

MathSolver – příručka

Co MathSolver umí vyřešit, jak zadání zapsat a jak vypadá výsledek.

MathSolver řeší úlohy z fotky i ručně zapsané a ke každému výsledku ukáže postup tak, jak se počítá ve škole – krok za krokem, s vysvětlením a tam, kde to dává smysl, i s grafem.

Každá kapitola popisuje jeden typ úloh: co od řešení čekat, jak zadání zapsat a ukázky skutečných výstupů aplikace. Na konci kapitoly jsou známá omezení, pokud o nějakých víme.

Obsah

1. Jak zadat úlohu
2. Lineární rovnice a nerovnice
3. Kvadratické rovnice
4. Rovnice vyšších stupňů
5. Lomené rovnice
6. Iracionální rovnice
7. Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice
8. Absolutní hodnota
9. Goniometrické rovnice a nerovnice
10. Nerovnice a soustavy nerovnic
11. Soustavy rovnic
12. Rovnice a nerovnice s parametrem
13. Úpravy výrazů
14. Limity
15. Derivace
16. Průběh funkce
17. Taylorův polynom
18. Neurčitý integrál
 - Základní integrály a substituce
 - Per partes
 - Racionální funkce
 - Goniometrické funkce

Hyperbolické funkce

Odmocniny

19. Určitý integrál a jeho aplikace

Určitý integrál

Nevlastní integrál

Plocha pod křivkou a mezi křivkami

Délka křivky

Objem rotačního tělesa

Plášť rotačního tělesa

Křivky zadané parametricky a v polárních souřadnicích

Křivky zadané rovnicí

20. Nekonečné řady

Číselné řady

Mocninné řady

Taylorova řada

21. Fourierovy řady

22. Diferenciální rovnice

23. Rekurence a vytvořující funkce

24. Aplikace diferenciálních rovnic

25. Připravujeme

Jak zadat úlohu

Úlohu můžete vyfotit – před odesláním oříznete fotku jen na zadání. Aplikace ho rozpozná a ukáže náhled; pokud se přepis nepovedl, opravíte ho v poli pod náhledem. Stejným polem se dá úloha i rovnou napsat.

Je-li zadáním výraz bez rovnítko, vyberete čipem, co s ním udělat: zjednodušit, roznásobit, rozložit, rozložit na parciální zlomky, derivovat, vyšetřit průběh funkce, spočítat Taylorův polynom, integrovat, sečíst řadu nebo spočítat Fourierovu řadu. Volbu „Zaměření“ na úvodní obrazovce si nastavíte podle toho, co právě procvičujete – předvybere vhodný čip.

Rovnice a nerovnice se řeší rovnou. Kde je víc možností postupu (metoda řešení soustavy, absolutní hodnoty, derivace z definice), vyberete ji čipem; výsledek se přepočítá hned. Rovnici a nerovnici řešíte v reálných číslech; čipem „Obor řešení“ zvolíte místo toho $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{R}^+$. U limity si čipem vyberete, zda se má neurčitý výraz řešit úpravou, nebo rovnou l'Hospitalovým pravidlem.

Jak zadat

$x^2 + 3x - 4$	Mocnina se píše ^, násobení číslem i proměnnou se nemusí psát (3x, 2xy).
$(x+1)/(x-2)$	Zlomek lomítkem; čitatel i jmenovatel, které nejsou jedno číslo nebo písmeno, dejte do závorek.
$\sqrt{x+1}$, $x^{1/3}$	Druhá odmocnina sqrt(...), obecná jako mocnina se zlomkem v exponentu.
$ 2x - 1 $	Absolutní hodnota svislými čarami. Jde-li zápis číst víc způsoby ($ x y z $), aplikace nabídne možnosti na výběr; jednoznačné je uzavřít absolutní hodnotu do závorek: $2x(x - 1)$.
$\ln x$, $\log x$, $\log_2 x$	ln je přirozený logaritmus, log (nebo lg) desítkový, log_2 se základem 2.
$\sin x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$	Goniometrické funkce; argument bez závorky je jednočlen za funkcí ($\cos 2x = \cos(2x)$).
$\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{argsinh} x$	Hyperbolické funkce sinh, cosh, tgh, cotgh a hyperbolometrické argsinh, argcosh, argtgh, argcotgh

(přijme i $\tanh$, $\coth$, arsinh , ...).

$\sin \alpha = 1/2, \sin(x + 30^\circ)$	Úhel ve stupních: řecké písmeno jako neznámá (α , β , ... nebo přímo α), nebo stupně u čísla; latinská písmena jsou v radiánech.
$\sin x = 1/2, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$	Kořeny v intervalu – za čárkou nebo na dalším řádku ($x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ i $0 \leq x < 2\pi$).
π, e, ∞	Ludolfovo číslo π , Eulerovo číslo e , nekonečno ∞ .
$x \sin x, 2x(x+1)$	Mezi proměnnou a funkcí dejte mezeru ($x \sin x$) – $x \sin x$ se čte jako součin písmen.
$2x + 3y = 7$ $x - y = 1$	Soustavu rovnic nebo nerovnic napište po řádcích, každou na vlastní řádek.
$(3+4i)/(1-2i)$	Komplexní čísla: i je imaginární jednotka (ve výrazech i rovnicích).
$x^2 < 10, x \in \mathbb{Z}$	Obor řešení za čárkou: $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$ (nebo $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}^+$, „v $\mathbb{N}$ “); $\mathbb{N}$ je bez nuly.

Známá omezení

- Výsledek je v přesném tvaru (zlomky, odmocniny, π) s přibližnou hodnotou; čistě numerický režim zatím není.

Lineární rovnice a nerovnice

Lineární rovnici aplikace upraví tak, jak se to dělá ve škole – roznásobí závorky, převede neznámou na jednu stranu a vydělí. U nerovnice hlídá změnu znaménka při násobení záporným číslem a výsledek zapíše intervalem; graf ukáže obě strany jako přímky a řešení vyznačí na ose x.

Ukázky

Rovnice se závorkou.

Zadání: $3(x - 2) = 2x + 5$

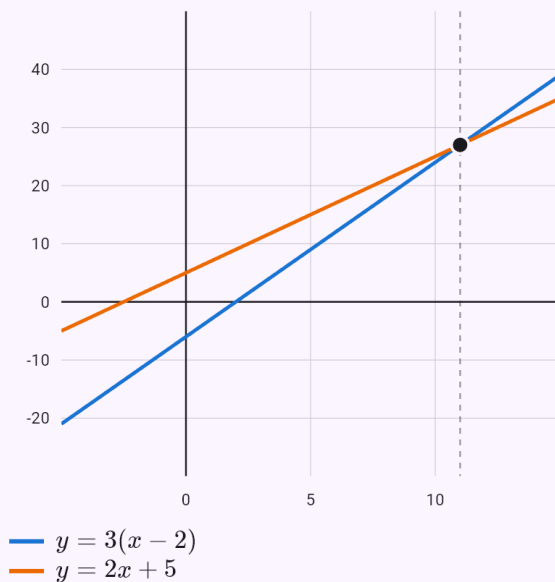
Výsledek

$$x = 11$$

Postup

- Převedeme vše na jednu stranu: $x - 11 = 0$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $x = 11$

Graf



Průsečíky grafů:

● $[11; 27]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Nerovnice – dělení záporným číslem obrátí znaménko.

Zadání: $2x - 3 < 5x + 6$

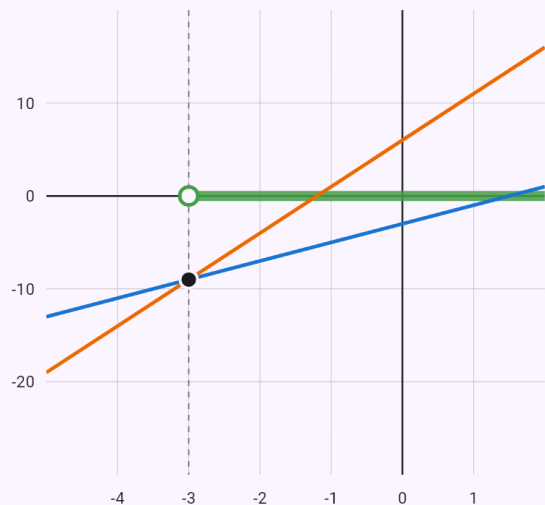
Výsledek

$$x \in (-3; \infty)$$

Postup

- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $-3x < 9$
- Vydělíme záporným číslem -3 , znaménko nerovnosti se obrátí: $x > -3$

Graf



$$y = 2x - 3$$

$$y = 5x + 6$$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

$$\bullet [-3; -9]$$

Kvadratické rovnice

Kvadratickou rovnici aplikace převede do tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ a řeší ji diskriminantem a vzorcem; pozná i dvojnásobný kořen. Nemá-li rovnice reálné řešení, řekne to a tlačítkem „Zobrazit komplexní řešení“ ukáže komplexní kořeny.

Ukázky

Dva reálné kořeny.

Zadání: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Výsledek

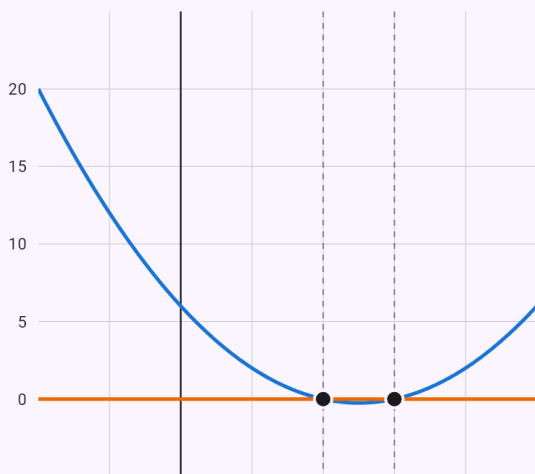
$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

Postup

- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graf



-1 0 1 2 3 4

$y = x^2 - 5x + 6$
 $y = 0$

Průsečíky grafů:

- $[2; 0]$ • $[3; 0]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Záporný diskriminant – komplexní kořeny.

Zadání: $x^2 + 2x + 5 = 0$

Zobrazit komplexní řešení

Výsledek

$$x_1 = -1 + 2i$$

$$x_2 = -1 - 2i$$

Postup

- Vypočítáme diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

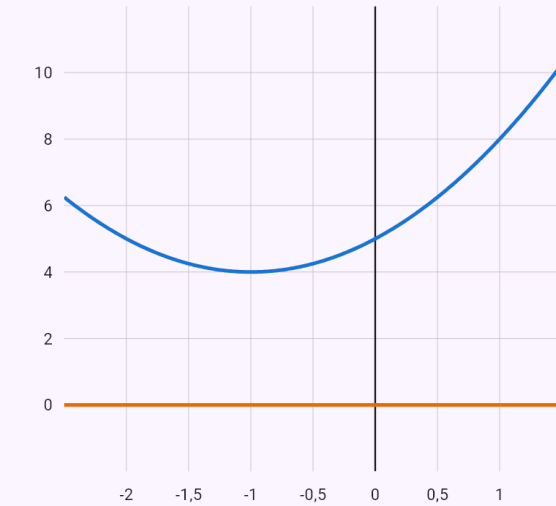
- Diskriminant je záporný – v oboru komplexních čísel:

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$$

- Dosadíme do vzorce pro kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

Graf



— $y = x^2 + 2x + 5$
— $y = 0$

Grafy se neprotínají – rovnice nemá žádné reálné řešení.

Rovnice vyšších stupňů

Bikvadratickou rovnici aplikace převede substitucí na kvadratickou. Obecnou rovnici vyššího stupně rozloží Hornerovým schématem: kořeny hledá mezi děliteli absolutního členu a každý nalezený kořen ze rovnice vydělí, dokud nezbude kvadratická rovnice.

Ukázky

Bikvadratická rovnice substitucí $y = x^2$.

Zadání: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Výsledek

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -1$$

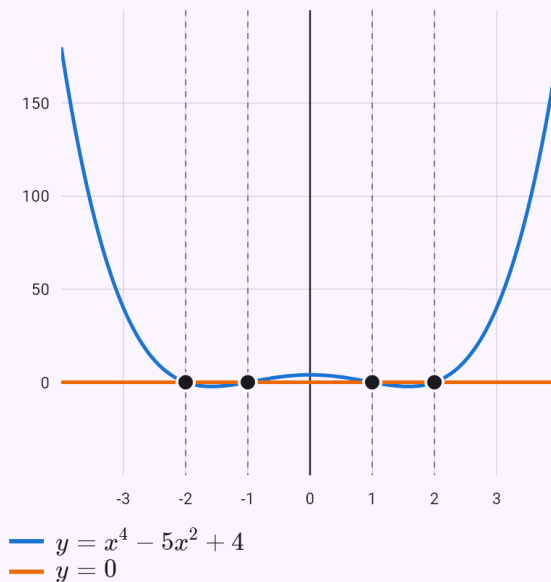
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 2$$

Postup

- Substitucí $u = x^2$ převedeme rovnici na kvadratickou:
 $u^2 - 5u + 4 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
 $u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$
- Vrátíme se k původní neznámé: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Vrátíme se k původní neznámé: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Graf



Průsečíky grafů:

• $[-2; 0]$ • $[-1; 0]$ • $[1; 0]$ • $[2; 0]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Hornerovo schéma – kořeny mezi děliteli absolutního členu.

Zadání: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Výsledek

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

Postup

- Racionální kořeny mohou být jen dělitelé absolutního členu -6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

- Hornerovým schématem ověříme kořen $x = 1$ a vydělíme jím polynom:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

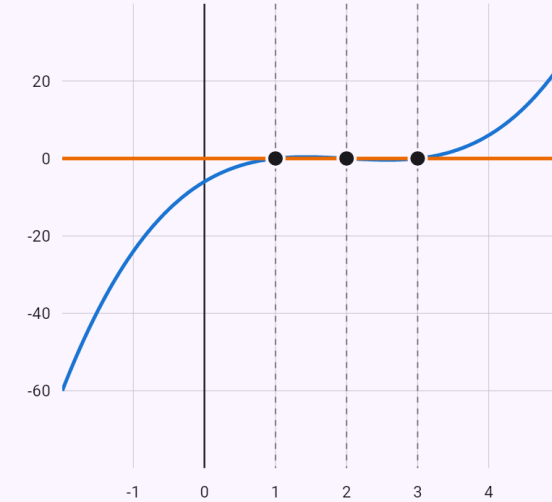
- Vypočítáme diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

- Dosadíme do vzorce pro kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Graf



— $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
— $y = 0$

Průsečíky grafů:

• $[1; 0]$ • $[2; 0]$ • $[3; 0]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Lomené rovnice

U rovnice s neznámou ve jmenovateli aplikace nejdřív stanoví podmínky, pak rovnici vynásobí společným jmenovatelem a vyřeší. Kořeny porovná s podmínkami a ty, které jim nevyhovují, vyřadí.

Ukázky

Podmínky, společný jmenovatel, kvadratická rovnice.

Zadání: $(x+3)/(x-1) = 2/(x-1) + x$

Výsledek

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$

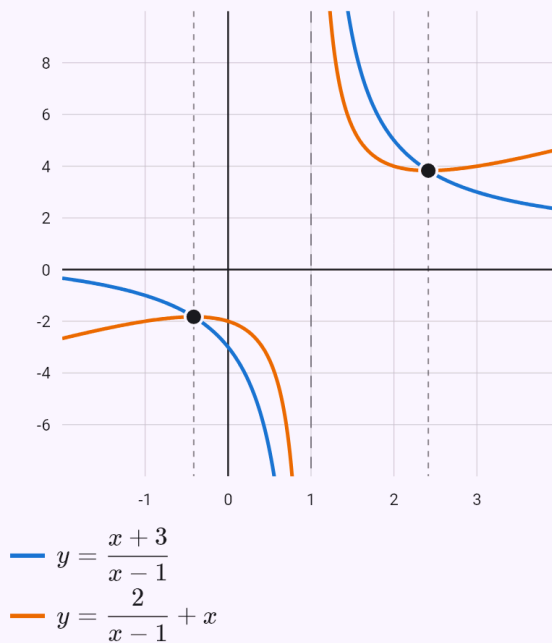
$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Podmínky: $x \neq 1$

Postup

- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq 1$
- Obě strany vynásobíme jmenovatelem $x - 1$:
 $x + 3 = x^2 - x + 2$
- Převědeme vše na jednu stranu: $x^2 - 2x - 1 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Kořen $x = 1 - \sqrt{2}$ podmínkám vyhovuje.
- Kořen $x = 1 + \sqrt{2}$ podmínkám vyhovuje.

Graf



Průsečíky grafů:

• $\left[1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\right]$ • $\left[1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Iracionální rovnice

Rovnici s neznámou pod odmocninou aplikace řeší osamostatněním odmocniny a umocněním. Umocnění může přidat kořeny, které rovnici nesplňují – proto vždy následuje zkouška a nevyhovující kořeny vyřadí.

Ukázky

Umocnění a zkouška – jeden z kořenů rovnici nesplňuje.

Zadání: $\sqrt{x+5} = x - 1$

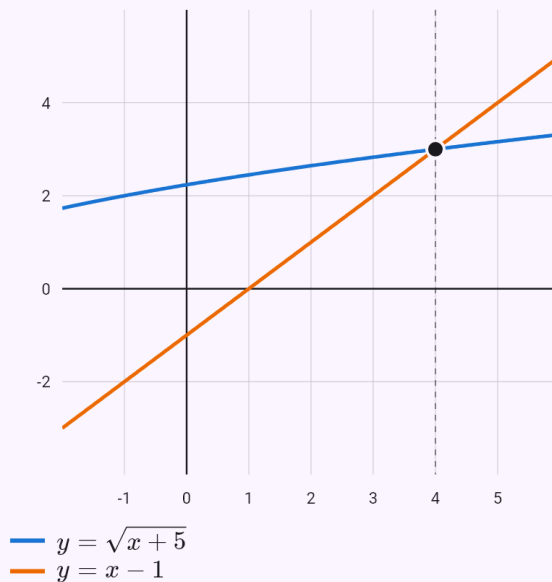
Výsledek

$$x = 4$$

Postup

- Obě strany umocníme na druhou (není to ekvivalentní úprava, kořeny proto ověříme zkouškou):
$$x + 5 = (x - 1)^2$$
- Převádíme vše na jednu stranu: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- Zkouška pro $x = -1$: $L = 2$, $P = -2$, $L \neq P$ – kořen nevyhovuje.
- Zkouška pro $x = 4$: $L = 3$, $P = 3$, $L = P$ – kořen vyhovuje.

Graf



Průsečíky grafů:

• $[4; 3]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Známá omezení

- Iracionální nerovnice zatím neřešíme.

Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

Exponenciální rovnici aplikace řeší převedením na stejný základ, logaritmováním nebo substitucí; logaritmickou sloučením logaritmů podle pravidel a odlogaritmováním, vždy s podmínkami. Nerovnice řeší přes monotonii – u základu menšího než 1 se znaménko obrátí.

Rovnice s různými základy: $a^x + b^x = c^x$ se základy ze dvou prvočísel ($25^x + 10^x = 4^x$) vydělí mocninou a substitucí $t = (5/2)^x$ převede na kvadratickou; logaritmy různých základů převede na jeden ($\log_5 x = \log_2 x / \log_2 5$).

Logaritmy, jejichž základy jsou mocninami jednoho čísla ($\log_2 x + \log_4(x + 2) = 2$), převede na jeden základ ($\log_4 a = \log_2 a / 2$), rovnici vynásobí a logaritmy sloučí. Logaritmus s neznámou v základu ($\log_x 8 = 3$) odlogaritmuje podle definice ($x^3 = 8$) s podmínkami $x > 0$, $x \neq 1$. Rovnici s neznámou v základu i v exponentu ($x^{\log x} = 100$) zlogaritmuje a vyřeší substitucí $t = \log x$. Nerovnice se substitucí $t = \log(x + 1)$ a soustavy logaritmických a exponenciálních nerovnic řeší stejně jako jednotlivé nerovnice – přes monotonii.

Rovnice a nerovnice s hyperbolickými funkcemi převede podle definice ($\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, ...) na exponenciální a vyřeší substitucí $t = e^x$; $\operatorname{argsinh} x = c$ vyřeší inverzní funkcí ($x = \sinh c$).

Ukázky

Substituce $t = 2^x$.

Zadání: $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

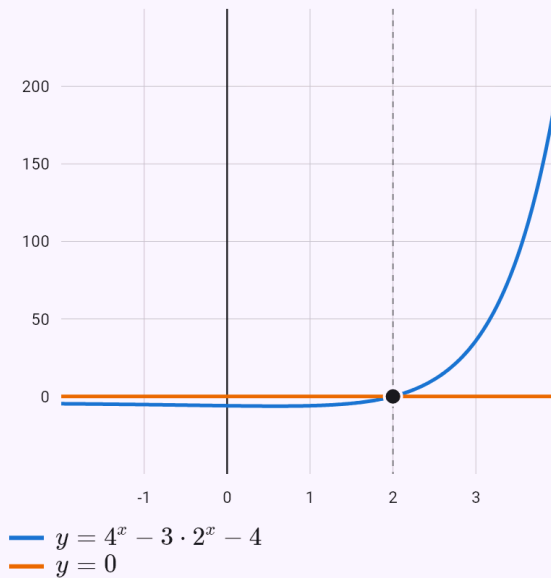
Výsledek

$$x = 2$$

Postup

- Zavedeme substituci $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2}$$
- Rovnice $2^x = -1$ nemá reálné řešení.
- Vrátime se k původní neznámé: $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Graf



Průsečíky grafů:

- $[2; 0]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Sloučení logaritmů, podmínky.

