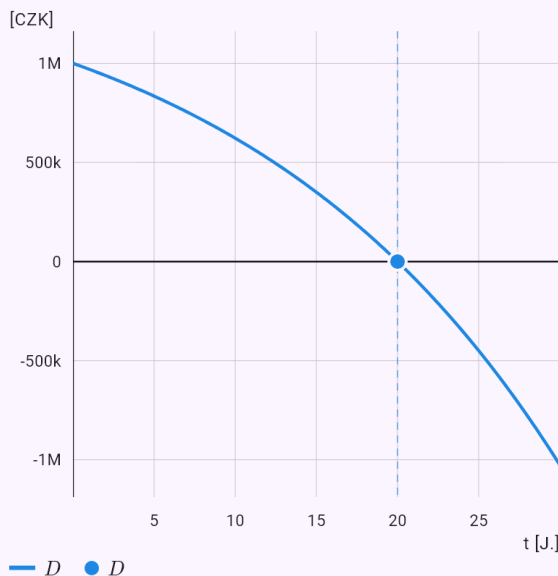
$$a = \frac{0,05(1\,000\,000 e^{0,05 \cdot 20} - 0)}{e^{0,05 \cdot 20} - 1} \approx 79\,100 \text{ CZK/J.}$$

- Insgesamt gezahlt: $a t = 1\,582\,000 \text{ CZK}$

- Einheiten umrechnen:

$$a \approx 79\,100 \text{ CZK/J.} = 6592 \text{ CZK/Mon.}$$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Wie lange ein Kondensator bis zur halben Quellenspannung braucht.

Eingabe: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

Ergebnis

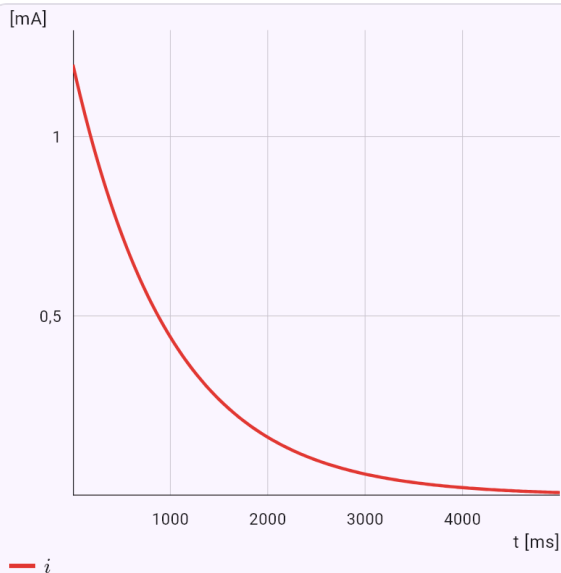
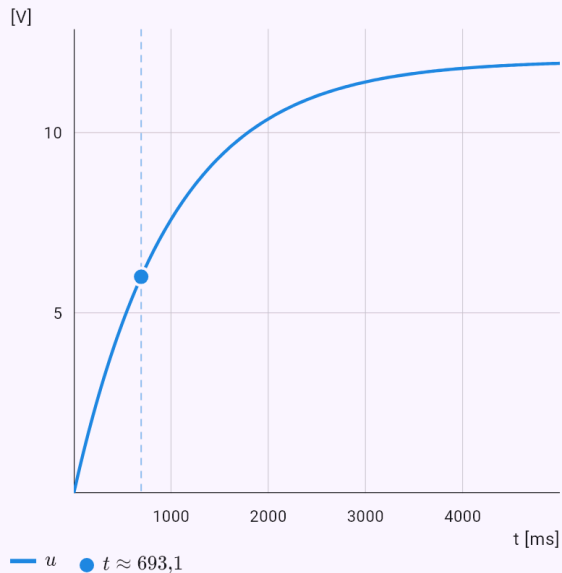
$$t \approx 693 \text{ ms}$$

Lösungsweg

- Gesucht t ; gegeben
 $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $U = 12 \text{ V}$, $u = 6 \text{ V}$
- Beim Laden eines Kondensators über einen Widerstand gilt nach Kirchhoff $U = Ri + u$, und der Strom lädt den Kondensator: $i = C \cdot du/dt$. Zusammen $RC \cdot du/dt + u = U$. Die Spannung nähert sich der Quellenspannung: $u = U(1 - e^{-(t/\tau)})$ mit der Zeitkonstante $\tau = RC$; der Strom $i = (U/R) \cdot e^{-(t/\tau)}$ fällt. Beim Entladen ist $u = U_0 \cdot e^{-(t/\tau)}$.
Gleichung des Modells: $RC \frac{du}{dt} + u = U$
- Zeitkonstante: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000 \text{ ms}$
- Trennung der Variablen: $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Wir integrieren beide Seiten: $\ln |u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Wir entlogarithmieren – die Konstante $\pm e^C$ heißt wieder C : $u = U + C e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Wir setzen die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ ein:
 $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):
 $u = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