Zadání: $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

Výsledek

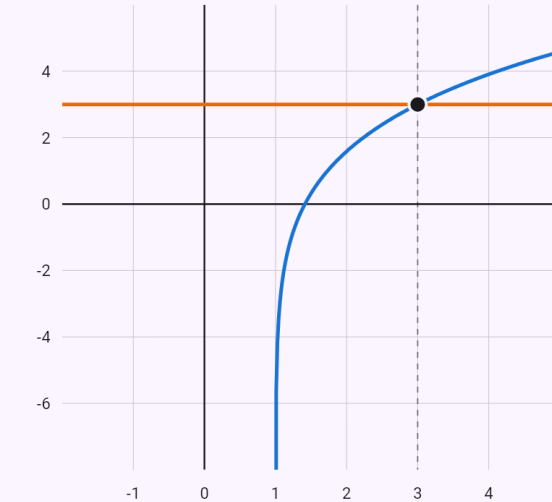
$$x = 3$$

Podmínky: $x > 1$

Postup

- Definiční obor – podmínky: $x > -1, x > 1 \Rightarrow x > 1$
- Podle pravidel pro počítání s logaritmy je sloučíme:
 $\log_2((x-1)(x+1)) = 3$
- Odlogaritmuje: $(x-1)(x+1) = 2^3$
- Převědeme vše na jednu stranu: $x^2 - 9 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 6}{2}$
- Kořen $x = -3$ nevyhovuje podmínce $x > 1$, není tedy řešením.
- Kořen $x = 3$ podmínkám vyhovuje.

Graf



$y = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$
 $y = 3$

Průsečíky grafů:

• $[3; 3]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x.

Různé základy – vydělíme 4^d a substituce $t = (5/2)^d$.

Zadání: $25^d + 10^d = 4^d$

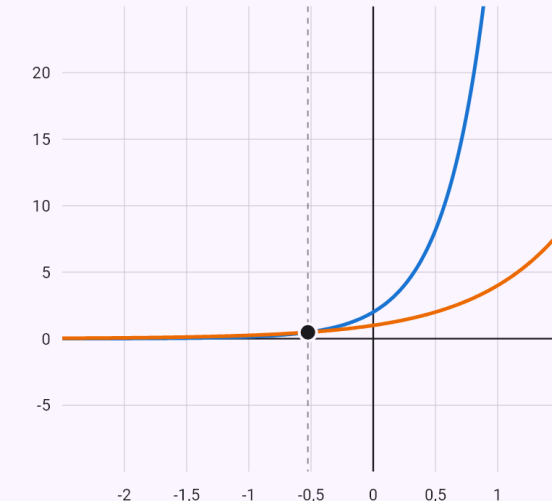
Výsledek

$$d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Postup

- Rovnici vydělíme kladným výrazem 4^d :
 $\left(\frac{5}{2}\right)^{2d} + \left(\frac{5}{2}\right)^d = 1$
- Zavedeme substituci $t = \left(\frac{5}{2}\right)^d$: $t^2 + t - 1 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Rovnice $\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ nemá reálné řešení.
- Vrátime se k původní neznámé
 $\left(\frac{5}{2}\right)^d = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

Graf



$y = 25^d + 10^d$
 $y = 4^d$

Průsečíky grafů:

• $\left[\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right); 0,4829\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota d.

Základ menší než 1 – znaménko nerovnosti se obrátí.

Zadání: $(1/2)^x > 8$

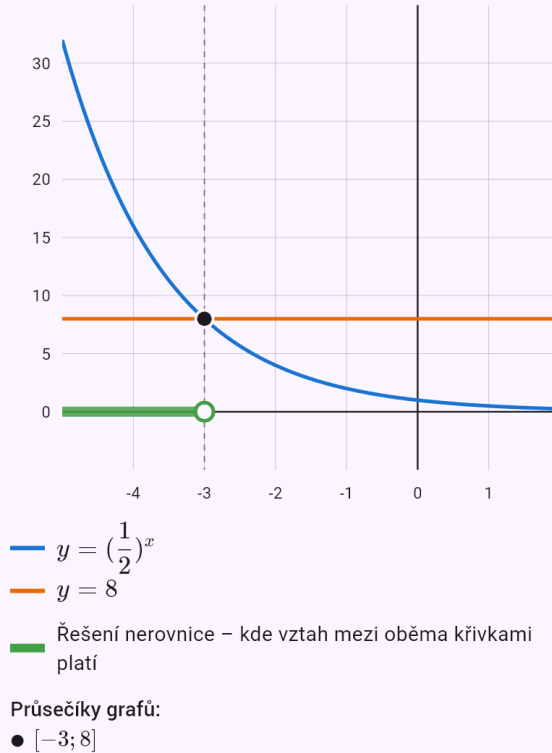
Výsledek

$$x \in (-\infty; -3)$$

Postup

- Obě strany zapíšeme jako mocniny se stejným základem:
 $2^{-x} > 2^3$
- Exponenciální funkce o základu 2 je rostoucí – pro exponenty platí nerovnost se stejným znaménkem:
 $-x > 3$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $-x > 3$
- Vydělíme záporným číslem -1 , znaménko nerovnosti se obrátí: $x < -3$
- Řešením této nerovnice je $x \in (-\infty; -3)$

Graf



Hyperbolický tangens z definice – substituce $t = e^{2x}$.

Zadání: $\operatorname{tgh} x = 1/2$

Výsledek

$$x = \frac{\ln 3}{2}$$

Postup

- Dosadíme definice

$$\operatorname{tgh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3}{2e^{2x} + 2} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 0$$

- Zavedeme substituci $t = e^{2x}$: $t - 3 = 0$
- Vyřešíme: $t = 3$
- Vrátime se k původní neznámé: $e^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$

Neznámá v základu – podle definice, kořen -1 nevyhovuje podmínkám.

Zadání: $\log_x (2x+3) = 2$

Výsledek

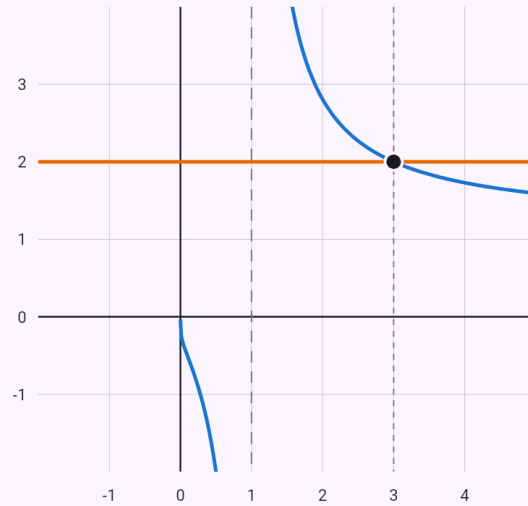
$$x = 3$$

Podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$

Postup

- Definiční obor – podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$
- Odlogaritmuje: $x^2 = 2x + 3$
- Převědeme vše na jednu stranu: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
- Kořen $x = -1$ nevyhovuje podmínce $x > 0$, $x \neq 1$, není tedy řešením.
- Kořen $x = 3$ podmínkám vyhovuje.

Graf



$y = \log_x (2x + 3)$
 $y = 2$

Průsečíky grafů:

• $[3; 2]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Neznámá v základu i v exponentu – zlogaritmuje, substituce $t = \log x$.

Zadání: $x^{(\log x)} = 100$

Výsledek

$$x_1 = 10^{-\sqrt{2}}$$

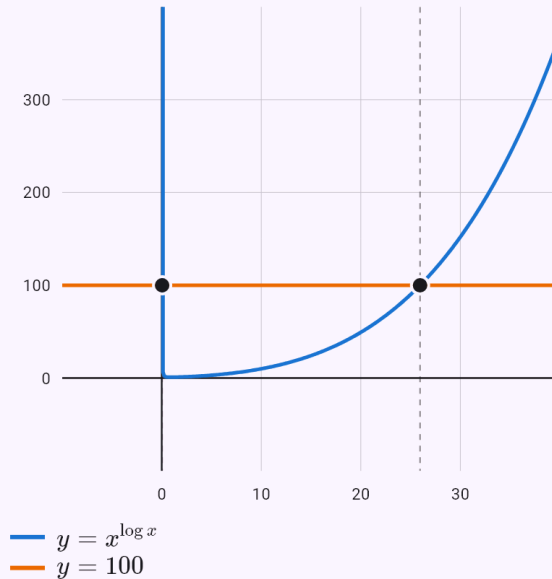
$$x_2 = 10^{\sqrt{2}}$$

Podmínky: $x > 0$

Postup

- Obě strany zlogaritmuje:
 $\log(x^{\log x}) = 2 \Rightarrow \log x \cdot \log x = 2$
- Definiční obor – podmínky: $x > 0$
- Zavedeme substituci $t = \log x$: $t^2 - 2 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{2}$
- Vrátime se k původní neznámé:
 $\log x = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{-\sqrt{2}}$
- Vrátime se k původní neznámé:
 $\log x = \sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{\sqrt{2}}$
- Kořen $x = 10^{-\sqrt{2}}$ podmínkám vyhovuje.
- Kořen $x = 10^{\sqrt{2}}$ podmínkám vyhovuje.

Graf



Průsečíky grafů:

$$\bullet [10^{-\sqrt{2}}; 100] \quad \bullet [10^{\sqrt{2}}; 100]$$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Známá omezení

- Logaritmy různých základů, které nejsou mocninami jednoho čísla ($\log_2 x + \log_3(x+1) = 2$), řeší jen numericky.
- Hyperbolické rovnice, které vedou na rovnici 4. stupně v e^x ($\cosh^2 x - 3 \sinh x = 3$), řeší jen numericky; nerovnice s hyperbolometrickými funkcemi zatím neumíme.

Absolutní hodnota

Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou aplikace řeší dvěma způsoby, které vyberete čipem: „Podle definice“ – zkratkou rozepsáním $|a| = b$ nebo $|a| < b \rightarrow a$ „Nulové body“ – rozdělením číselné osy na intervaly, na nichž má každá absolutní hodnota pevné znaménko. Bez volby zvolí vhodnější způsob sama.

Vnořené absolutní hodnoty ($||x| - 2| = 1$) řeší stejně: podle definice postupně zvenku dovnitř, metodou nulových bodů zevnitř ven – nejdřív nulové body vnitřních absolutních hodnot, na každém intervalu pak zbylou absolutní hodnotu.

Nerovnici $|f| < |g|$ (na každé straně jen absolutní hodnota) lze vyřešit i čipem „Umocněním“: obě strany jsou nezáporné, takže ji umocní na druhou a vyřeší jako kvadratickou. Samotný výraz s absolutními hodnotami ($|x - 1| + |x + 2|$) zjednoduší po částech – nulové body, tabulka znamének a na každém intervalu výraz bez absolutních hodnot.

Ukázky

Jedna absolutní hodnota – rozepsání podle definice.

Zadání: $|2x - 1| = 5$

Výsledek

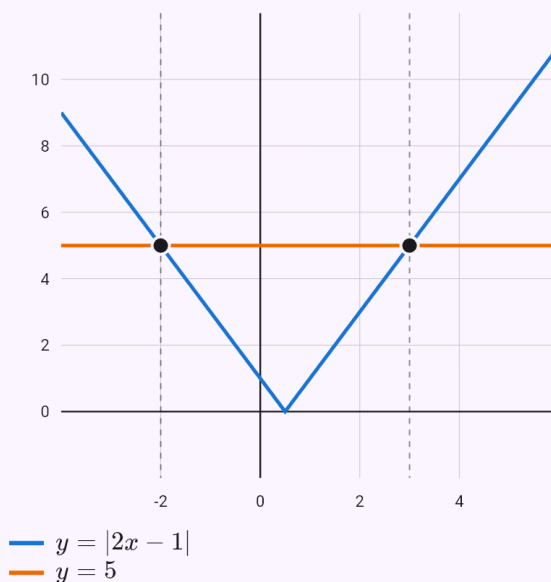
$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3$$

Postup

- Absolutní hodnota je jen jedna a na druhé straně je číslo – stačí ji rozepsat podle definice.
- Podle definice platí $|2x - 1| = 5$, právě když $2x - 1 = 5$, nebo $2x - 1 = -5$
- Vyřešíme: $2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3$
- Vyřešíme: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$

Graf



Průsečíky grafů:

- $\bullet [-2; 5]$
- $\bullet [3; 5]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Dvě absolutní hodnoty – metoda nulových bodů.

Zadání: $|x - 1| + |x + 2| < 5$

Výsledek

$$x \in (-3; 2)$$

Postup

• Absolutní hodnoty odstraníme metodou nulových bodů: rozdělí číselnou osu na intervaly a na každém z nich mají výrazy v absolutních hodnotách stálé znaménko.

• Nulové body výrazů v absolutních hodnotách:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

• Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

• Na intervalu $(-\infty; -2)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (-x - 2) < 5$

• Vyřešíme: $-2x - 1 < 5$

• Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $-2x < 6$

• Vydělíme záporným číslem -2 , znaménko nerovnosti se obrátí: $x > -3$

• Řešením této nerovnice je $x \in (-3; \infty)$

• Průnik s intervalem $(-\infty; -2)$: $x \in (-3; -2)$

• Na intervalu $(-2; 1)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (x + 2) < 5$

• Neznámá se vyrušila a zbylo pravdivé tvrzení $3 < 5$ – řešením je celý interval $(-2; 1)$

• Na intervalu $(1; \infty)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(x - 1) + (x + 2) < 5$

• Vyřešíme: $2x + 1 < 5$

• Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $2x < 4$

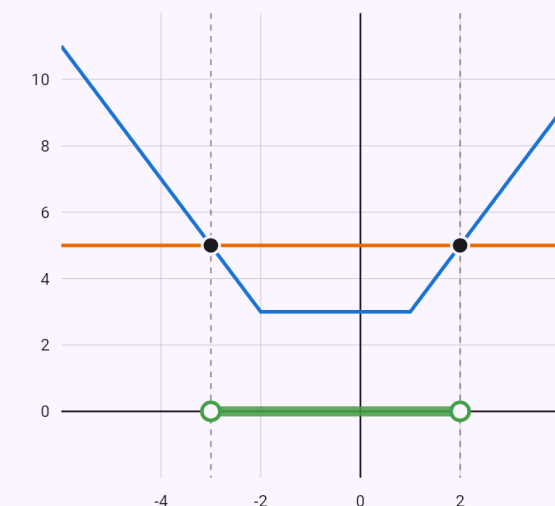
• Vydělíme kladným číslem 2 , znaménko nerovnosti se nemění: $x < 2$

• Řešením této nerovnice je $x \in (-\infty; 2)$

• Průnik s intervalem $(1; \infty)$: $x \in (1; 2)$

• Řešením je sjednocení výsledků: $x \in (-3; 2)$

Graf



$$\text{blue line: } y = |x - 1| + |x + 2|$$

$$\text{orange line: } y = 5$$

green line: Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

$$\bullet [-3; 5] \quad \bullet [2; 5]$$

Vnořená absolutní hodnota – podle definice zvenku dovnitř.

Zadání: $||x| - 2| = 1$

Výsledek

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -1$$

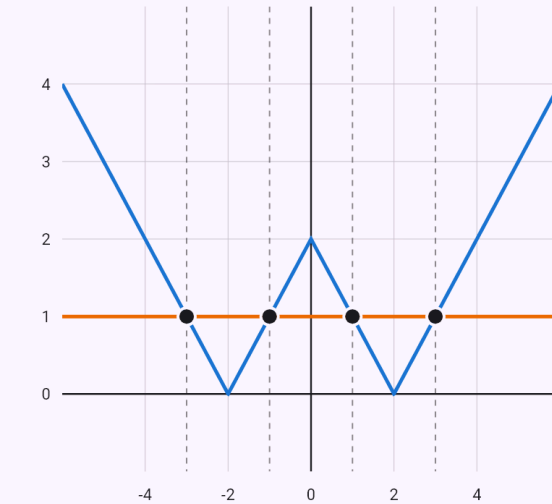
$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 3$$

Postup

- Absolutní hodnota je jen jedna a na druhé straně je číslo – stačí ji rozepsat podle definice.
- Podle definice platí $||x| - 2| = 1$, právě když $|x| - 2 = 1$, nebo $|x| - 2 = -1$
- Osamostatníme absolutní hodnotu: $|x| = 3$
- Podle definice platí $|x| = 3$, právě když $x = 3$, nebo $x = -3$
- Osamostatníme absolutní hodnotu: $|x| = 1$
- Podle definice platí $|x| = 1$, právě když $x = 1$, nebo $x = -1$

Graf



$y = ||x| - 2|$
 $y = 1$

Průsečíky grafů:

$\bullet [-3; 1]$ $\bullet [-1; 1]$ $\bullet [1; 1]$ $\bullet [3; 1]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Absolutní hodnota na obou stranách – umocnění na druhou.

Zadání: $|x - 1| < |2x + 3|$ Umocněním

Výsledek

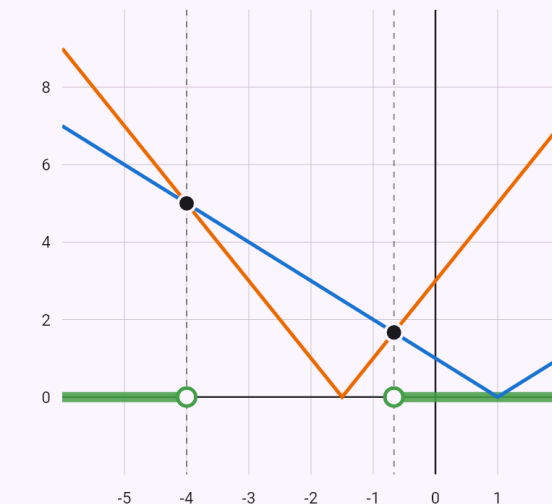
$$x \in (-\infty; -4) \cup \left(-\frac{2}{3}; \infty\right)$$

Postup

- Na obou stranách je jen absolutní hodnota – obě strany jsou nezáporné, nerovnici proto můžeme umocnit na druhou (je to ekvivalentní úprava).
- Umocníme obě strany: $(x - 1)^2 < (2x + 3)^2$
- Převědeme vše na jednu stranu: $-3x^2 - 14x - 8 < 0$
- Rozložíme na součin: $-(x + 4)(3x + 2) < 0$
- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly:
 $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{2}{3}$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; -4)$	$(-4; -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}; \infty)$
-1	-	-	-
$x + 4$	-	+	+
$3x + 2$	-	-	+
$-(x + 4)(3x + 2)$	-	+	-

Graf



$y = |x - 1|$
 $y = |2x + 3|$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

$\bullet [-4; 5]$ $\bullet \left[-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right]$

Výraz s absolutními hodnotami – po částech na intervalech.

Zadání: $|x - 1| + |x + 2|$

Výsledek

$$\begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty; -2) \\ 3, & x \in \langle -2; 1) \\ 2x + 1, & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

Postup

- Absolutní hodnoty odstraníme metodou nulových bodů: rozdělí číselnou osu na intervaly a na každém z nich mají výrazy v absolutních hodnotách stálé znaménko.

- Nulové body výrazů v absolutních hodnotách:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; -2)$	$\langle -2; 1)$	$\langle 1; \infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

- Na intervalu $(-\infty; -2)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$
- Na intervalu $\langle -2; 1)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(1 - x) + (x + 2) = 3$
- Na intervalu $\langle 1; \infty)$ odstraníme absolutní hodnoty podle znamének: $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$

Známá omezení

- Výraz s absolutní hodnotou zjednodušíme jen na celé číselné ose, ne na zadaném intervalu; umocnění nabízíme jen u nerovnice s jedinou absolutní hodnotou na každé straně.

Goniometrické rovnice a nerovnice

Aplikace převede rovnici na základní rovnice typu $\sin x = a$ a ty vyřeší na jednotkové kružnici: najde úhly v jedné otočce a přičte k nim násobky periody ($x = \pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Kružnice je nakreslená přímo v postupu.

Přednostně používá známé vzorce – dvojnásobný a poloviční argument, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, součet na součin –, dále vytýkání, substituci $t = \sin x$, dělení homogenní rovnice $\cos^n x$ a pomocný úhel u $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$. Výsledek ještě ověří numericky na celé periodě.

Neznámá latinským písmenem (x, t) je v radiánech, řeckým písmenem ($\alpha, \beta, \dots$) ve stupních – stejně jako zadání se znakem $^\circ$ ($\sin(x + 30^\circ)$). Kořeny v daném intervalu dostanete, když interval připsíte za čárku nebo na další řádek.

Nerovnici aplikace řeší obloukem na jednotkové kružnici, složitější přes nulové body na jedné periodě; výsledek jsou intervaly s periodou.

Ukázky

Dvě větve řešení, úhly na jednotkové kružnici.

Zadání: $\sin x = 1/2$

Výsledek

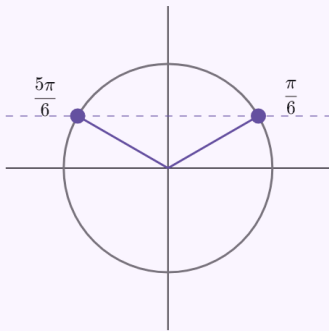
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

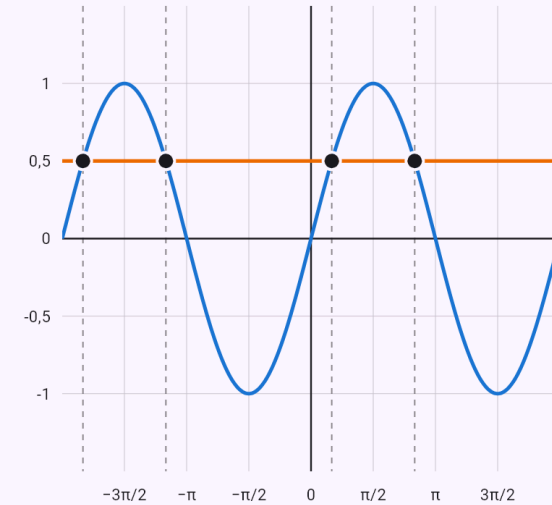
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Základní rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graf



— $y = \sin x$
— $y = \frac{1}{2}$

Průsečíky grafů:

$$\bullet \left[-\frac{11\pi}{6}; \frac{1}{2} \right] \bullet \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{1}{2} \right] \bullet \left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2} \right] \bullet \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2} \right]$$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Substituce $t = \sin x$ a kvadratická rovnice.

Zadání: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

Výsledek

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Zavedeme substituci $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$

- Vypočítáme diskriminant:

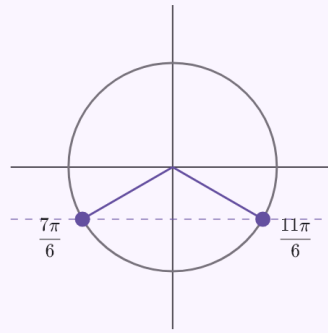
$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

- Dosadíme do vzorce pro kořeny:

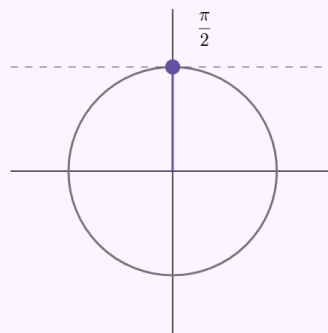
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

- Základní rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:

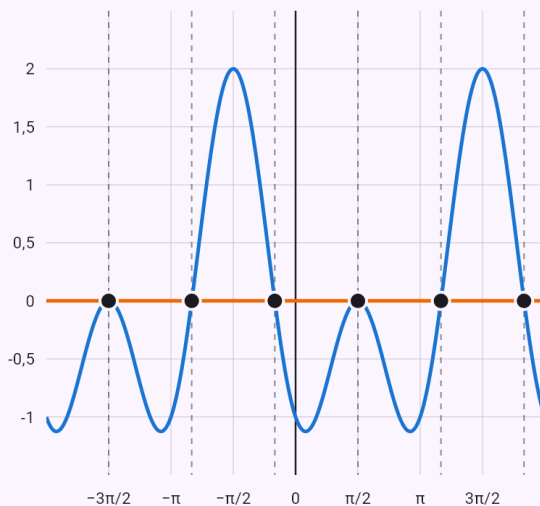
$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$



- Základní rovnice $\sin x = 1$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{2}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



Graf



— $y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$
— $y = 0$

Průsečíky grafů:

$$\bullet \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right] \bullet \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right] \bullet \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right] \bullet \left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$$
$$\bullet \left[\frac{7\pi}{6}; 0\right] \bullet \left[\frac{11\pi}{6}; 0\right]$$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Vzorec pro $\sin 2x$ a rozklad na součin.

Zadání: $\sin 2x = \cos x$

Výsledek

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

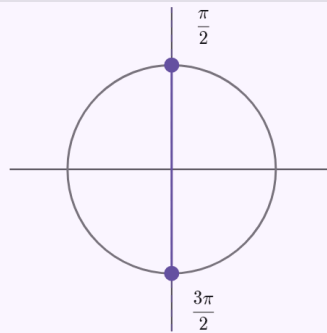
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

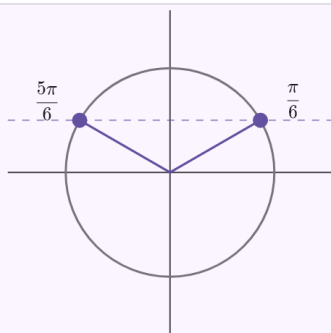
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

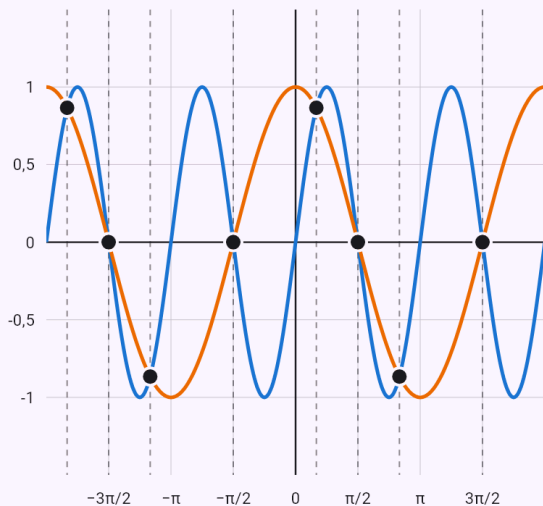
- Převědeme vše na jednu stranu: $\sin(2x) - \cos x = 0$
- Použijeme vzorec $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$:
 $2 \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0$
- Rozložíme na součin – součin je nulový, právě když je nulový některý z činitelů: $(2 \sin x - 1) \cos x = 0$
- Řešíme rovnici $\cos x = 0$
- Základní rovnice $\cos x = 0$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



- Řešíme rovnici $2 \sin x - 1 = 0$
- Osamostatníme goniometrickou funkci: $\sin x = \frac{1}{2}$
- Základní rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:
 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$



Graf



— $y = \sin 2x$
 — $y = \cos x$

Průsečíky grafů:

- $\left[-\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ • $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ • $\left[-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ • $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ • $\left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$ • $\left[\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $\left[\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Pomocný úhel: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \pi/4)$.

Zadání: $\sin x + \cos x = 1$

Výsledek

$$x_1 = 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Převědeme vše na jednu stranu: $\cos x + \sin x - 1 = 0$

- Zavedeme pomocný úhel φ :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \text{ kde}$$

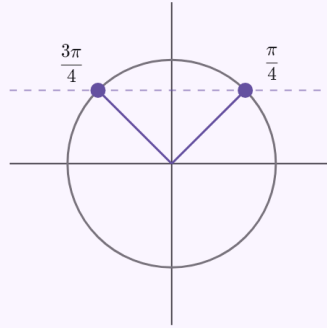
$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

- Osamostatníme goniometrickou funkci:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Základní rovnice $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:

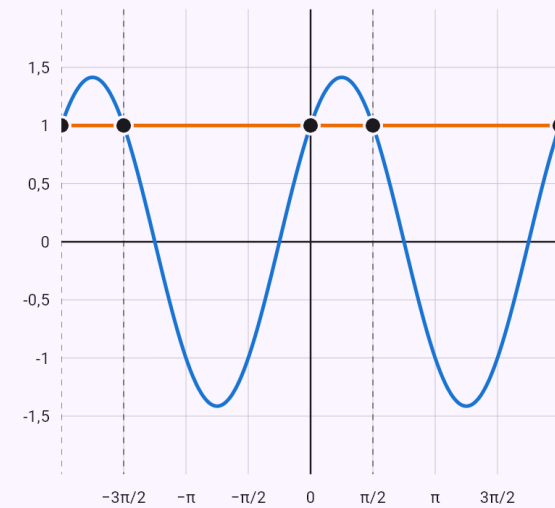
$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$



- Vyjádříme neznámou

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Graf



— $y = \sin x + \cos x$

— $y = 1$

Průsečíky grafů:

• $[-2\pi; 1]$ • $\left[-\frac{3\pi}{2}; 1\right]$ • $[0; 1]$ • $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$

• $[2\pi; 1]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Řecké písmeno – výsledek ve stupních.

Zadání: $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$

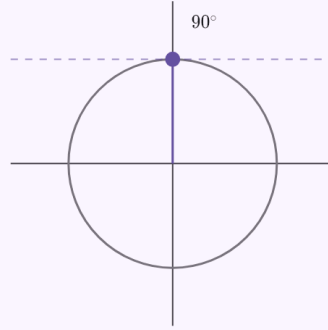
Výsledek

$$\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

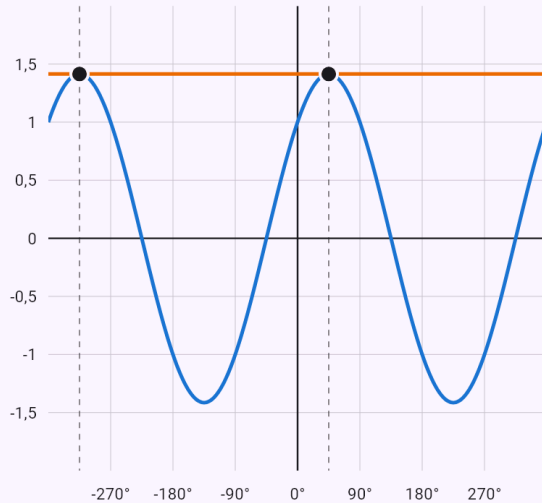
Postup

- Převědeme vše na jednu stranu: $\cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{2} = 0$
- Zavedeme pomocný úhel φ :
 $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$, kde
 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$
- Osamostatníme goniometrickou funkci:
 $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$
- Základní rovnice $\sin(\alpha + 45^\circ) = 1$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly 90° ; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:
 $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$



- Vyjádříme neznámou
 $\alpha + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$

Graf



— $y = \sin \alpha + \cos \alpha$

— $y = \sqrt{2}$

Průsečíky grafů:

• $[-315^\circ; \sqrt{2}]$ • $[45^\circ; \sqrt{2}]$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Jen kořeny v zadaném intervalu.

Zadání: $\sin x = 1/2$, $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$

Výsledek

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

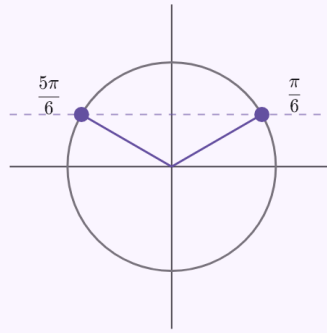
$$x_3 = \frac{13\pi}{6}$$

$$x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

Postup

- Základní rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:

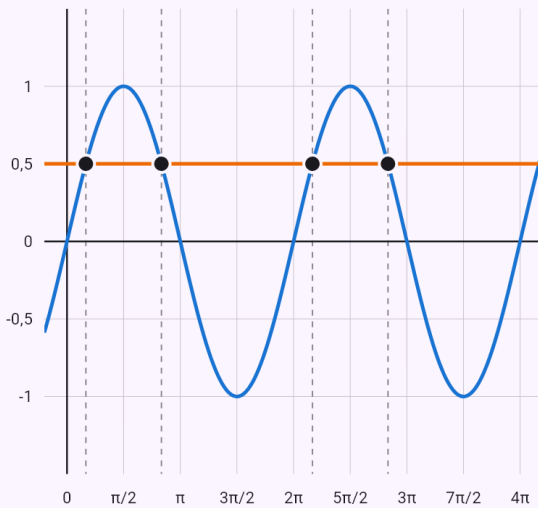
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



- V intervalu $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$ leží řešení

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_3 = \frac{13\pi}{6}, \quad x_4 = \frac{17\pi}{6}$$

Graf



— $y = \sin x$

— $y = \frac{1}{2}$

Průsečíky grafů:

$$\bullet \left[\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2} \right] \quad \bullet \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2} \right] \quad \bullet \left[\frac{13\pi}{6}; \frac{1}{2} \right] \quad \bullet \left[\frac{17\pi}{6}; \frac{1}{2} \right]$$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení rovnice – jeho první souřadnice je hodnota x .

Oblouk na jednotkové kružnici, interval kolem nuly.

Zadání: $\cos x > 1/2$

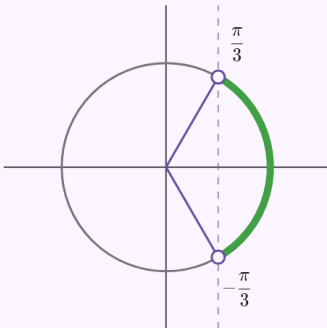
Výsledek

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

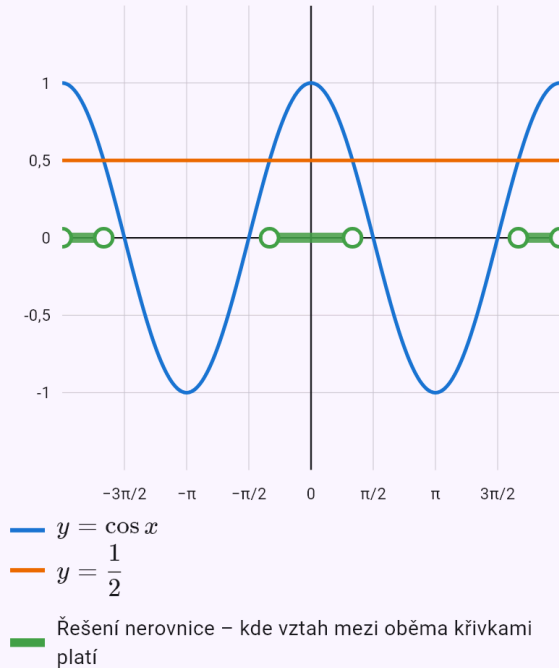
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Základní nerovnice $\cos x > \frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí vyhovuje vyznačený oblouk; s periodou:
 $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$



Graf



Nulové body na periodě a znaménko mezi nimi.

Zadání: $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$

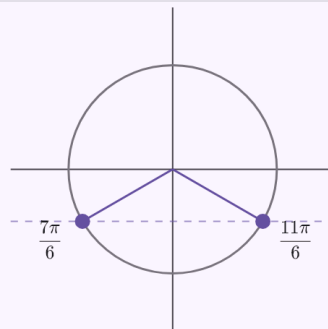
Výsledek

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

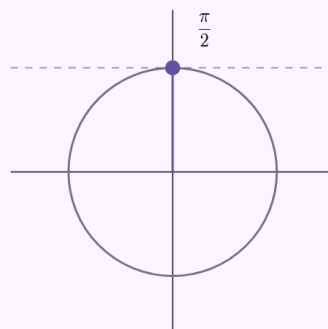
$$k \in \mathbb{Z}$$

Postup

- Nejdřív vyřešíme rovnici $-\sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$
- Zavedeme substituci $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$
- Vypočítáme diskriminant:
 $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
- Dosadíme do vzorce pro kořeny:
 $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4}$
- Základní rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody:
 $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$



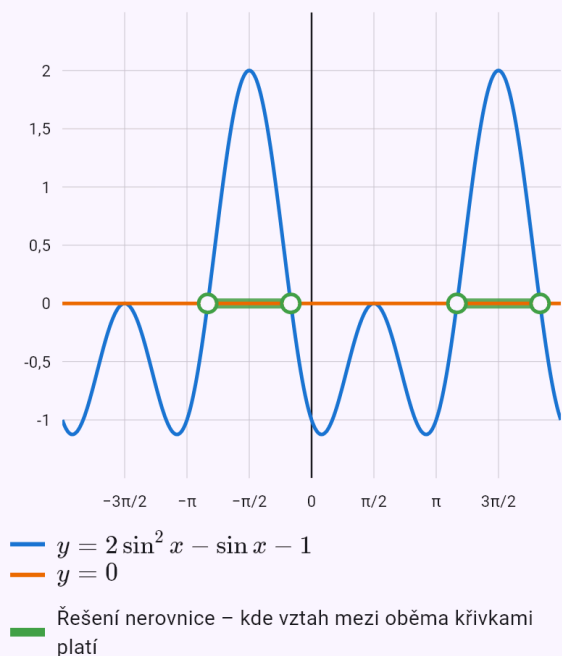
- Základní rovnice $\sin x = 1$: na jednotkové kružnici jí v jedné otočce vyhovují úhly $\frac{\pi}{2}$; všechna řešení dostaneme přičtením násobků periody: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



- Funkce má periodu 2π . Jednu periodu rozdělí na

interval nulové body (a body, kde funkce není definovaná) $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; podle znaménka v nich nerovnici vyhovuje: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$

Graf



Známa omezení

- Rovnice, kde je neznámá i mimo goniometrickou funkci ($x = \cos x$), řešíme jen numericky a bez periody.
- Dvojitou goniometrickou nerovnici ($-1/2 < \sin x < 1/2$) a goniometrické funkce v absolutní hodnotě zatím neumíme.

Nerovnice a soustavy nerovnic

Kvadratickou a lomenou nerovnici aplikace řeší nulovými body a tabulkou znamének. Dvojitou nerovnici a soustavu nerovnic řeší jako průnik řešení jednotlivých nerovnic, který ukáže na číselné ose. Soustavu nerovnic se dvěma neznámými vyřeší jako oblast v rovině a vybarví ji v grafu.

V soustavě nerovnic se dvěma neznámými aplikace vypíše i rohy oblasti – průsečíky hranic s přesnými souřadnicemi. Soustavu rovnice a nerovnic s jednou neznámou řeší vyřešením rovnice a dosazením kořenů do nerovnic; se dvěma neznámými je řešením část křivky rovnice ležící v oblasti nerovnic – v grafu je zvýrazněná a její krajní body jsou spočítané přesně. Soustavu lze zapsat i na jeden řádek, oddělenou středníky ($2^x > 4$; $3^x < 81$).

Ukázky

Kvadratická nerovnice – nulové body a znaménka.

Zadání: $x^2 - x - 6 > 0$

Výsledek

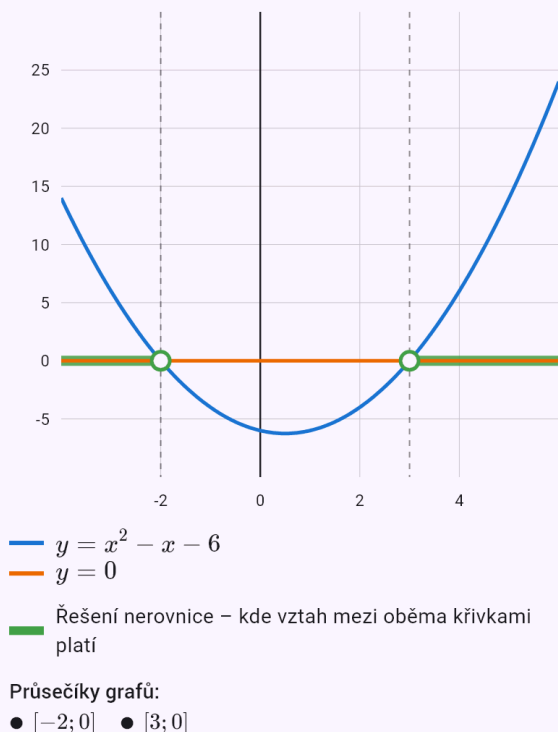
$$x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$$

Postup

- Rozložíme na součin: $(x - 3)(x + 2) > 0$
- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly:
 $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 3)$	$(3; \infty)$
$x - 3$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$(x - 3)(x + 2)$	+	-	+

Graf



Lomená nerovnice – jmenovatel nesmí být nula.

Zadání: $(x+1)/(x-3) \leq 0$

Výsledek

$$x \in \langle -1; 3 \rangle$$

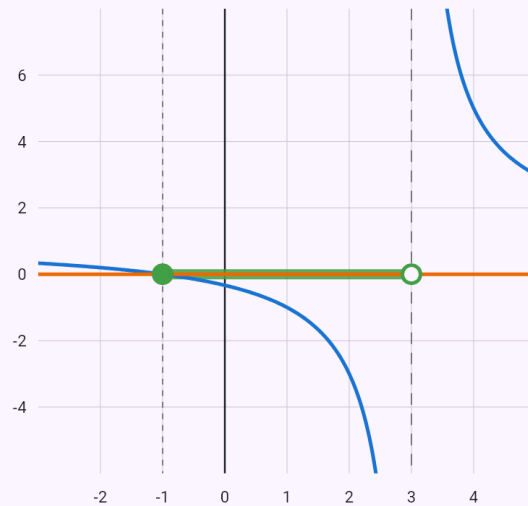
Podmínky: $x \neq 3$

Postup

- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq 3$
- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly:
 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$
- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 3)$	$(3; \infty)$
$x - 3$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$\frac{x+1}{x-3}$	+	-	+

Graf



$$y = \frac{x+1}{x-3}$$
$$y = 0$$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

● $[-1; 0]$

Dvojitá nerovnice.