- Gesuchte Größe ausdrücken: $t = -\tau \ln \left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Einsetzen: $t = -1000 \ln \left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693,1 \text{ ms}$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Gedämpftes Federpendel – Auslenkung nach 1 s.

Eingabe: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

$$t=1[s])$$

Ergebnis

$$x \approx 1,827 \text{ cm}$$

Lösungsweg

- Gesucht x ; gegeben

$$m = 0,5 \text{ kg}, \quad k = 20 \text{ N/m}, \quad b = 1 \text{ kg/s}, \quad x_0 = 5 \text{ cm},$$

- Einheiten umrechnen: $x_0 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$
- Auf einen Körper an einer Feder wirken die Federkraft $-kx$ (Hooke), die Dämpfung $-b \cdot v$ und eventuell eine Antriebskraft $F_0 \cdot \cos \omega t$. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$ – eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung zeigen, ob der Körper schwingt (schwache Dämpfung) oder nur zurückkehrt. Ein Antrieb nahe der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ führt zur Resonanz. Gleichung des Modells:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$
- Eigenkreisfrequenz (ohne Dämpfung):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} \approx 6,325 \text{ s}^{-1}$$
- Abklingkonstante: $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0,5} \approx 1 \text{ s}^{-1}$
- Wir suchen Lösungen $x = e^{\lambda t}$; Einsetzen und Teilen durch $e^{\lambda t}$ ergibt die charakteristische Gleichung:

$$0,5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$$

- Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:

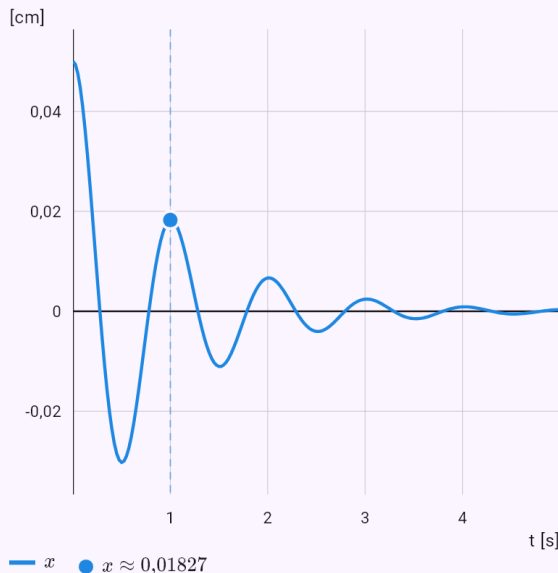
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 6,245i$$
- Schwache Dämpfung ($\delta < \omega_0$; $\delta = 1$, $\omega_0 = 6,325$):
komplexe Wurzeln – gedämpfte Schwingung.
- Lösung der homogenen Gleichung:

$$x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6,245t + C_2 \sin 6,245t)$$
- Wir setzen die Bedingungen in die allgemeine Lösung ein: $x(0) = 0,05$, $x'(0) = 0$, daraus

$$C_1 \approx 0,05, \quad C_2 \approx 0,008006$$
- Die Lösung der Anfangsbedingung (partikuläre Lösung):

$$x = e^{-t}(0,05 \cos 6,245t + 0,008006 \sin 6,245t)$$
- Einsetzen: $x(1) \approx 0,01827 \text{ m}$
- Einheiten umrechnen: $x \approx 0,01827 \text{ m} = 1,827 \text{ cm}$

Graph



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Epidemie mit $R_0 = 2,5$ – Höhepunkt und Gesamtzahl der Infizierten.