Zadání: $-1 \leq 2x + 1 < 5$

Výsledek

$$x \in \langle -1; 2 \rangle$$

Postup

- 1. nerovnice: $-1 \leq 2x + 1$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $-2x \leq 2$
- Vydělíme záporným číslem -2 , znaménko nerovnosti se obrátí: $x \geq -1$
- Řešením této nerovnice je $x \in \langle -1; \infty \rangle$
- 2. nerovnice: $2x + 1 < 5$
- Členy s neznámou necháme vlevo, ostatní převedeme doprava: $2x < 4$
- Vydělíme kladným číslem 2 , znaménko nerovnosti se nemění: $x < 2$
- Řešením této nerovnice je $x \in (-\infty; 2)$
- Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých nerovnic: $x \in \langle -1; 2 \rangle$

Graf



Řešení soustavy (průnik)



Každá nerovnice má na ose svůj řádek, zeleně je jejich průnik. Plné kolečko k řešení patří, prázdné ne.

Soustava nerovnic se dvěma neznámými – oblast v rovině a její rohy.

Zadání: $x + y \leq 4$

$x - y \geq 0$

$$y \geq 0$$

Výsledek

$$y \leq 4 - x$$

$$y \leq x$$

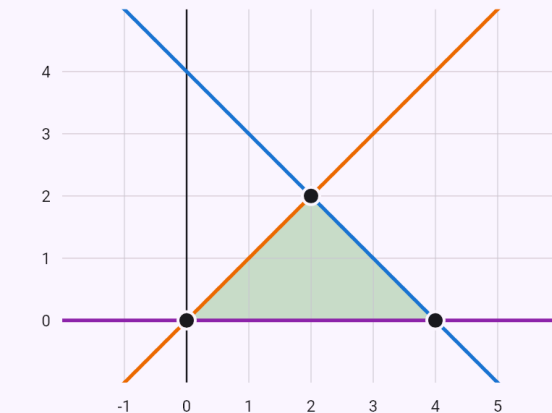
$$y \in \langle 0; \infty \rangle$$

Postup

- 1. nerovnice: $x + y \leq 4$
 - Hranicí je křivka $x + y = 4$ – kreslíme ji plnou čarou, její body k řešení patří.
 - Dosadíme bod $[0; 0]$: $0 \leq 4$ platí – řešením je ta část roviny, ve které bod leží.
- 2. nerovnice: $x - y \geq 0$
 - Hranicí je křivka $x - y = 0$ – kreslíme ji plnou čarou, její body k řešení patří.
 - Dosadíme bod $[1; 0]$: $1 \geq 0$ platí – řešením je ta část roviny, ve které bod leží.
- 3. nerovnice: $y \geq 0$
 - Hranicí je křivka $y = 0$ – kreslíme ji plnou čarou, její body k řešení patří.
 - Dosadíme bod $[0; 1]$: $1 \geq 0$ platí – řešením je ta část roviny, ve které bod leží.
 - Řešením soustavy je společná část těchto oblastí – v grafu je vybarvená.

• Rohy oblasti (průsečíky hranic): $[0; 0]$, $[2; 2]$, $[4; 0]$

Graf



$$\text{blue line } x + y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 4 - x$$

$$\text{orange line } x - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x$$

$$\text{purple line } y \geq 0 \Leftrightarrow y \in \langle 0; \infty \rangle$$

Řešením je vybarvená oblast. Plná hranice k řešení patří, čárkovaná ne.

Rohy oblasti:

• $[0; 0]$ • $[2; 2]$ • $[4; 0]$

Nerovnice v oboru celých čísel – vypíšou se celá čísla z intervalu.

Zadání: $x^2 < 10$

Výsledek

$$x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

Postup

- Převědeme vše na jednu stranu: $x^2 - 10 < 0$

- Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly:

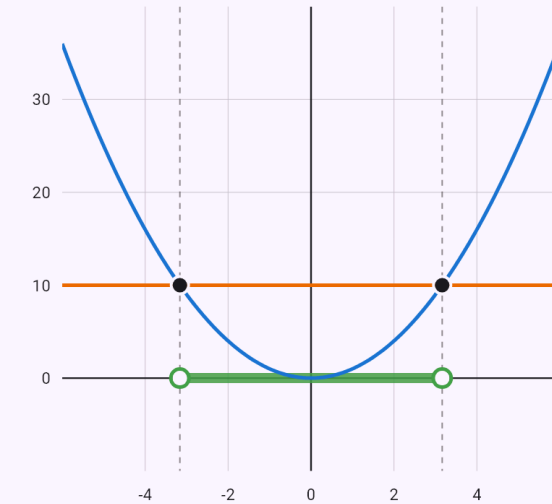
$$x_1 = -\sqrt{10}, x_2 = \sqrt{10}$$

- Znaménka na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10}; \sqrt{10})$	$(\sqrt{10}; \infty)$
$x^2 - 10$	+	-	+

- V reálných číslech vychází $x \in (-\sqrt{10}; \sqrt{10})$, v $\mathbb{Z}$:
 $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

Graf



$y = x^2$
 $y = 10$

Řešení nerovnice – kde vztah mezi oběma křivkami platí

Průsečíky grafů:

$\bullet [-\sqrt{10}; 10]$ $\bullet [\sqrt{10}; 10]$

Rovnice a nerovnice – kořeny rovnice dosadíme do nerovnice.

Zadání: $x^2 - x - 6 = 0$

$x > 0$

Výsledek

$$x = 3$$

Postup

- Nejdřív vyřešíme rovnici $x^2 - x - 6 = 0$, její kořeny pak dosadíme do nerovnic.

- Vypočítáme diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

- Dosadíme do vzorce pro kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

- Kořen $x = -2$ nevyhovuje podmínce $x > 0$, není tedy řešením.

- Kořen $x = 3$ podmínkám vyhovuje.

Kružnice a polorovina – řešením je oblouk, krajní body k němu nepatří.

Zadání: $x^2 + y^2 = 4$

$$y > x$$

Výsledek

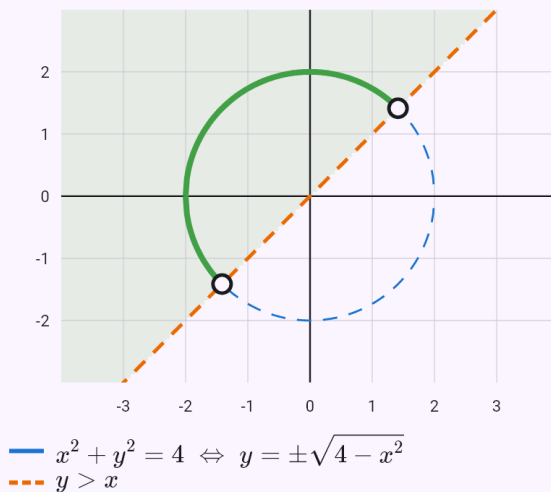
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y > x$$

Postup

- Řešením jsou body křivky $x^2 + y^2 = 4$, které leží v oblasti dané nerovnicemi. Nejdřív tuto oblast najdeme:
- Hranicí je křivka $y = x$ – kreslíme ji čárkovaně, její body k řešení nepatří.
- Dosadíme bod $[1; 0]$: $0 > 1$ neplatí – řešením je ta část roviny, ve které bod neleží.
- Krajní body části křivky: $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ – leží na čárkované hranici, k řešení nepatří.

Graf



Řešením je zeleně zvýrazněná část křivky – ta, která leží ve vybarvené oblasti. Plný krajní bod k řešení patří, prázdný ne.

Krajní body:

$$\circ [-\sqrt{2}; -\sqrt{2}] \quad \circ [\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

Známá omezení

- Soustavu se dvěma a více rovnicemi a k tomu nerovnicemi zatím neřešíme; desetinná čísla píšete s tečkou ($x > 2.5$).

Soustavy rovnic

Soustavu lineárních rovnic se dvěma neznámými aplikace řeší sčítací nebo dosazovací metodou, větší soustavu Gaussovou eliminací – i v maticovém zápisu. Metodu vyberete čipem. U soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými je i graf, na kterém jsou řešení průsečíky přímek nebo křivek.

Nelineární soustavu (třeba kružnice a přímka) aplikace vyřeší a zakreslí, zatím bez postupu.

Ukázky

Sčítací metoda.

Zadání: $2x + 3y = 7$

$x - y = 1$ **Sčítací**

Výsledek

$$x = 2$$

$$y = 1$$

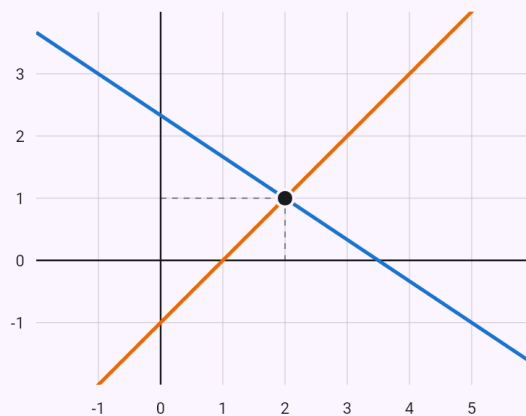
Postup

- První rovnici vynásobíme číslem 1 a druhou číslem -2 , aby se po sečtení vyrušilo x

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$$

- Rovnice sečteme, x se vyruší: $5y = 5$
- Vyřešíme: $5y = 5 \Rightarrow y = 1$
- Dosadíme do 2. rovnice: $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Graf



$$\begin{aligned} \text{— } 2x + 3y = 7 &\Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3} \\ \text{— } x - y = 1 &\Leftrightarrow y = x - 1 \end{aligned}$$

Průsečíky grafů:

$$\bullet [2; 1]$$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení soustavy – jeho souřadnice jsou hodnoty x a y .

Tři rovnice – Gaussova eliminace.

Zadání: $x + y + z = 6$

$2x - y + z = 3$

$$x + 2y - z = 2$$

Gaussova eliminace

Výsledek

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

Postup

- Z dalších rovnic vyloučíme x

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

- Z dalších rovnic vyloučíme y

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -z = -3 \end{cases}$$

- Vyřešíme: $-z = -3 \Rightarrow z = 3$
- Dosadíme do 2. rovnice: $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$
- Dosadíme do 1. rovnice: $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 1$

Kružnice a přímka.

Zadání: $x^2 + y^2 = 25$

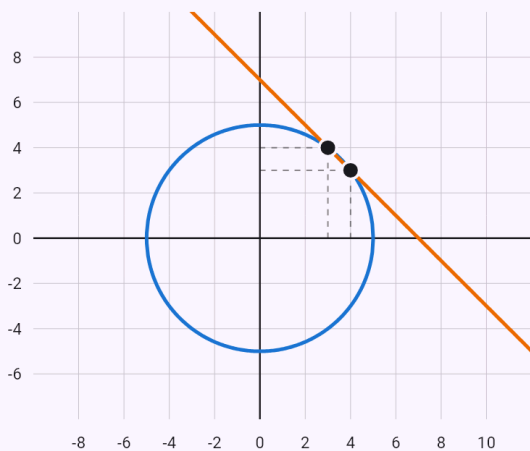
$$x + y = 7$$

Výsledek

$$x_1 = 3, y_1 = 4$$

$$x_2 = 4, y_2 = 3$$

Graf



$$\text{blue line } x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

$$\text{orange line } x + y = 7 \Leftrightarrow y = 7 - x$$

Průsečíky grafů:

$$\bullet [3; 4] \quad \bullet [4; 3]$$

Každý průsečík odpovídá jednomu řešení soustavy – jeho souřadnice jsou hodnoty x a y .

Známá omezení

- Nelineární soustavy jsou zatím bez postupu.

Rovnice a nerovnice s parametrem

Je-li v rovnici kromě neznámé ještě další písmeno, je to parametr – libovolné reálné číslo, na kterém závisí řešení. Aplikace rovnici upraví na tvar $A \cdot x = B$ (u kvadratické $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$) a řešení rozebere podle hodnot parametru (diskuse): kde je koeficient u neznámé nulový, kde je diskriminant kladný, nulový nebo záporný, kde podmínky vyloučí kořen a pro které hodnoty nemá úloha smysl. Výsledek shrne po případech.

Neznámou aplikace vybere podle pořadí x, y, z, u, v, w, t , ostatní písmena jsou parametry; jinou neznámou vyberete čipem „Neznámá“ nebo ji napíšete za čárku. Graf ukáže všechna řešení jako křivku (u nerovnice oblast) v rovině parametr – neznámá; posuvníkem zvolíte hodnotu parametru a na svislé přímce přečtete řešení.

Písmena v neurčitěm integrálu bere aplikace jako konstanty a připíše, které nesmí být nulové ($\int dx/(a - bx)^3$ pro $b \neq 0$).

Jak zadat

$$2ax + a = 4x$$

Parametr je každé další písmeno; neznámá je x (nebo $y, z, \dots$).

$$(q+3)x = 2x + q, \text{ neznámá } q$$

Neznámou nebo parametr můžete napsat za čárku („ a je parametr“, „neznámá q “).

Ukázky

Lineární rovnice – pro $a = 2$ nemá řešení.

Zadání: $2ax + a = 4x$

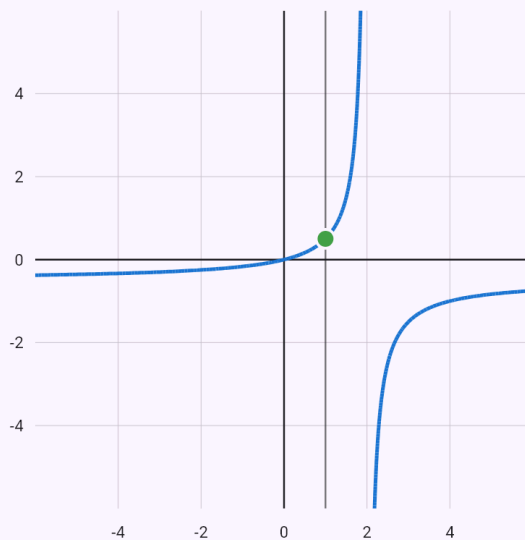
Výsledek

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2(2-a)}, & a \neq 2 \\ x \in \emptyset, & a = 2 \end{cases}$$

Postup

- Neznámá je x , parametr a je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Upravíme na základní tvar: $2(a-2)x = -a$
- Pro $a \neq 2$ je $2(a-2)$ různé od nuly, můžeme jím vydělit:
$$x = \frac{a}{2(2-a)}$$
- Pro $a = 2$ je koeficient u neznámé nulový: $0 \cdot x = -2$, tedy $x \in \emptyset$

Graf



— $2xa + a = 4x$

Každý bod $[a; x]$ křivky je řešením. Pro zvolenou hodnotu a leží řešení na svislé přímce – posouvej ji posuvníkem.



$a = 1 : x \approx 0,5$

Kvadratická rovnice – diskuse podle diskriminantu.

Zadání: $x^2 + 6x + p = 0$

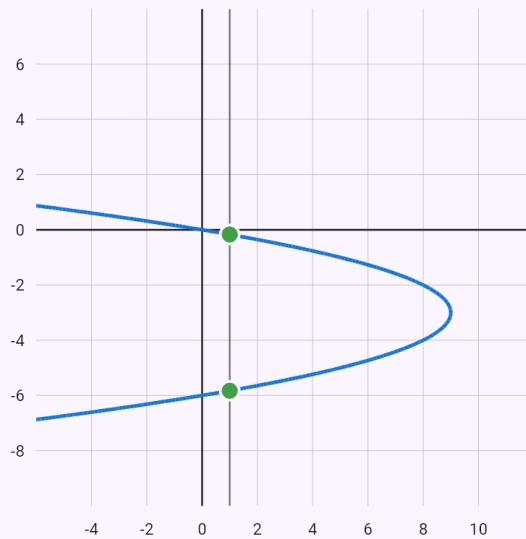
Výsledek

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - p}, & p < 9 \\ x = -3, & p = 9 \\ x \in \emptyset, & p > 9 \end{cases}$$

Postup

- Neznámá je x , parametr p je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Upravíme na základní tvar: $x^2 + 6x + p = 0$
- Diskriminant v závislosti na parametru:
 $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 36 - 4p = 4(9 - p)$
- Pro $p < 9$ je $D > 0$, rovnice má dva různé kořeny:
 $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - p}$
- Pro $p > 9$ je $D < 0$, rovnice nemá reálné řešení.
- Pro $p = 9$ je $D = 0$, rovnice má jeden dvojnásobný kořen:
 $x = -3$

Graf



$$x^2 + 6x + p = 0$$

Každý bod $[p; x]$ křivky je řešením. Pro zvolenou hodnotu p leží řešení na svislé přímce – posouvej ji posuvníkem.



$$p = 1 : \quad x \approx -5,83; -0,17$$

Nerovnice – znaménko koeficientu rozhoduje o směru nerovnosti.

Zadání: $2x + 2p - 5 < 2px + 7$

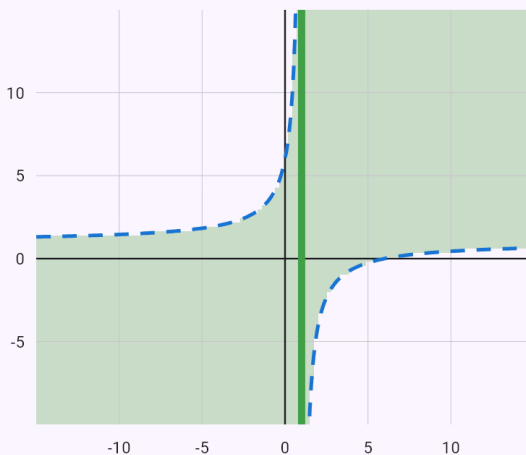
Výsledek

$$\begin{cases} x < \frac{p-6}{p-1}, & p < 1 \\ x \in \mathbb{R}, & p = 1 \\ x > \frac{p-6}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

Postup

- Neznámá je x , parametr p je libovolné reálné číslo. Řešení závisí na jeho hodnotě, proto rozebereme jednotlivé případy (diskuse řešení).
- Upravíme na základní tvar: $2(1 - p)x < 2(6 - p)$
- Pro $p < 1$ je $2(1 - p)$ kladné – vydělíme a znak nerovnosti zůstane: $x < \frac{p-6}{p-1}$
- Pro $p > 1$ je $2(1 - p)$ záporné – vydělíme a znak nerovnosti se obrátí: $x > \frac{p-6}{p-1}$
- Pro $p = 1$ je koeficient u neznámé nulový: $0 \cdot x < 10$, tedy $x \in \mathbb{R}$

Graf



$$2x + 2p - 5 < 2px + 7 \Leftrightarrow x = \frac{p-6}{p-1}$$

Vybarvená oblast tvoří všechna řešení $[p; x]$. Pro zvolenou hodnotu p je řešením zvýrazněná část svislé přímky – posouvej ji posuvníkem.



$$p = 1$$

Známá omezení

- Zatím lineární a kvadratické rovnice a lineární nerovnice; úplná diskuse po intervalech jen s jedním parametrem, s více parametry obecné případy.
- Otázky typu „pro která p má rovnice kladné řešení“ a soustavy s parametrem zatím neumí.

Úpravy výrazů

Výraz bez rovnítka aplikace upraví podle zvoleného čipu: zjednoduší (u lomeného výrazu převede na společný jmenovatel a zkrátí, s podmínkami), roznásobí, rozloží na součin (vytýkáním, vzorci i Hornerovým schématem) nebo rozloží na parciální zlomky – jako na papíře, s rovnicemi pro neznámé koeficienty. Rozklad na součin je nad celými čísly; jde-li výraz nad reálnými čísly rozložit dál (pomocí iracionálních kořenů), ukáže to další krok. Odmocninu z jednočlenu aplikace částečně odmocní – u sudé odmocniny s absolutní hodnotou tam, kde může být základ záporný. Počítá i s komplexními čísly – dělení rozšířením komplexně sdruženým číslem.

Ukázky

Zjednodušení lomeného výrazu.

Zadáání: $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)$

Zjednodužit

Výsledek

$$\frac{x - 1}{x + 1}$$

Podmínky: $x \neq -1$

Postup

- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq -1$
- Rozložíme čítele a jmenovatel na součin:
$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2}$$
- Zkrátíme společným činitelem $x + 1$: $\frac{x - 1}{x + 1}$

Roznásobení.

Zadáání: $(x + 2)^3$

Roznásobit

Výsledek

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Postup

- Roznásobíme závorky a sečteme podobné členy:
$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Rozklad na součin Hornerovým schématem.

Zadání: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Rozložit

Výsledek

$$(x - 3)(x - 2)(x - 1)$$

Postup

- Racionální kořeny mohou být jen dělitelé absolutního členu -6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

- Hornerovým schématem ověříme kořen $x = 1$ a vydělíme jím polynom:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

- Dosazením zjistíme, že tyto kandidáti kořeny nejsou:
 $P(-1) = -24 \neq 0$

- Hornerovým schématem ověříme kořen $x = 2$ a vydělíme jím polynom:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Rozklad na parciální zlomky.

Zadání: $(3x + 5)/(x^2 + x - 2)$

Parciální zlomky

Výsledek

$$\frac{8}{3(x - 1)} + \frac{1}{3(x + 2)}$$

Podmínky: $x \neq -2, x \neq 1$

Postup

- Podmínky – jmenovatel nesmí být nula: $x \neq -2, x \neq 1$

- Rozložíme jmenovatel na součin: $(x - 1)(x + 2)$

- Rozklad hledáme ve tvaru: $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$

- Obě strany vynásobíme jmenovatelem $(x - 1)(x + 2)$:
 $3x + 5 = A(x + 2) + B(x - 1)$

- Dosadíme $x = 1$: $8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$

- Dosadíme $x = -2$: $-1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

Částečné odmocnění s absolutní hodnotou.

Zadání: $\sqrt[4]{8a^5 b^2}$ Zjednodušit

Výsledek

$$2a^2|b|\sqrt{2a}$$

Postup

- Částečně odmocníme – mocniny pod odmocninou vytkneme před ni (u sudé odmocniny s absolutní hodnotou, kde může být základ záporný): $2a^2|b|\sqrt{2a}$

Dělení komplexních čísel.

Zadání: $(3+4i)/(1-2i)$ Zjednodušit

Výsledek

$$-1 + 2i$$

Postup

- Zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli, $1 + 2i$

$$\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

Limity

MathSolver spočítá limitu funkce jedné proměnné ve vlastním bodě, v nekonečnu i limitu jednostrannou a postupuje jako ve škole: nejdřív zkusí do funkce dosadit. Limitu posloupnosti ($n \rightarrow \infty$) spočítá stejně – i tvar 1^∞ nebo součet mocnin, ze kterého vytkne nejrychleji rostoucí člen.

Když dosazením vyjde neurčitý výraz ($0/0$, ∞/∞ , ...), zvolí úpravu podle tvaru funkce – rozklad a krácení, rozšíření sdruženým výrazem, vydělení nejvyšší mocninou, známou limitu ($\sin x / x$) nebo l'Hospitalovo pravidlo, i opakovaně.

Nekonečnou limitu ani limitu, která neexistuje (jednostranné limity se liší), nevydá za číslo – řekne to slovy a ukáže jednostranné limity. K výsledku patří graf funkce v okolí bodu s vyznačenou hodnotou limity.

U limity posloupnosti kreslí graf jako body $a_1, a_2, a_3, \dots$ místo spojitě křivky.

Jak zadat

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) / (x - 2)$	Limita napsaná ručně: za slovem lim v závorce proměnná, šipka $\rightarrow$ a bod, pak funkce.
$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) / (x^2 - 5)$	Limita v nekonečnu: nekonečno se píše ∞ (minus nekonečno $-\infty$).
$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x$	Jednostranná limita: za bodem + (zprava) nebo - (zleva).
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	Z fotky nebo v zápisu LaTeX, jak ho rozpozná fotoaparát.
$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+2)/(n+1))^{(2n+3)}$	Limita posloupnosti v nekonečnu.

Ukázky

Neurčitý výraz 0/0 – čítecetel rozložíme a zkrátíme.

Zadání: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) / (x - 2)$

Výsledek

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Postup

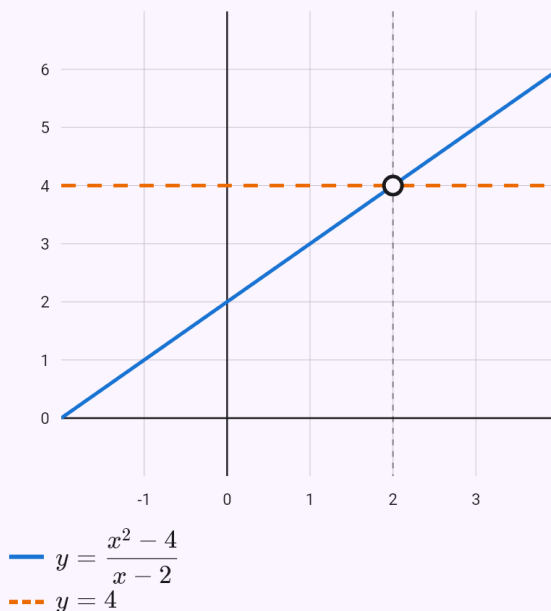
- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.

- Upravíme a zkrátíme

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$

- Dosadíme: $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Graf



Limita:

• $[2; 4]$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkované hodnoty limity.

Limita v nekonečnu – čítec i jmenovatel vydělíme nejvyšší mocninou.

Zadání: $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) / (x^2 - 5)$

Výsledek

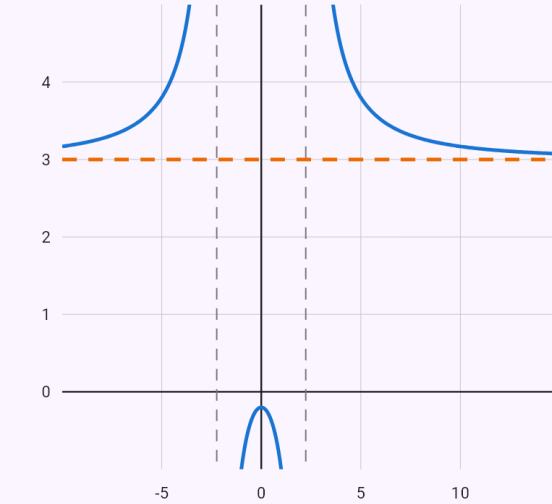
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = 3$$

Postup

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$ – výraz je potřeba upravit.
- Čítec i jmenovatel vydělíme x^2 – členy typu c/x^n se blíží nule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{5}{x^2}} = 3$$

Graf



$$y = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5}$$
$$y = 3$$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkované hodnota limity.

Známa limita $\sin x / x$.

Zadání: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x) / x$

Výsledek

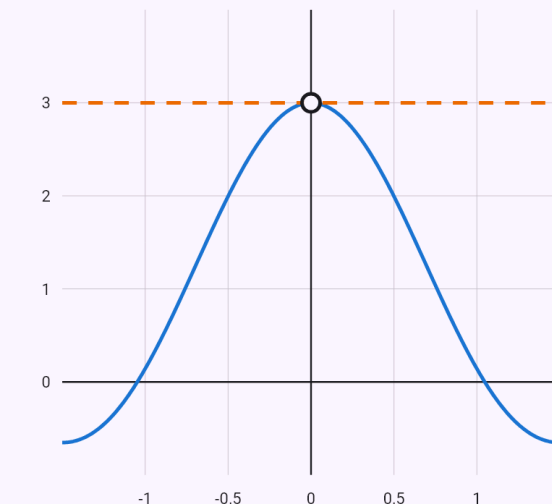
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

Postup

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.
- Použijeme známou limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Graf



$$y = \frac{\sin(3x)}{x}$$
$$y = 3$$

Limita:

• $[0; 3]$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkované hodnota limity.

L'Hospitalovo pravidlo, použité dvakrát po sobě.

Zadání: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x) / x^2$

Výsledek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Postup

- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.

- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čítele i jmenovatel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x + e^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

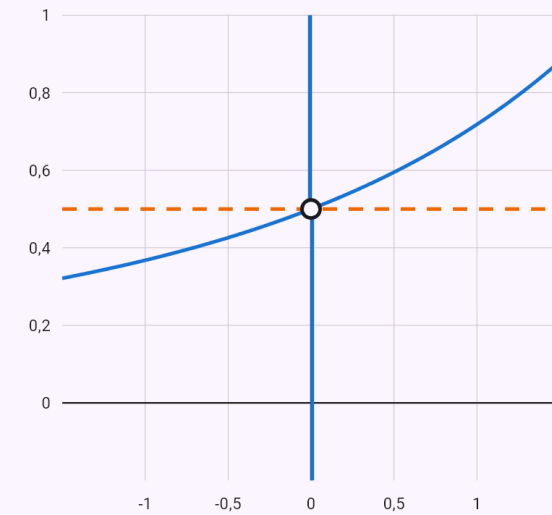
- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ – výraz je potřeba upravit.

- L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čítele i jmenovatel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2}$$

- Dosadíme: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$

Graf



$$y = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Limita:

$$\bullet \left[0; \frac{1}{2} \right]$$

Prázdné kolečko – k této hodnotě se funkce blíží (v bodě samotném definovaná být nemusí); čárkované hodnoty limity.

Jednostranné limity se liší – limita neexistuje.

Zadání: $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$

Výsledek

Limita neexistuje – jednostranné limity se liší.

Postup

- Dosazením vychází nenulové číslo dělené nulou – limita je nekonečná, znaménko určíme zvlášť zleva a zprava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{0}$$

- Jednostranné limity: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Graf



$$y = \frac{1}{x}$$

Limita posloupnosti – vytkneme nejrychleji rostoucí člen 9^n .

Zadání: $\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}}$

Výsledek

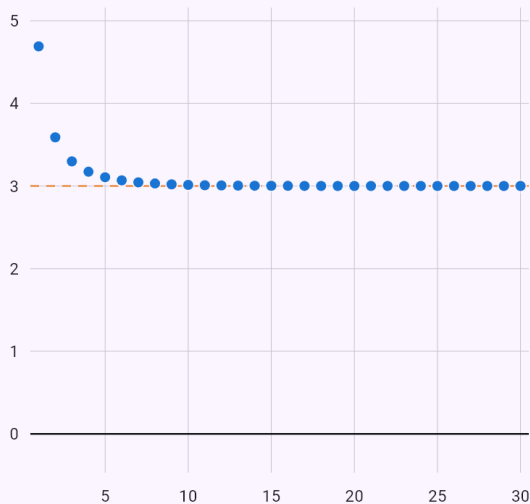
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = 3$$

Postup

- Vytkneme nejrychleji rostoucí člen 9^n – podílí ostatních členů s ním jdou k nule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n + 7^n + 9^n)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{9^n \cdot \left(\frac{6^n}{9^n} + \frac{7^n}{9^n} + 1 \right)} =$$

Graf



● členy a_n — limita posloupnosti

Body jsou členy posloupnosti a_n pro $n = 1, 2, 3, \dots$. Má-li posloupnost limitu, členy se k ní (čárkovaně) blíží.

Derivace

Aplikace derivuje podle pravidel – derivace součtu, konstanty, součinu, podílu i složené funkce – a u každého kroku řekne, které pravidlo použila. Umí i vyšší derivace a hodnotu derivace v bodě. Základní funkce (x^2 , $\sin x$, e^x , ...) zderivuje i z definice jako limitu podílu diferencí. Výsledek doplní graf funkce a její derivace.

U funkce zadané implicitně rovnicí s x a y ($x^3 + y^3 = 3xy$) zderivuje obě strany podle x (y bere jako funkci x) a vyjádří y' , nebo použije vzorec $y' = -F_x / F_y$; umí i y'' a v zadaném bodě tečnu a normálu, v grafu nakreslí křivku.

V singulárním bodě (křivka se kříží nebo má hrot) najde tečny z členů nejnižšího stupně rovnice – u Descartova listu v počátku $x = 0$ a $y = 0$.

Jak zadat

$(x^2 \sin x)'$	Derivace apostrofem za závorkou.
$d/dx (e^x / x)$	Zápis d/dx , i z fotky $(\frac{d}{dx})$.
$(x^3 \ln x)''$	Vyšší derivace více apostrofy, nebo řádem u čípu „Derivovat“.
$(x^2 + 1)' _{x=2}$	Hodnota derivace v bodě, nebo vyplňte bod u čípu.
$x^2 \sin x$	Výraz s čipem „Derivovat“ – tam vyberete i řád, bod a způsob (podle pravidel / z definice).
$x^3 + y^3 = 3xy$	Rovnice s x a y – čip „Implicitní derivace“ (řád 1 nebo 2, postup, bod $[x_0; y_0]$) nebo „Graf křivky“; psaně $\text{diff}(x^3+y^3=3xy, x)$.

Ukázky

Derivace součinu.

Zadání: $(x^2 \sin x)'$

Výsledek

$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

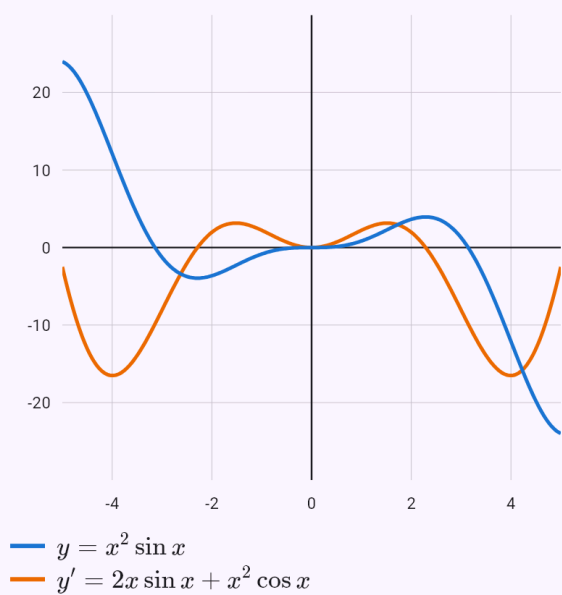
Postup

- Derivace součinu $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Kde je derivace kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá. V nulových bodech derivace má funkce vodorovnou tečnu.

Graf



Derivace podílu.

Zadání: $d/dx (e^x / x)$

Výsledek

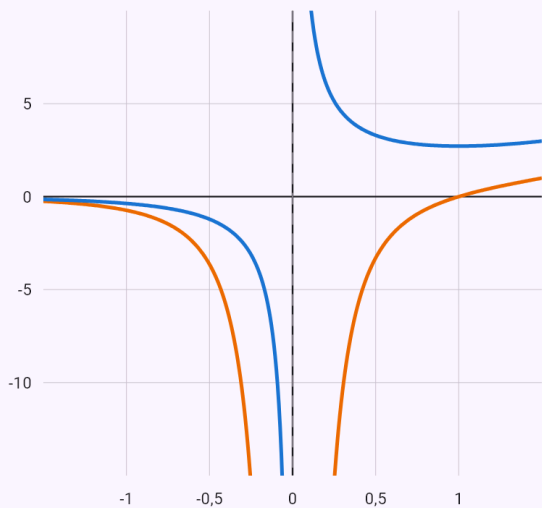
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Postup

- Derivace podílu $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Graf



$$y = \frac{e^x}{x}$$
$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Kde je derivace kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá. V nulových bodech derivace má funkce vodorovnou tečnu.

Druhá derivace.

Zadání: $(x^3 \ln x)''$

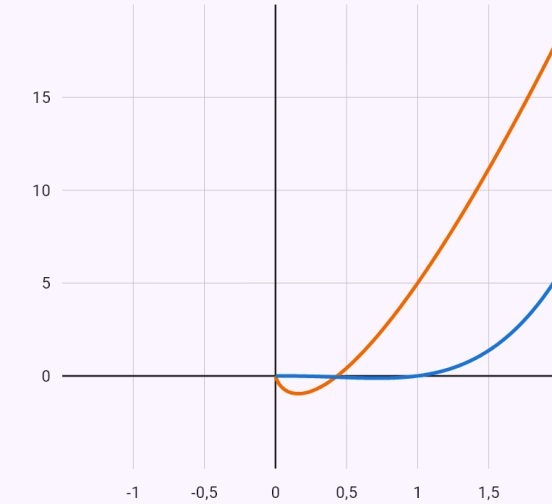
Výsledek

$$y'' = 5x + 6x \ln x$$

Postup

- 1. derivace: $y' = (x^3 \ln x)'$
- Derivace součinu $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $(x^3 \ln x)' = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2$
- 2. derivace: $y'' = (x^2 + 3x^2 \ln x)'$
- Derivace součtu je součet derivací:
 $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = (x^2)' + (3x^2 \ln x)'$
- Konstantu vytkneme před derivaci:
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x^2 \ln x)'$
- Derivace součinu $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $(x^2 \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x$
- Dosadíme:
 $(3x^2 \ln x)' = 3 \cdot (x + 2x \ln x) = 3(x + 2x \ln x)$
- Dosadíme: $(x^2 + 3x^2 \ln x)' = 2x + 3(x + 2x \ln x)$
- Upravíme: $y'' = 5x + 6x \ln x$

Graf



$y = x^3 \ln x$
 $y'' = 5x + 6x \ln x$

Kde je druhá derivace kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, je konkávní (prohnutá dolů).

Derivace z definice jako limita.

Zadání: x^2 Derivovat → Z definice

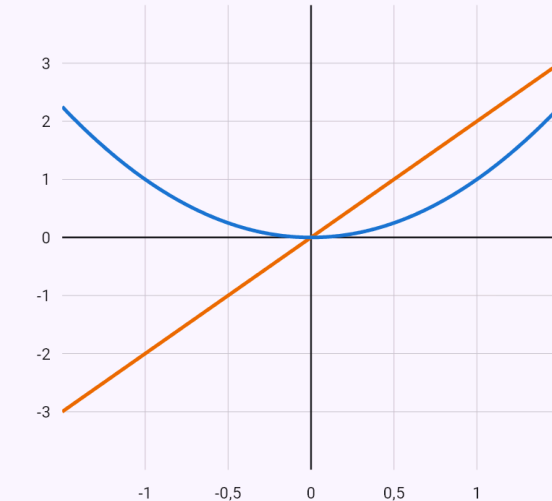
Výsledek

$$y' = 2x$$

Postup

- Derivace z definice
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
- Dosazením vychází neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ - výraz je potřeba upravit.
- Upravíme a zkrátíme
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)$$
- Dosadíme: $\lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$

Graf



$y = x^2$
 $y' = 2x$

Kde je derivace kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá. V nulových bodech derivace má funkce vodorovnou tečnu.

Implicitní derivace – Descartův list, tečna a normála v bodě $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$, druhá derivace.

Zadání: $x^3 + y^3 = 3xy$ Implicitní derivace, řád 2, bod $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$

Výsledek

$$y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

$$y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$$

$$y'(\frac{3}{2}) = -1$$

$$t: y = 3 - x$$

$$n: y = x$$

$$y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$$

Podmínky: $y^2 - x \neq 0$

Postup

- Funkce $y = y(x)$ je zadána rovnicí $x^3 + y^3 = 3xy$ – obě strany zderivujeme podle x a y bereme jako funkci x (derivace složené funkce: např. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$).
- Derivujeme obě strany:
 $(x^3 + y^3)' = (3xy)' \Rightarrow 3y^2 y' + 3x^2 = 3xy' + 3y$
- Členy s y' převedeme na levou stranu, ostatní na pravou, a y' vytkneme: $y'(3y^2 - 3x) = -3x^2 + 3y$

- Vyjádříme y' : $y' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$

- Druhá derivace – y' zderivujeme podle x znovu (y i y' jsou funkce x)

$$y'' = \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x} \right)' = \frac{2x^2 y y' - 2xy^2 - y^2 y' + x^2 - xy'}{y^4 - 2xy^2 + x^2}$$

- Dosadíme za y'

$$y'' = \frac{2xy(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)}{(-y^2 + x)^3}$$

- Na křivce platí $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ – výraz se tím zjednoduší: $y'' = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$

- Bod $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ leží na křivce: $x^3 + y^3 - 3xy|_{x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}} = 0$

- Derivace v bodě $[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ – směrnice tečny: $y'(\frac{3}{2}) = -1$

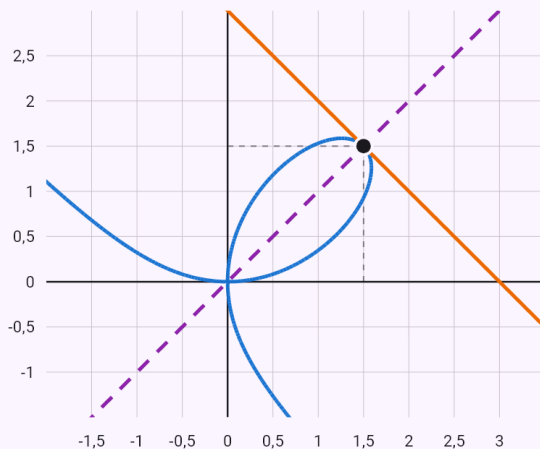
- Tečna: $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3 - x$

- Normála je kolmá k tečně, má směrnici 1:

$$y - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = x$$

- Druhá derivace v bodě: $y''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$

Graf



— $x^3 + y^3 = 3xy$
— t: $y = 3 - x$
- - n: $y = x$

Křivka zadána rovnicí. V zadaném bodě je tečna (plnou čarou) a normála (čárkovaně).

Průběh funkce

Průběh funkce aplikace vyšetří v obvyklém pořadí: definiční obor, sudost a lichost, průsečíky s osami, znaménko funkce, limity v krajních bodech definičního oboru a asymptoty, první derivace – monotonie a extrémy (i pomocí vyšších derivací), druhá derivace – konvexnost, konkávnost a inflexní body, nakonec obor hodnot. Vše shrne v přehledu a nakreslí graf s vyznačenými body.

U goniometrické funkce aplikace najde periodu, vyšetří funkci na jedné periodě a výsledky zapíše s periodou (maximum v $x = \pi/2 + 2k\pi$); má-li periodickou derivaci jen samotná derivace ($x + 2 \sin x$), opakují se s periodou extrémy a monotonie. Absolutní hodnoty odstraní podle znamének na intervalech a v hrotech porovná jednostranné derivace; kde je derivace nekonečná, ukáže svislou tečnu. Vnořené absolutní hodnoty a součty absolutních hodnot vyšetří po částech; kde je funkce na intervalu konstantní, uvede to i s hodnotou (minimum v každém bodě intervalu).