Eingabe: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Ergebnis

$$I_{max} \approx 2340 \text{ Ind.}$$

$$t_{max} \approx 34,1 \text{ d}$$

$$R_{\infty} \approx 8930 \text{ Ind.}$$

Lösungsweg

- Gesucht t_{max} ; gegeben

$$N = 10\,000 \text{ Ind.}, \quad I_0 = 10 \text{ Ind.}, \quad R_0 = 2,5, \quad D = 7$$

- Die Bevölkerung N wird in Empfängliche S , Infizierte I und Genesene R geteilt. Neuinfektionen sind proportional zu den Begegnungen: $\beta \cdot S \cdot I / N$; Infizierte genesen mit der Rate $\gamma = 1/D$ (D = Krankheitsdauer). Das System $S' = -\beta SI/N$, $I' = \beta SI/N - \gamma I$, $R' = \gamma I$ hat keine Lösung in elementaren Funktionen – es wird numerisch gelöst. Exakt folgen die Basisreproduktionszahl $R_0 = \beta/\gamma$, der Höhepunkt, die Gesamtzahl der Infizierten und die Herdenimmunitätsschwelle $1 - 1/R_0$. Gleichung des Modells

$$S' = -\frac{\beta SI}{N}$$

$$I' = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

- Genesungsrate: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0,1429 \text{ d}^{-1}$
- Übertragungsrate: $\beta = R_0 \gamma \approx 0,3571 \text{ d}^{-1}$

- Die Summe $S + I + R = N$ ist konstant (die Gleichungen ergeben addiert null).

- Herdenimmunitätsschwelle (Anteil Immuner, ab dem sich die Krankheit nicht mehr ausbreitet):

$$1 - \frac{1}{R_0} \approx 60 \%$$

- Die Epidemie bricht aus, da anfangs

$$I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000 \text{ gilt.}$$

- Der Höhepunkt liegt bei $S = N/R_0$; aus der Gleichung für dI/dS

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0} \ln S = C \Rightarrow I_{max} = 1$$

- Die Gleichung wird numerisch gelöst (Bisektion)

$$\ln \frac{S_{\infty}}{S_0} = \frac{R_0(S_{\infty} - N)}{N} \Rightarrow S_{\infty} \approx 1072 \text{ Ind.}$$

- Insgesamt erkranken:

$$R_{\infty} = N - S_{\infty} \approx 8928 \text{ Ind. (89,3 \%)}$$

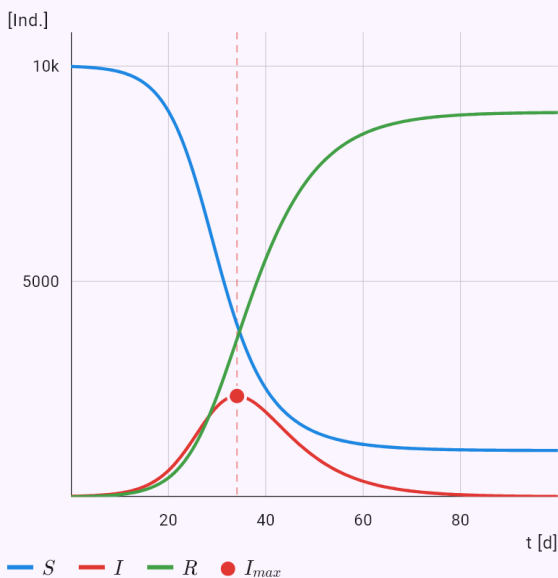
- Das System ist nicht elementar lösbar – es wird numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit Schrittweite 0,05 auf $[0; 100]$ gelöst.

- Aus der numerischen Lösung: $t_{max} \approx 34,1 \text{ d}$

Graph

Zeitverlauf

Phasenebene



Die Größen des Modells im Zeitverlauf, aus der Lösung berechnet; die Antwort ist markiert.

Räuber und Beute – Gleichgewicht, Stabilität und Periode.

Eingabe: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo]; c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

Ergebnis

$$[x^*; y^*] \approx [80; 50]$$

$$T \approx 14,9 \text{ Mon.}$$

Lösungsweg

- Gesucht T ; gegeben

$$a = 0,5 \text{ Mon.}^{-1}, \quad b = 0,01 \text{ (Ind.} \cdot \text{Mon.)}^{-1}, \quad c = 0,4 \text{ l}$$

- Beute x vermehrt sich ohne Räuber (ax), Räuber y sterben ohne Beute ($-cy$). Begegnungen (proportional zu xy) verringern die Beute ($-bxy$) und ernähren die Räuber ($+dxy$). Das System $x' = ax - bxy$, $y' = -cy + dxy$ (Lotka, Volterra) hat das Gleichgewicht $[c/d; a/b]$ mit rein imaginären Eigenwerten der Linearisierung – die Populationen schwanken periodisch, die Räuber hinter der Beute her. Numerisch gelöst; Gleichgewichte und erstes Integral exakt. Gleichung des Modells

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$

- Gleichgewichte – alle Ableitungen sind null

$$x(a - by) = 0, \quad y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0; 0], \quad \left[\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right] \approx [80; 50]$$

- Stabilität durch Linearisierung – Jacobi-Matrix des Systems

$$J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$$

- Im Punkt $[0; 0]$ Eigenwerte $\lambda_1 = -0,4$, $\lambda_2 = 0,5$ – Sattel (instabil).