Jak zadat

průběh $y = x^3 - 3x$

Slovem „průběh“ před funkcí.

$x^3 - 3x$

Funkce s čípek „Průběh funkce“.

Polynom – extrémy a inflexní bod.

Zadání: $x^3 - 3x$

Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \mathbb{R}$

Sudost a lichost: lichá

Průsečíky s osou x: $[-\sqrt{3}; 0]$, $[0; 0]$, $[\sqrt{3}; 0]$

Rostoucí: $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$

Klesající: $(-1; 1)$

Lokální maximum: $[-1; 2]$

Lokální minimum: $[1; -2]$

Konvexní: $(0; \infty)$

Konkávní: $(-\infty; 0)$

Inflexní body: $[0; 0]$

Postup

• Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

• $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).

• Průsečíky s osou x:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}, \text{ tedy } [-\sqrt{3}; 0], [0; 0], [\sqrt{3}; 0]$$

• Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0; 0]$

• Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

$f(x)$	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; 0)$	$(0; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
	-	+	-	+

Funkce je kladná pro $x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ a záporná pro $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$

• Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Svislé asymptoty funkce nemá.

• Asymptota se směrnici v $\pm\infty$ neexistuje:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

• První derivace: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

• Stacionární body: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

• Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

$f'(x)$	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; \infty)$
$f(x)$	+	-	+
	↗	↘	↗

Funkce je rostoucí na $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$ a klesající na $(-1; 1)$

• V bodě $x = -1$: $f''(-1) = -6 < 0$ – lokální maximum.

• V bodě $x = 1$: $f''(1) = 6 > 0$ – lokální minimum.

• Lokální maximum $[-1; 2]$, lokální minimum $[1; -2]$

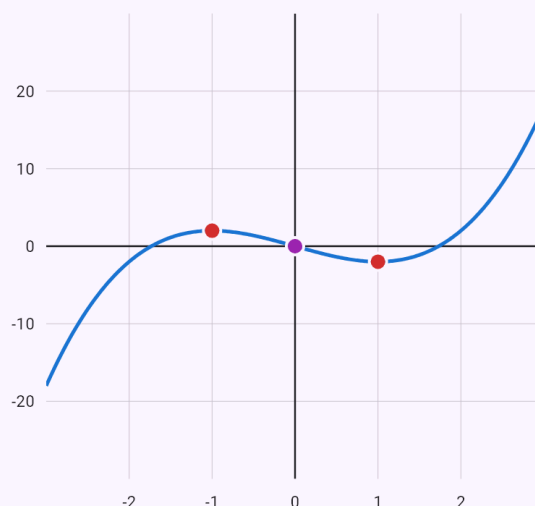
- Druhá derivace: $f''(x) = 6x$
- Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	∩	∪

Funkce je konvexní na $\langle 0; \infty \rangle$ a konkávní na $(-\infty; 0)$

- V bodě $x = 0$: $f'''(0) = 6 > 0$ – první nenulová derivace (od třetí) je lichého řádu, je tu inflexní bod.
- Inflexní body: $[0; 0]$
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \mathbb{R}$

Graf



— $y = x^3 - 3x$

Významné body:

- maximum $[-1; 2]$
- inflexe $[0; 0]$
- minimum $[1; -2]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Lomená funkce – asymptoty.

Zadání: $x^2/(x - 1)$ Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Obor hodnot: $H(f) = (-\infty; 0) \cup \langle 4; \infty \rangle$

Sudost a lichost: ani sudá, ani lichá

Průsečíky s osou x: $[0; 0]$

Rostoucí: $(-\infty; 0)$, $\langle 2; \infty \rangle$

Klesající: $\langle 0; 1 \rangle$, $(1; 2)$

Lokální maximum: $[0; 0]$

Lokální minimum: $[2; 4]$

Konvexní: $(1; \infty)$

Konkávní: $(-\infty; 1)$

Asymptoty: $x = 1$, $y = x + 1$

Postup

- Definiční obor – podmínky $x \neq 1$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ není souměrný podle nuly – funkce není sudá ani lichá.
- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, tedy $[0; 0]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0; 0]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$f(x)$	-	-	+

Funkce je kladná pro $x \in (1; \infty)$ a záporná pro $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

- Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Svislé asymptoty (limita je tam nekonečná): $x = 1$

- Asymptota se směrnici v $\pm\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 1$ – přímka $y = x + 1$

- První derivace

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

- Stacionární body: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Funkce je rostoucí na $(-\infty; 0)$, $\langle 2; \infty \rangle$ a klesající na $\langle 0; 1 \rangle$, $(1; 2)$

- V bodě $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokální maximum.

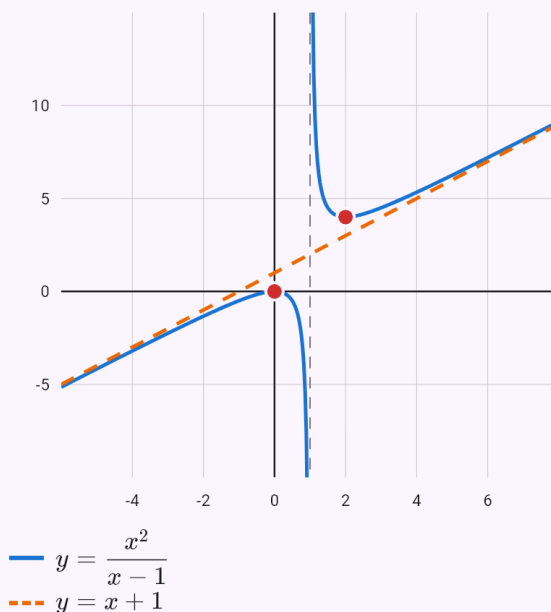
- V bodě $x = 2$: $f''(2) = 2 > 0$ – lokální minimum.
- Lokální maximum $[0; 0]$, lokální minimum $[2; 4]$
- Druhá derivace: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
- Rovnice $f''(x) = 0$ nemá řešení.
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Funkce je konvexní na $(1; \infty)$ a konkávní na $(-\infty; 1)$

- Funkce nemá inflexní body.
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit:
 $H(f) = (-\infty; 0) \cup \langle 4; \infty)$

Graf



Významné body:

- maximum $[0; 0]$
- minimum $[2; 4]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Periodická funkce – vše na jedné periodě, výsledky s periodou.

Zadání: $\sin 2x + 2\cos x$ **Průběh funkce**

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

Sudost a lichost: ani sudá, ani lichá

Perioda: $p = 2\pi$

Průsečíky s osou x: $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0 \right]$

Rostoucí: $\left\langle -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$

Klesající: $\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$

Lokální maximum: $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\sqrt{3}}{2} \right]$

Lokální minimum: $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right]$

Konvexní:

$\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$

Konkávní:

$\left\langle \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, \left\langle -\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$

Inflexní body:

$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0 \right], \left[\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8} \right],$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Funkce je periodická s periodou 2π – vyšetříme ji na jedné periodě (od 0 do 2π) a výsledky zopakujeme s periodou, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = 2\cos x - \sin(2x)$ – to není $f(x)$ ani $-f(x)$, funkce není sudá ani lichá.
- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, tedy $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0 \right]$
- Průsečík s osou y: $f(0) = 2$, tedy $[0; 2]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(0; \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$
$f(x)$	+	-	+

Funkce je kladná pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ a záporná pro $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

- Periodická funkce (která není konstantní) nemá limitu v $\pm\infty$.
- První derivace: $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$
- Stacionární body
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{2}$

- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(0; \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Funkce je rostoucí na $\langle -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rangle$ a
klesající na $\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rangle$

- Lokální maximum $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\sqrt{3}}{2}]$, lokální minimum $[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$

- Druhá derivace: $f''(x) = -2 \cos x - 4 \sin(2x)$

- Body podezřelé z inflexe

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k$$

- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(0; \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; \pi + \arcsin(\frac{1}{4}))$	$(\pi + \arcsin(\frac{1}{4}); \frac{3\pi}{2})$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Funkce je konvexní na a konkávní na

$$\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \rangle, \langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; 2\pi \rangle$$

$$\langle \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle, \langle -\arcsin\left(\frac{1}{4}\right); 2\pi \rangle$$

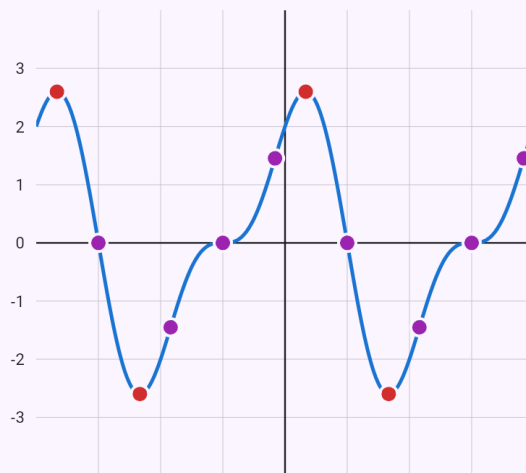
- Inflexní body

$$[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0], [\pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; -\frac{3\sqrt{15}}{8}], [2\pi + k\pi; 0]$$

- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit:

$$H(f) = \langle -\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2} \rangle$$

Graf



$$-3\pi/2 \quad -\pi \quad -\pi/2 \quad 0 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 3\pi/2$$

$$y = \sin 2x + 2 \cos x$$

Významné body:

- maximum $[-\frac{11\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}]$ • inflexe $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$
- minimum $[-\frac{7\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$
- inflexe $[-\pi + \arcsin(\frac{1}{4}); -\frac{3\sqrt{15}}{8}]$
- inflexe $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ • inflexe $[-\arcsin(\frac{1}{4}); \frac{3\sqrt{15}}{8}]$
- maximum $[\frac{\pi}{6}; \frac{3\sqrt{3}}{2}]$ • inflexe $[\frac{\pi}{2}; 0]$
- minimum $[\frac{5\pi}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$
- inflexe $[\pi + \arcsin(\frac{1}{4}); -\frac{3\sqrt{15}}{8}]$
- inflexe $[\frac{3\pi}{2}; 0]$ • inflexe $[2\pi - \arcsin(\frac{1}{4}); \frac{3\sqrt{15}}{8}]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Tangens – svislé asymptoty, obor hodnot $\mathbb{R}$.

Zadání: tg x Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Obor hodnot: $H(f) = \mathbb{R}$

Sudost a lichost: lichá

Perioda: $p = \pi$

Průsečíky s osou x: $[k\pi; 0]$

Rostoucí: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Konvexní: $\left\langle k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$

Konkávní: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right)$

Inflexní body: $[k\pi; 0]$

Asymptoty: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Postup

- Definiční obor – podmínky $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Funkce je periodická s periodou π – vyšetříme ji na jedné periodě (od 0 do π) a výsledky zopakujeme s periodou, $k \in \mathbb{Z}$.

- $f(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$ – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).

- Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$, tedy $[k\pi; 0]$

Funkce je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

- Funkce nemá lokální extrém.

- Druhá derivace: $f''(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$

- Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$

- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	∪	∩

Funkce je konvexní na $\left\langle k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$ a konkávní na $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right)$

- Inflexní body: $[k\pi; 0]$

- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \mathbb{R}$

- Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0; 0]$

- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
$f(x)$	+	-

Funkce je kladná pro $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ a záporná pro $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right)$

- Periodická funkce (která není konstantní) nemá limitu v $\pm\infty$.

- Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

- Svislé asymptoty (limita je tam nekonečná): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

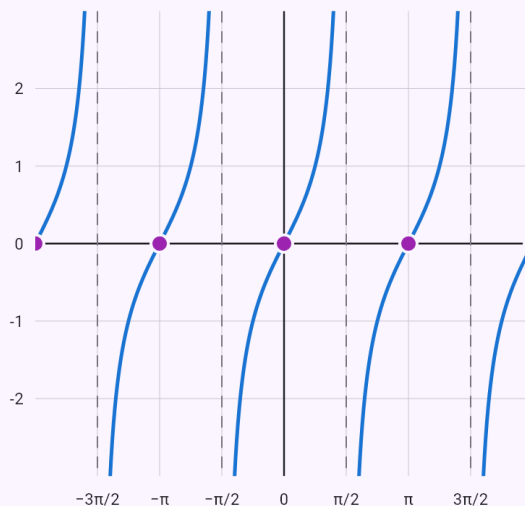
- První derivace: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

- Rovnice $f'(x) = 0$ nemá řešení – funkce nemá stacionární body.

- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

Graf



Významné body:

- inflexe $[-2\pi; 0]$ inflexe $[-\pi; 0]$ inflexe $[0; 0]$
- inflexe $[\pi; 0]$ inflexe $[2\pi; 0]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Hyperbolický tangens – vodorovné asymptoty $y = \pm 1$.

Zadání: $\tanh x$

Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = (-1; 1)$

Sudost a lichost: lichá

Průsečíky s osou x : $[0; 0]$

Rostoucí: $\mathbb{R}$

Konvexní: $(-\infty; 0)$

Konkávni: $(0; \infty)$

Inflexní body: $[0; 0]$

Asymptoty: $y = -1$, $y = 1$

Postup

• Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

• – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).
 $f(-x) = \tanh(-x) = -\tanh x = -f(x)$

• Průsečíky s osou x : $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, tedy $[0; 0]$

• Průsečík s osou y : $f(0) = 0$, tedy $[0; 0]$

• Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

Funkce je kladná pro $x \in (0; \infty)$ a záporná pro $x \in (-\infty; 0)$

• Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Funkce je konvexní na $(-\infty; 0)$ a konkávní na $(0; \infty)$

• V bodě $x = 0$: $f'''(0) = -2 < 0$ – první nenulová derivace (od třetí) je lichého řádu, je tu inflexní bod.

• Inflexní body: $[0; 0]$

• Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit:
 $H(f) = (-1; 1)$

• Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

• Svislé asymptoty funkce nemá.

• Asymptota se směrnicí v $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ – přímka $y = -1$

• Asymptota se směrnicí v $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ – přímka $y = 1$

• První derivace: $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$

• Rovnice $f'(x) = 0$ nemá řešení – funkce nemá stacionární body.

• Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty; \infty)$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Funkce je rostoucí na $\mathbb{R}$

• Funkce nemá lokální extrémy.

• Druhá derivace: $f''(x) = -\frac{2 \tanh x}{\cosh^2 x}$

• Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Periodická je jen derivace – hodnoty extrémů rostou s k.

Zadání: $x + 2\sin x$

Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Sudost a lichost: lichá

Perioda: $p = 2\pi$

Průsečíky s osou x: $[0; 0]$

Rostoucí: $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

Klesající: $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

Lokální maximum: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right]$

Lokální minimum: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi \right]$

Konvexní: $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$

Konkávní: $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$

Inflexní body: $[2k\pi; 2k\pi], [\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- Funkce sama periodická není, ale její derivace ano (perioda 2π) – monotonie, extrémy a konvexnost se opakují s touto periodou, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(-x) = -x - 2\sin x = -f(x)$ – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).

• Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, tedy $[0; 0]$

• Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, tedy $[0; 0]$

• Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• První derivace: $f'(x) = 2\cos x + 1$

• Stacionární body

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

• Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(0; \frac{2\pi}{3})$	$(\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3})$	$(\frac{4\pi}{3}; 2\pi)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce je rostoucí na $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$ a

klesající na $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

• Lokální maximum $\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right]$,
lokální minimum $\left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 2k\pi \right]$

• Druhá derivace: $f''(x) = -2\sin x$

• Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$

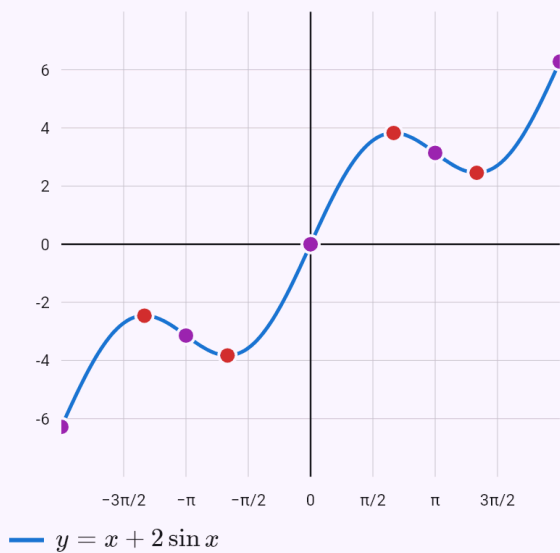
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(0; \pi)$	$(\pi; 2\pi)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Funkce je konvexní na $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$ a konkávní na $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$

- Inflexní body: $[2k\pi; 2k\pi]$, $[\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$

Graf



Významné body:

- inflexe $[-2\pi; -2\pi]$ • maximum $\left[-\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right]$
- inflexe $[-\pi; -\pi]$ • minimum $\left[-\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right]$
- inflexe $[0; 0]$ • maximum $\left[\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right]$
- inflexe $[\pi; \pi]$ • minimum $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right]$
- inflexe $[2\pi; 2\pi]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkované asymptoty.

Absolutní hodnota – hroty, jednostranné derivace.

Zadání: $|x^2 - 1|$

Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$

Sudost a lichost: sudá

Průsečíky s osou x: $[-1; 0]$, $[1; 0]$

Rostoucí: $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 1; \infty \rangle$

Klesající: $\langle -\infty; -1 \rangle$, $\langle 0; 1 \rangle$

Lokální maximum: $[0; 1]$

Lokální minimum: $[-1; 0]$, $[1; 0]$

Konvexní: $\langle -\infty; -1 \rangle$, $\langle 1; \infty \rangle$

Konkávní: $\langle -1; 1 \rangle$

Postup

• Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

• Absolutní hodnoty odstraníme podle znamének jejich argumentů na jednotlivých intervalech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in \langle -\infty; -1 \rangle \\ 1 - x^2, & x \in \langle -1; 1 \rangle \\ x^2 - 1, & x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$$

• – funkce je sudá (graf je souměrný podle osy y).

$$f(-x) = |(-x)^2 - 1| = |x^2 - 1| = f(x)$$

• Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$, tedy $[-1; 0]$, $[1; 0]$

• Průsečík s osou y: $f(0) = 1$, tedy $[0; 1]$

• Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

$f(x)$	$\begin{array}{ c } \hline (-\infty; -1) \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline (-1; 1) \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline (1; \infty) \\ \hline \end{array}$
	+	+	+

Funkce je kladná pro

$x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$ a záporná pro $x \in \emptyset$

• Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Svislé asymptoty funkce nemá.

• Asymptota se směrnicí v $-\infty$ neexistuje:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

• Asymptota se směrnicí v $+\infty$ neexistuje:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

• První derivace

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x}{|x^2 - 1|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x^2 - 1|}$$

• Stacionární body: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

• V bodě $x = -1$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$), graf tam má hrot.

- V bodě $x = 1$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$), graf tam má hrot.

- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce je rostoucí na $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 1; \infty \rangle$ a klesající na $(-\infty; -1)$, $\langle 0; 1 \rangle$

- V bodě $x = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ – lokální maximum.

- Lokální maximum $[0; 1]$, lokální minimum $[-1; 0]$, $[1; 0]$

- Druhá derivace

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)^3}{|x^2 - 1|^3} = \frac{2(x - 1)^3(x + 1)^3}{|x^2 - 1|^3}$$

- Rovnice $f''(x) = 0$ nemá řešení.

- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

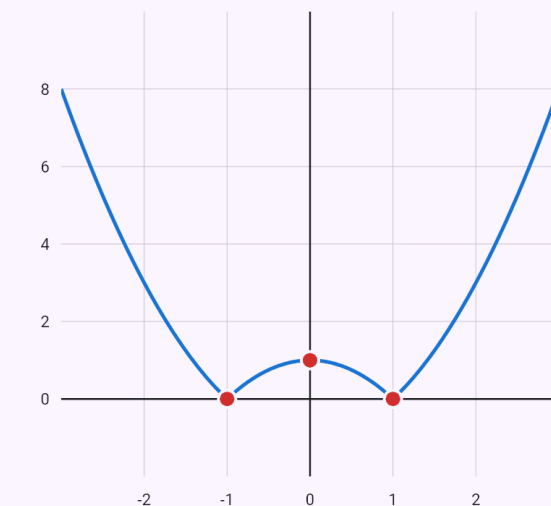
Funkce je konvexní na $(-\infty; -1)$, $\langle 1; \infty \rangle$ a konkávní na $\langle -1; 1 \rangle$

- Funkce nemá inflexní body.

- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit:

$$H(f) = \langle 0; \infty \rangle$$

Graf



$$y = |x^2 - 1|$$

Významné body:

- minimum $[-1; 0]$ • maximum $[0; 1]$
- minimum $[1; 0]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Třetí odmocnina – svislá tečna v nule.