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}$$

- Im Punkt $[80; 50]$ Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 0,4472i$ – Zentrum (Schwingungen um das Gleichgewicht).

$$\begin{pmatrix} 0 & -0,8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

- Division der Gleichungen und Trennung ergeben ein erstes Integral – eine entlang der Trajektorie konstante Größe: $V = dx - c \ln x + by - a \ln y = C$

- Da V entlang einer Trajektorie konstant ist, sind die Trajektorien geschlossene Kurven – die Populationen schwanken periodisch.

- Periode kleiner Schwingungen um das Gleichgewicht (aus den Eigenwerten): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14,05 \text{ Mon.}$

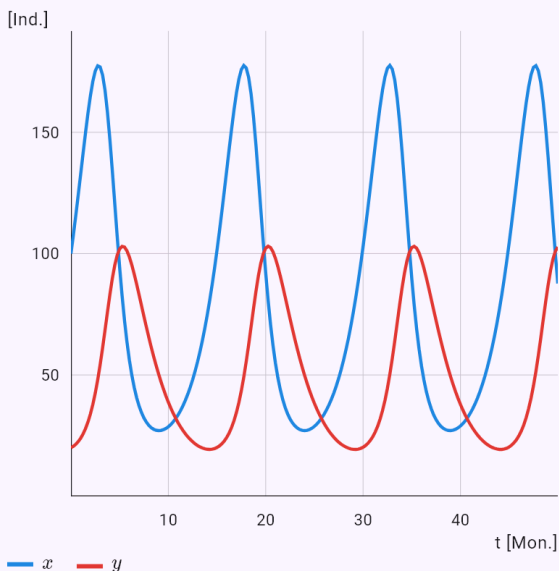
- Das System ist nicht elementar lösbar – es wird numerisch mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit Schrittweite 0,0125 auf $[0; 50]$ gelöst.

- Aus der numerischen Lösung: $T \approx 14,95 \text{ Mon.}$

Graph

Zeitverlauf

Phasenebene



Demnächst

An diesen Aufgabentypen arbeiten wir oder haben sie geplant. Die Reihenfolge kann sich danach richten, was Sie am meisten brauchen.

Gleichungen und Ungleichungen

- Unvollständige quadratische Gleichungen durch Ausklammern oder Wurzelziehen ($x^2 = 9$) statt der Diskriminante.

Funktionen, Ableitungen und Integrale

- Integralanwendungen mit Parametern – allgemeine Formeln (Kugel mit Radius r , Ellipse, Kegel).
- Eingefärbte Fläche und 3D-Körper bei Kurven in Parameterform und in Polarkoordinaten.
- Physikalische Anwendungen von Ableitungen und Integralen (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Arbeit, Schwerpunkt).
- Die komplexe Form der Fourierreihe und das Spektrum.
- Das Riemann- und das Lebesgue-Integral spezieller Funktionen (Dirichlet- und Riemann-Funktion).

Differentialgleichungen

- Systeme von Differentialgleichungen als Gleichungen eingegeben (in den Anwendungen schon vorhanden) und ihr Phasenporträt.
- Laplace-Transformation mit Heaviside-Funktion, Verschiebungen und periodischen rechten Seiten.

Weitere Gebiete

- Vektoren – Betrag, Skalar-, Kreuz- und Spatprodukt, Winkel, Flächen und Volumen.
- Matrizen – Operationen, Determinante, Rang, inverse Matrix, Eigenwerte und Eigenvektoren.
- Konstruktionsaufgaben – Dreiecke, Vierecke und Kreise aus gegebenen Stücken, Konstruktionsbeschreibung und Anzahl der Lösungen.
- Komplexe Zahlen in Polar- und Exponentialform, der Satz von Moivre, n -te Wurzeln.
- Die Cramersche Regel bei linearen Gleichungssystemen.
- Funktionen mehrerer Variablen, Mehrfach-, Kurven- und Oberflächenintegrale.

- Exakter und numerischer Ergebnismodus (Dezimalzahlen statt Brüchen und Wurzeln).
- Textaufgaben – Gleichungen aus dem Text aufstellen und lösen.