Zadání: $x^{1/3}$ Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \mathbb{R}$

Sudost a lichost: lichá

Průsečíky s osou x : $[0; 0]$

Rostoucí: $\mathbb{R}$

Konvexní: $(-\infty; 0)$

Konkávní: $(0; \infty)$

Inflexní body: $[0; 0]$

Postup

- Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$
- $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$ – funkce je lichá (graf je souměrný podle počátku).
- Průsečíky s osou x : $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, tedy $[0; 0]$
- Průsečík s osou y : $f(0) = 0$, tedy $[0; 0]$
- Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f(x)$	-	+
- Funkce je kladná pro $x \in (0; \infty)$ a záporná pro $x \in (-\infty; 0)$
- Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Svislé asymptoty funkce nemá.
- Asymptota se směrnicí v $-\infty$ neexistuje:
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ ale } q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$
- Asymptota se směrnicí v $+\infty$ neexistuje:
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ ale } q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$
- První derivace: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- Rovnice $f'(x) = 0$ nemá řešení – funkce nemá stacionární body.
- V bodě $x = 0$ je derivace nekonečná ($f'_-(0) = \infty$, $f'_+(0) = \infty$) – graf tam má svislou tečnu.
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$
- Funkce je rostoucí na $\mathbb{R}$
- Funkce nemá lokální extrémy.
- Druhá derivace: $f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$
- Rovnice $f''(x) = 0$ nemá řešení.

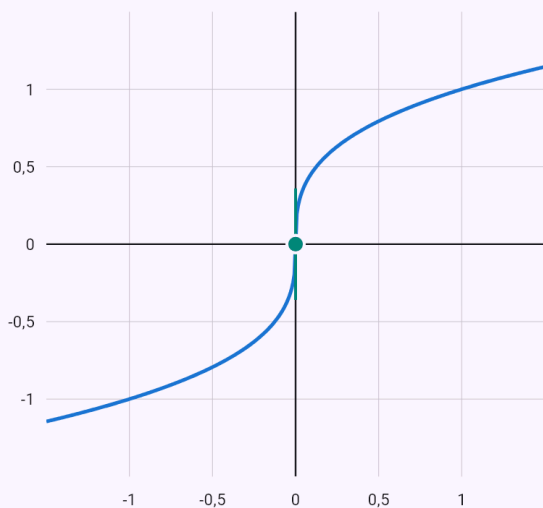
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	∪	∩

Funkce je konvexní na $(-\infty; 0)$ a konkávní na $(0; \infty)$

- Inflexní body: $[0; 0]$
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit: $H(f) = \mathbb{R}$

Graf



$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

Významné body:

- inflexe $[0; 0]$
- svislá tečna $[0; 0]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Vnořená absolutní hodnota – po částech, sudá funkce.

Zadání: $|-x^2 + 2|x| + 3|$

Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$

Sudost a lichost: sudá

Průsečíky s osou x: $[-3; 0], [3; 0]$

Rostoucí: $\langle -3; -1 \rangle, \langle 0; 1 \rangle, \langle 3; \infty \rangle$

Klesající: $(-\infty; -3), \langle -1; 0 \rangle, \langle 1; 3 \rangle$

Lokální maximum: $[-1; 4], [1; 4]$

Lokální minimum: $[-3; 0], [0; 3], [3; 0]$

Konvexní: $(-\infty; -3), \langle 3; \infty \rangle$

Konkávní: $\langle -3; 0 \rangle, \langle 0; 3 \rangle$

Postup

• Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

• Absolutní hodnoty odstraníme podle znamének jejich argumentů na jednotlivých intervalech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \in (-\infty; -3) \\ -x^2 - 2x + 3, & x \in \langle -3; 0 \rangle \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in \langle 0; 3 \rangle \\ x^2 - 2x - 3, & x \in \langle 3; \infty \rangle \end{cases}$$

• – funkce je sudá (graf je souměrný podle osy y).

$$f(-x) = | -(-x)^2 + 2|(-x)| + 3 | = | -x^2 + 2|x| + 3 |$$

• Průsečíky s osou x: $f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$, tedy $[-3; 0], [3; 0]$

• Průsečík s osou y: $f(0) = 3$, tedy $[0; 3]$

• Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

	$(-\infty; -3)$	$(-3; 3)$	$(3; \infty)$
$f(x)$	+	+	+

Funkce je kladná pro

$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$ a záporná pro $x \in \emptyset$

• Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Svislé asymptoty funkce nemá.

• Asymptota se směrnici v $-\infty$ neexistuje:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

• Asymptota se směrnici v $+\infty$ neexistuje:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

• První derivace

$$f'(x) = \frac{-6x^3 + 2x^3|x| + 6x - 2x|x|}{|x| \cdot |-x^2 + 2|x| + 3|} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{|x| \cdot |-x^2 + 2|x| + 3|}$$

• Stacionární body: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

• V bodě $x = -3$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(-3) = -4, f'_+(-3) = 4$), graf tam má hrot.

- V bodě $x = 0$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$), graf tam má hrot.
- V bodě $x = 3$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(3) = -4$, $f'_+(3) = 4$), graf tam má hrot.
- Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 3)$
$f'(x)$	-	+	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

Funkce je rostoucí na a klesající na

$\langle -3; -1 \rangle$, $\langle 0; 1 \rangle$, $\langle 3; \infty \rangle$

$(-\infty; -3)$, $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 1; 3 \rangle$

- V bodě $x = -1$: $f''(-1) = -2 < 0$ – lokální maximum.
- V bodě $x = 1$: $f''(1) = -2 < 0$ – lokální maximum.
- Lokální maximum $[-1; 4]$, $[1; 4]$, lokální minimum $[-3; 0]$, $[0; 3]$, $[3; 0]$
- Druhá derivace

$$f''(x) = \frac{12x^8 + 24x^6 + 36x^6|x| + 2x^6|x|^3 - 84x^4 - 96}{}$$

- Rovnice $f''(x) = 0$ nemá řešení.
- Znaménko druhé derivace – kde je kladná, je funkce

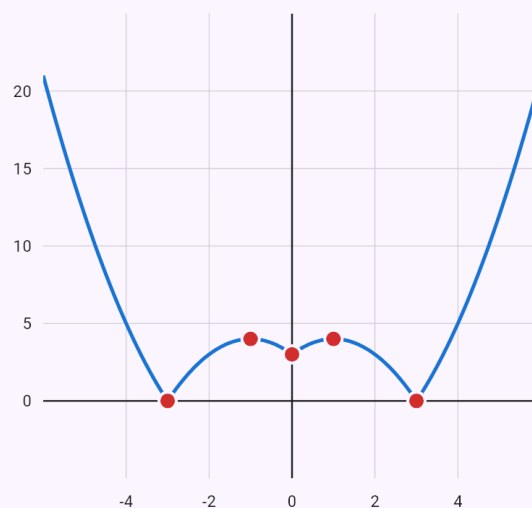
konvexní (prohnutá nahoru), kde je záporná, konkávní (prohnutá dolů):

	$(-\infty; -3)$	$(-3; 0)$	$(0; 3)$	$(3; \infty)$
$f''(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	∪	∩	∩	∪

Funkce je konvexní na $(-\infty; -3)$, $\langle 3; \infty \rangle$ a konkávní na $\langle -3; 0 \rangle$, $\langle 0; 3 \rangle$

- Funkce nemá inflexní body.
- Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit:
 $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$

Graf



$$y = -x^2 + 2|x| + 3$$

Významné body:

- minimum $[-3; 0]$ • maximum $[-1; 4]$
- minimum $[0; 3]$ • maximum $[1; 4]$ • minimum $[3; 0]$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Součet absolutních hodnot – konstantní úsek a dvě šikmé asymptoty.

Zadání: $|x - 2| + |x + 3|$ Průběh funkce

Výsledek

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

Obor hodnot: $H(f) = \langle 5; \infty \rangle$

Sudost a lichost: ani sudá, ani lichá

Rostoucí: $\langle 2; \infty \rangle$

Klesající: $(-\infty; -3]$

Konstantní: $\langle -3; 2 \rangle$

Lokální minimum: $f(x) = 5, x \in \langle -3; 2 \rangle$

Asymptoty: $y = -2x - 1, y = 2x + 1$

Postup

• Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$

• Absolutní hodnoty odstraníme podle znamének jejich argumentů na jednotlivých intervalech

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in (-\infty; -3) \\ 5, & x \in \langle -3; 2 \rangle \\ 2x + 1, & x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$$

• - to není $f(x)$ ani $-f(x)$, funkce není sudá ani lichá.

$$f(-x) = |(-x) - 2| + |(-x) + 3| = |-x - 2| + |3 - x|$$

• Rovnice $f(x) = 0$ nemá řešení – graf osu x neprotíná.

• Průsečík s osou y : $f(0) = 5$, tedy $[0; 5]$

• Znaménko funkce na intervalech mezi nulovými body a body mimo definiční obor:

• Znaménko první derivace – kde je kladná, funkce roste, kde je záporná, klesá:

	$(-\infty; -3)$	$\langle -3; 2 \rangle$	$\langle 2; \infty \rangle$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Funkce je rostoucí na $\langle 2; \infty \rangle$ a klesající na $(-\infty; -3]$. Na $\langle -3; 2 \rangle$ je konstantní ($f' = 0$).

• Lokální minimum $f(x) = 5, x \in \langle -3; 2 \rangle$, maximum funkce nemá.

• Druhá derivace: $f''(x) = 0$

• Druhá derivace je nulová – graf je část přímky, funkce není konvexní ani konkávní.

• Obor hodnot – z monotonie, extrémů a limit:
 $H(f) = \langle 5; \infty \rangle$

$$\frac{f(x)}{x} \Big| \begin{matrix} (-\infty; \infty) \\ + \end{matrix}$$

Funkce je kladná pro $x \in \mathbb{R}$ a záporná pro $x \in \emptyset$

• Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

• Svislé asymptoty funkce nemá.

• Asymptota se směrnicí v $-\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$,
 $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -1$ – přímka $y = -2x - 1$

• Asymptota se směrnicí v $+\infty$: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$,
 $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = 1$ – přímka $y = 2x + 1$

• První derivace

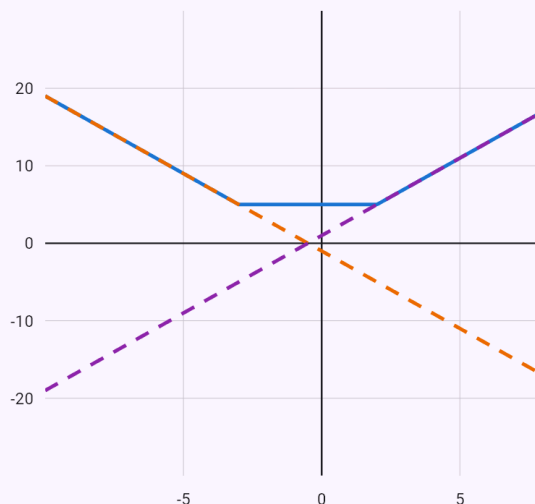
$$f'(x) = \frac{x}{|x - 2|} + \frac{x}{|x + 3|} - \frac{2}{|x - 2|} + \frac{3}{|x + 3|} = \frac{x|x - 2| + x|x + 3| - 2|x - 2| + 3|x + 3|}{|x - 2||x + 3|}$$

• Rovnice $f'(x) = 0$ nemá řešení – funkce nemá stacionární body.

• V bodě $x = -3$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(-3) = -2, f'_+(-3) = 0$), graf tam má hrot.

• V bodě $x = 2$ derivace neexistuje – jednostranné derivace jsou různé ($f'_-(2) = 0, f'_+(2) = 2$), graf tam má hrot.

Graf



$$\text{— } y = |x - 2| + |x + 3|$$

$$\text{--- } y = -2x - 1$$

$$\text{--- } y = 2x + 1$$

Červeně lokální extrémy, fialově inflexní body, prázdné kolečko – bod, ve kterém funkce není definovaná; čárkovaně asymptoty.

Známá omezení

- Funkce, která ani nemá periodickou derivaci ($x \cdot \sin x$), se vyšetří jen numericky na intervalu $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a bez periody; cyklometrické funkce ($\arcsin$, $\arctg$) zatím nevyšetříme.

Taylorův polynom

Aplikace sestaví Taylorův (pro bod 0 Maclaurinův) polynom zadaného stupně: tabulku derivací v bodě, dosazení do vzorce a zbytek v Lagrangeově tvaru. Stupeň umí najít i sama – nejmenší, při kterém chyba v zadaném bodě nebo na intervalu nepřekročí zadanou mez. V grafu je funkce a polynom; posuvníkem měníte stupeň a vidíte, jak se přiblížení zlepšuje.

Jak zadat

<code>taylor(sin x, 0, 5)</code>	Funkce, bod a stupeň.
<code>maclaurin(e^x, 4)</code>	Maclaurinův polynom – bod je 0.
<code>taylor(e^x, 0, chyba=0.001, x=0.5)</code>	Stupeň podle chyby v bodě x (na intervalu místo x zadejte r=...).
<code>ln(1 + x)</code>	Funkce s čípem „Taylorův polynom“ – bod, stupeň nebo přesnost vyplníte tam.

Ukázky

Polynom 4. stupně se zbytkem.

Zadání: `taylor(ln(1 + x), 0, 4)`

Výsledek

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Postup

- Maclaurinův polynom (Taylorův polynom v bodě 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Derivace funkce a jejich hodnoty v bodě a

$$f(x) = \ln(x+1) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \quad f^{(4)}(0) = -6$$

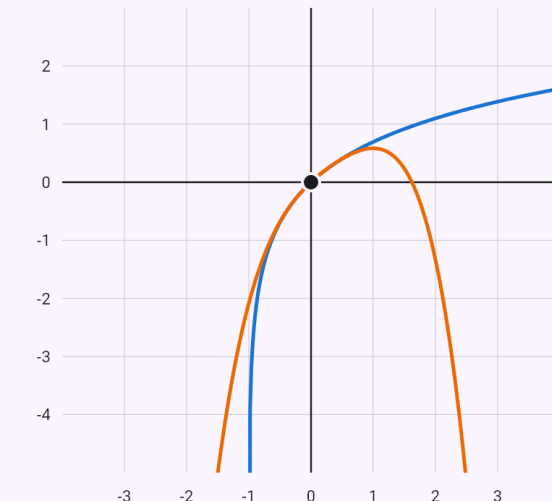
- Dosadíme hodnoty derivací

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

- Zbytek (chyba aproximace) v Lagrangeově tvaru, ξ leží mezi a a x: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{24}{(\xi+1)^5 \cdot 5!}x^5$

Graf

Stupeň: 4



— $y = \ln(1+x)$

— $T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Bod, v jehož okolí polynom funkci přibližuje:

- $[0; 0]$

Posuvníkem nad grafem zvolíš stupeň polynomu – s vyšším stupněm polynom funkci v okolí bodu přibližuje lépe a na širším okolí.

Stupeň podle požadované přesnosti – přibližná hodnota $e^{0,5}$.

Zadání: `taylor(e^x, 0, chyba=0.001, x=0.5)`

Výsledek

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$f(0,5) \approx 1,6484$$

Postup

- Maclaurinův polynom (Taylorův polynom v bodě 0):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad n = 4$$

- Derivace funkce a jejich hodnoty v bodě a

$$f(x) = e^x \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \quad f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \quad f^{(4)}(0) = 1$$

- Dosadíme hodnoty derivací

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

- Zbytek (chyba aproximace) v Lagrangeově tvaru, ξ leží

$$\text{mezi a a x: } R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{e^\xi}{5!} x^5$$

- Hledáme nejmenší stupeň n , pro který odhad zbytku v

bodě x nepřekročí zadanou chybu

$$M_k = \max_{t \in (0; 0,5)} |f^{(k)}(t)|, \quad h = |x - a| = 0,5$$

$$n = 1: |R_1| \leq \frac{1,6487}{2!} \cdot 0,5^2 \approx 0,2063 > 10^{-3}$$

$$n = 2: |R_2| \leq \frac{1,6487}{3!} \cdot 0,5^3 \approx 0,0344 > 10^{-3}$$

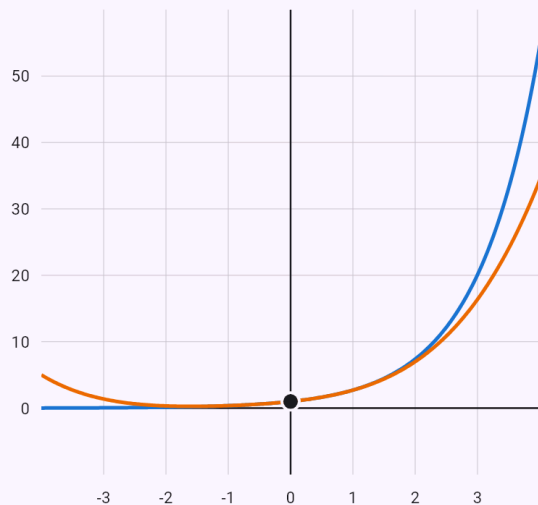
$$n = 3: |R_3| \leq \frac{1,6487}{4!} \cdot 0,5^4 \approx 4,3 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$n = 4: |R_4| \leq \frac{1,6487}{5!} \cdot 0,5^5 \approx 4,3 \cdot 10^{-4} \leq 10^{-3}$$

- Přibližná hodnota: $f(0,5) \approx T_4(0,5) = \frac{211}{128} \approx 1,6484$

Graf

Stupeň: 4



— $y = e^x$

— $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

Bod, v jehož okolí polynom funkci přibližuje:

- $[0; 1]$

Posuvníkem nad grafem zvolíš stupeň polynomu – s vyšším stupněm polynom funkci v okolí bodu přibližuje lépe a na širším okolí.

Neurčitý integrál

Aplikace integruje metodami, které se učí ve škole, a u každého kroku řekne, co dělá. Výsledek ověří derivováním (zkouška je posledním krokem) a nakreslí integrovanou funkci a primitivní funkci.

Odmocniny z mocnin proměnné ($\sqrt[3]{(x^4)}$, $\sqrt{(x^3)}$) přepíše na mocniny s racionálním exponentem; absolutní hodnotu ($|\cos x|$, $\sqrt{(1 - \sin^2 x)}$) zapíše pomocí znaménka sgn .

Nemá-li integrál elementární primitivní funkci (třeba $e^{(-x^2)}$), aplikace to řekne a uvede ji pomocí vyšší funkce (erf , Si , ...).

Jak zadat

<code>int(x e^x, x)</code>	Integrál s proměnnou.
<code>int(x^2 sin x)</code>	Bez proměnné, když je jen jedna.
<code>∫ x^2 dx</code>	Se znakem integrálu, i z fotky.
<code>x e^x</code>	Funkce s čípek „Integrovat“.

Základní integrály a substituce

Integrál součtu po členech, konstanta před integrál, tabulkové integrály (i s lineární vnitřní funkcí) a substituce, když je v integrálu funkce i derivace jejího vnitřku.

Ukázky

Po členech podle tabulky.

Zadání: `int(3x^2 - 2/x + e^x)`

Výsledek

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = x^3 + e^x - 2$$

Postup

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \right) dx = \int 3x^2 dx + \int e^x dx + \int -\frac{2}{x}$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int e^x dx = e^x$

- Konstantu vytkneme před integrál:

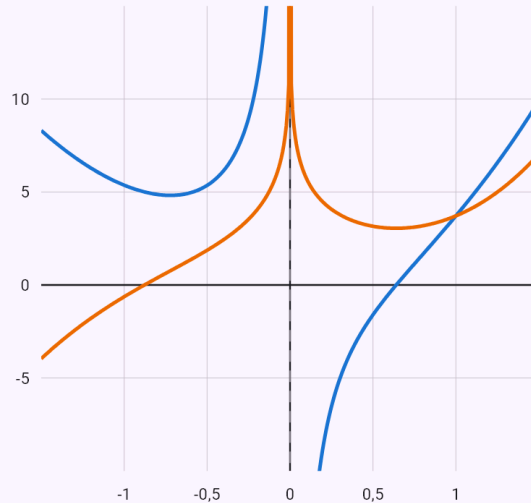
$$\int -\frac{2}{x} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

- Zkouška – derivace výsledku je integrovaná funkce:

$$(x^3 + e^x - 2 \ln |x|)' = 3x^2 + e^x - \frac{2}{x}$$

Graf



$$\begin{aligned} \text{— } f(x) &= 3x^2 + e^x - \frac{2}{x} \\ \text{— } F(x) &= x^3 + e^x - 2 \ln |x| \end{aligned}$$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro $C = 0$ (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Substituce $t = x^2$.

Zadání: `int(2x cos(x^2))`

Výsledek

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$

Postup

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int 2x \cos(x^2) dx = 2 \int x \cos(x^2) dx$$

- Substituce $t = x^2, dt = 2x dx$:

$$\int x \cos(x^2) dx = \int \frac{\cos t}{2} dt$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

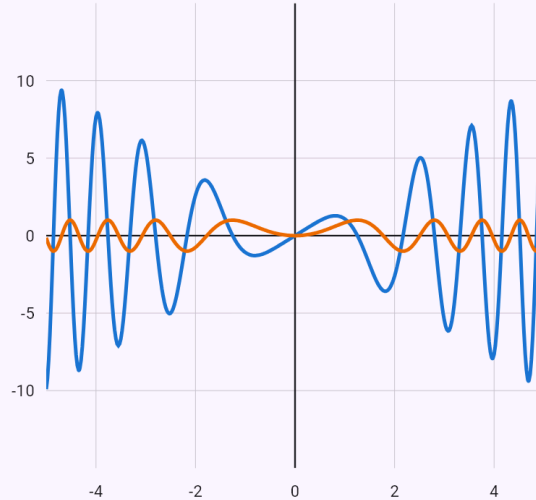
$$\int \frac{\cos t}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \cos t dt = \sin t$

- Vrátíme se k původní proměnné: $\frac{\sin t}{2} = \frac{\sin(x^2)}{2}$

- Zkouška – derivace výsledku je integrovaná funkce:
 $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$

Graf



$f(x) = 2x \cos(x^2)$
 $F(x) = \sin(x^2)$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro $C = 0$ (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Integrál s konstantami a, b .

Zadání: `int(1/(a - bx)^3)`

Výsledek

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2} + C$$

Podmínky: $b \neq 0$

Postup

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$),
výsledek proto vydělíme koeficientem a :

$$\int \frac{1}{(a - bx)^3} dx = \frac{1}{2b(bx - a)^2}$$

- Zkouška – derivace výsledku je integrovaná funkce:

$$\left(\frac{1}{2b(bx - a)^2} \right)' = \frac{1}{(a - bx)^3}$$

Per partes

Součin polynomu a exponenciály, goniometrické funkce nebo logaritmu aplikace integruje per partes, podle potřeby opakovaně; integrály typu $e^x \sin x$ cyklickým per partes.

Ukázky

Per partes dvakrát po sobě.

Zadání: `int(x^2 e^x)`

Výsledek

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Postup

- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = e^x$, tedy $u' = 2x$, $v = e^x$: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$

- Konstantu vytkneme před integrál:

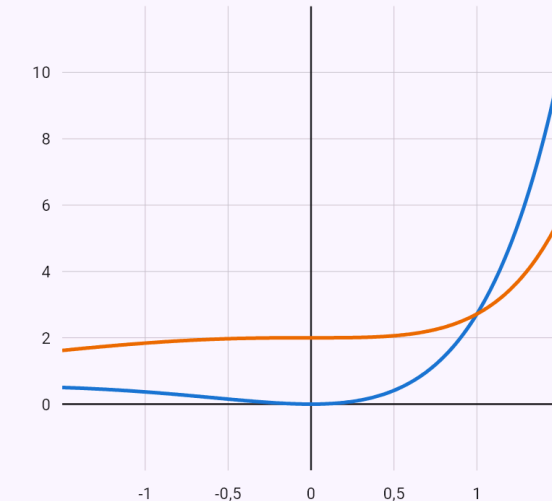
$$\int 2x e^x dx = 2 \int x e^x dx$$

- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = e^x$, tedy $u' = 1$, $v = e^x$: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int e^x dx = e^x$

- Zkouška – derivace výsledku je integrovaná funkce:
 $(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x)' = x^2 e^x$

Graf



— $f(x) = x^2 e^x$
— $F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro $C = 0$ (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Racionální funkce

Racionální funkci aplikace případně vydělí, jmenovatel rozloží a funkci rozloží na parciální zlomky, které integruje na logaritmy a arkustangenty.

Jmenovatel, který nad racionálními čísly rozložit nejde ($x^4 + 1$, $x^5 + 1$), rozloží nad reálnými čísly – každá dvojice komplexně sdružených kořenů dá kvadratický činitel bez reálných kořenů.

Ukázky

Rozklad na parciální zlomky.

Zadání: $\text{int}((x + 1)/(x^2 - 3x + 2))$

Výsledek

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|$$

Postup

• Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky: $\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} \right) dx$

• Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} \right) dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int -\frac{2}{x - 1} dx$$

• Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int \frac{3}{x - 2} dx = 3 \int \frac{1}{x - 2} dx$$

• Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{x - 2} dx = \ln |x - 2|$$

• Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int -\frac{2}{x - 1} dx = -2 \int \frac{1}{x - 1} dx$$

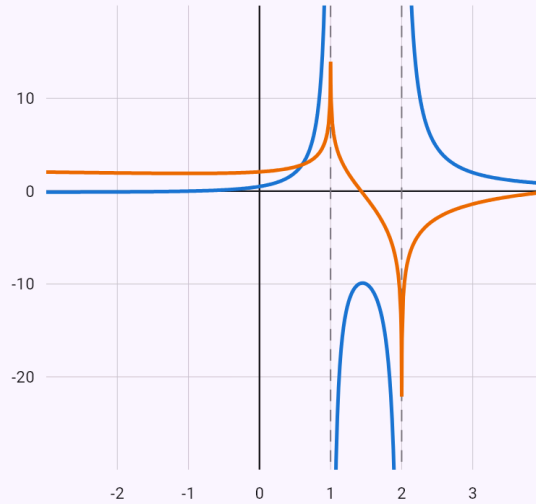
• Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{x - 1} dx = \ln |x - 1|$$

• Zkouška – derivace výsledku je integrovaná funkce

$$(3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|)' = \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 1} = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Graf



$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$F(x) = 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x - 1|$$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro $C = 0$ (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Rozklad jmenovatele $x^4 + 1$ nad reálnými čísly.

Zadání: $\int (1/(x^4 + 1))$

Výsledek

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} (x + 1) \right) + C$$

Postup

- Jmenovatel rozložíme na součin nad $\mathbb{R}$: jeho komplexní kořeny tvoří komplexně sdružené dvojice $r, \bar{r}$ a každá dvojice dává kvadratický činitel $(x - r)(x - \bar{r}) = x^2 - 2 \operatorname{Re} r \cdot x + |r|^2$, který už reálné kořeny nemá:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx$$

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) dx = \int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx + \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx$$

- Jmenovatel nemá reálné kořeny: z čitatele oddělíme násobek derivace jmenovatele (vede na $\ln$), zbytek po doplnění jmenovatele na čtverec vede na arctg

$$\int \frac{\sqrt{2}x + 2}{4(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx$$

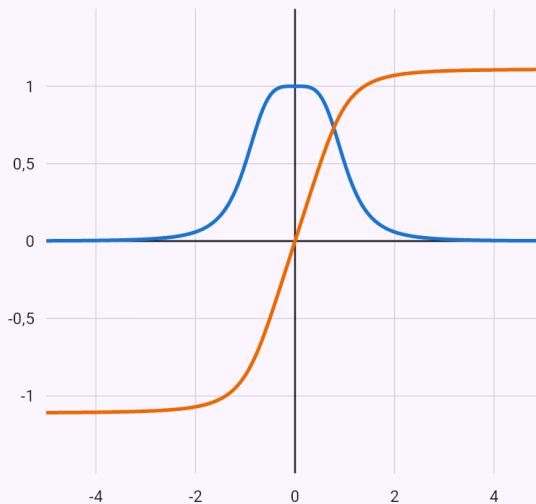
- Jmenovatel nemá reálné kořeny: z čitatele oddělíme násobek derivace jmenovatele (vede na $\ln$), zbytek po doplnění jmenovatele na čtverec vede na arctg

$$\int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx = -\frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{2 - \sqrt{2}x}{4(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx$$

- Zkouška – derivace výsledku je integrovaná funkce

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \right)' + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} (x + 1) \right)'$$

Graf



— $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

— $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} (x + 1) \right) + C$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro $C = 0$ (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Goniometrické funkce

Přednostně vzorce ($\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, součiny na součty), u liché mocniny substituce $t = \sin x$ nebo $t = \cos x$, u racionální funkce sinu a kosinu substituce podle parity, univerzální substituce $t = \tan(x/2)$ až nakonec.

Ukázky

Lichá mocnina sinu – substituce $t = \cos x$.

Zadání: `int(sin(x)^3 cos(x)^2)`

Výsledek

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} .$$

Postup

- Lichá mocnina – substituce $t = \cos x$,
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$dt = -\sin x dx$$

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \int (t^4 - t^2) dt$$

- Integrál součtu je součet integrálů:

$$\int (t^4 - t^2) dt = \int t^4 dt + \int -t^2 dt$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int t^4 dt = \frac{t^5}{5}$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int -t^2 dt = - \int t^2 dt$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}$

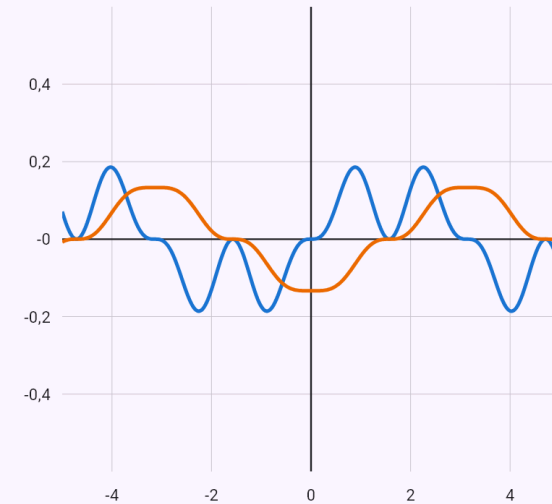
- Vrátíme se k původní proměnné:

$$t = \cos x : \quad \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$$

- Zkouška – derivace výsledku je integrovaná funkce:

$$\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \right)' = \cos^2 x \sin^3 x$$

Graf



$$\begin{aligned} \text{— } f(x) &= \cos^2 x \sin^3 x \\ \text{— } F(x) &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} \end{aligned}$$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro $C = 0$ (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Hyperbolické funkce

Tabulkové integrály ($\int \sinh x dx = \cosh x + C$, $\int 1/\cosh^2 x dx = \tanh x + C$, ...), $\int \tanh x dx$ přes logaritmus derivace, per partes ($x \sinh x$, $\operatorname{arsinh} x$), druhé mocniny vzorci $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$, $\tanh^2 x = 1 - 1/\cosh^2 x$; ostatní z definice přes exponenciály.

Ukázky

Vzorec $\sinh^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$.

Zadání: `int(sinh(x)^2)`

Výsledek

$$\int \sinh^2 x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

Postup

- Použijeme vzorec $\sinh^2 \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}$:

$$\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \, dx$$

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int -\frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2}$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int \frac{\cosh(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) \, dx$$

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$),
výsledek proto vydělíme koeficientem a :

$$\int \cosh(2x) \, dx = \frac{\sinh(2x)}{2}$$

- Zkouška – derivace výsledku je integrovaná funkce

$$\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} \right)' = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} = \sinh^2 x$$

Odmocniny

Integrály s odmocninou z lineární lomené funkce substitucí, s odmocninou z kvadratického trojčlenu Eulerovou substitucí a binomické integrály podle Čebyševových podmínek – když žádná neplatí, aplikace řekne, že integrál není elementární.

Ukázky

Eulerova substituce.

Zadání: `int(sqrt(x^2 + 1))`

Výsledek

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$$

Postup

- Eulerova substituce (1. typu) $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$ - integrál přejde na racionální funkci proměnné t

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt$$

- Konstantu vytkneme před integrál

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt$$

- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky

$$\int \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3} dt = \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \int t dt + \int \frac{2}{t} dt + \int \frac{1}{t^3} dt$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int t dt = \frac{t^2}{2}$

- Konstantu vytkneme před integrál: $\int \frac{2}{t} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t|$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2}$

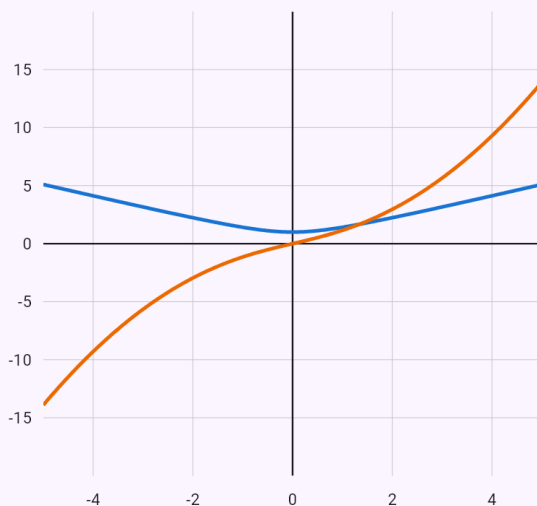
- Vrátíme se k původní proměnné

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} : \quad \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}$$

- Zkouška - derivace výsledku je integrovaná funkce

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} \right)' = \sqrt{x^2 + 1}$$

Graf



— $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

— $F(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2}$

Integrovaná funkce f a primitivní funkce F pro $C = 0$ (jiné C ji posune nahoru nebo dolů). Kde je f kladná, F roste; kde je záporná, F klesá.

Známá omezení

- U některých integrálů najdeme výsledek bez postupu – aplikace to v postupu uvede.
- Výpočet bez postupu, který trvá příliš dlouho, aplikace přeruší a řekne to.

Určitý integrál a jeho aplikace

Určitý integrál aplikace spočítá Newtonovou–Leibnizovou formulí a nakreslí plochu pod grafem – část nad osou x jinou barvou než pod ní. Umí i nevlastní integrály a aplikace: plochu, délku křivky, objem a plášť rotačního tělesa, i pro křivky zadané parametricky a v polárních souřadnicích.

Určitý integrál

Primitivní funkci aplikace najde stejně jako u neurčitého integrálu a dosadí meze. Při substituci meze rovnou přepočítá. Nemá-li integrál elementární primitivní funkci, spočítá ho numericky.

Jak zadat

<code>int(x^2, x, 0, 3)</code>	Integrál s proměnnou a mezemi.
<code>\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx</code>	Z fotky nebo v zápisu LaTeX.
<code>x^2</code>	Funkce s čípek „Integrovat“ – meze vyplníte do polí.

Ukázky

Substituce s přepočtem mezí.

Zadání: `int(3x^2 cos(x^3), x, 0, 1)`

Výsledek

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = \sin 1 \approx 0,8415$$

Postup

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int 3x^2 \cos(x^3) dx = 3 \int x^2 \cos(x^3) dx$$

- Substituce $t = x^3$, $dt = 3x^2 dx$:

$$\int x^2 \cos(x^3) dx = \int \frac{\cos t}{3} dt$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int \frac{\cos t}{3} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt$$

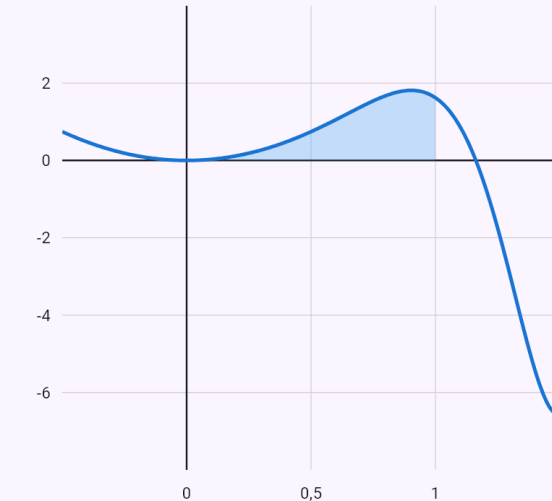
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \cos t dt = \sin t$

- Při substituci přepočítáme i meze – k původní proměnné se vracet nemusíme: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 1$

- Newtonova–Leibnizova formule, $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = [\sin t]_0^1 = \sin 1 - 0 = \sin 1$$

Graf



$$f(x) = 3x^2 \cos(x^3)$$

■ nad osou x (+) ■ pod osou x (-)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Nevlastní integrál

Nekonečnou mez nebo neomezenou funkci aplikace řeší limitou primitivní funkce a řekne, zda integrál konverguje, nebo diverguje. Když limita primitivní funkce nejde spočítat, rozhodne srovnávacím kritériem.

Ukázky

Nekonečná horní mez.

Zadání: `int(1/x^2, x, 1, oo)`

Výsledek

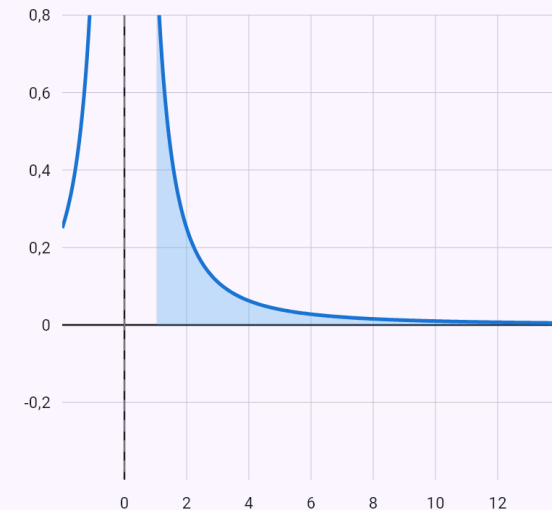
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Postup

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$
- Nevlastní integrál – v nekonečné mezi a v bodě, kde funkce není omezená, bereme limitu primitivní funkce. Limity jsou konečné, integrál konverguje

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) - (-1) = 0 - (-1) = 1$$

Graf



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

nad osou x (+) pod osou x (-)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Funkce neomezená u dolní meze.

Zadání: `int(1/sqrt(x), x, 0, 1)`

Výsledek

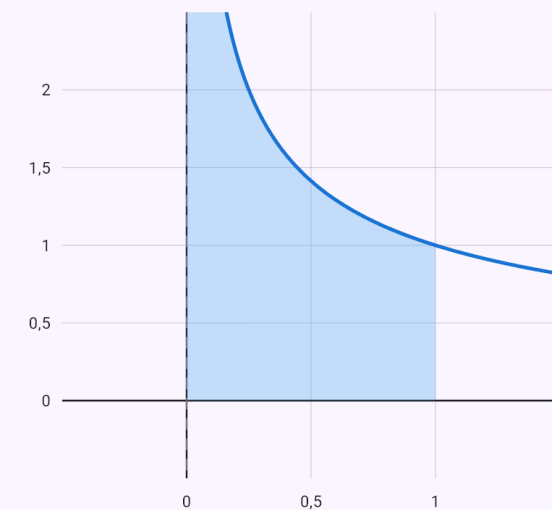
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Postup

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$
- Nevlastní integrál – v nekonečné mezi a v bodě, kde funkce není omezená, bereme limitu primitivní funkce. Limity jsou konečné, integrál konverguje

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Graf



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

nad osou x (+) pod osou x (-)

Určitý integrál je obsah plochy mezi grafem funkce a osou x – část nad osou se počítá kladně, část pod osou záporně.

Plocha pod křivkou a mezi křivkami

Plochu mezi grafem a osou x nebo mezi dvěma křivkami aplikace počítá jako integrál absolutní hodnoty rozdílu – části nad i pod se sčítají kladně. Meze nemusíte zadávat: najde je jako průsečíky křivek.

Jak zadat

`plocha(x^2, x)`

Plocha mezi dvěma křivkami, meze z průsečíků.

`plocha(sin x, 0, pi)`

Plocha mezi křivkou a osou x na intervalu.

`x^2`

Funkce s čipem „Integrovat“ → „Plocha mezi křivkami“; druhou křivku a meze vyplníte do polí.

Ukázky

Plocha mezi parabolou a přímkou.

Zadání: `x^2` Plocha mezi křivkami, druhá křivka x

Výsledek

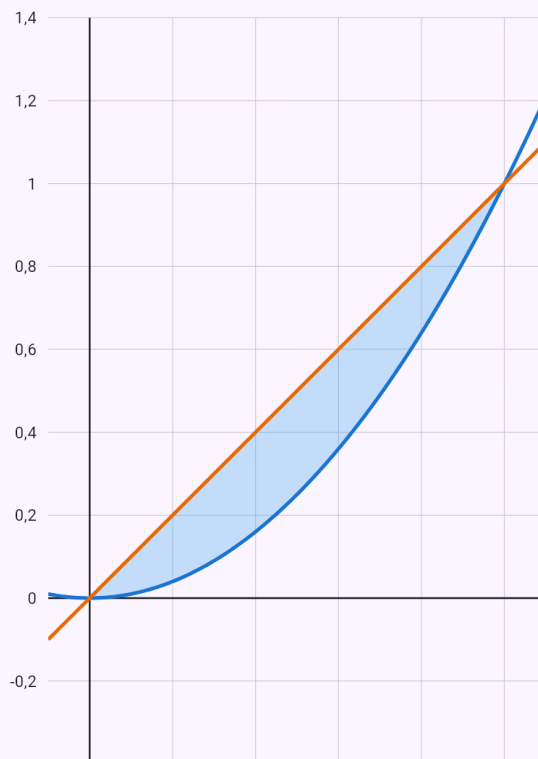
$$S = \frac{1}{6}$$

Postup

- Meze jsou průsečíky křivek: $x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$
- Obsah plochy mezi křivkami (části nad i pod se počítají kladně), $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$: $S = \int_0^1 |x^2 - x| dx$
- Výraz v absolutní hodnotě na intervalu nemění znaménko – absolutní hodnotu odstraníme podle něj:
$$\int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx$$
- Integrál součtu je součet integrálů:
$$\int (-x^2 + x) dx = \int -x^2 dx + \int x dx$$
- Konstantu vytkneme před integrál:
$$\int -x^2 dx = - \int x^2 dx$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formule, $F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

Graf



0 0,2 0,4 0,6 0,8 1

— $f(x) = x^2$
— $g(x) = x$

Vybarvená plocha – její obsah je výsledek (části nad i pod osou se počítají kladně).

Délka křivky

Délku grafu funkce na intervalu aplikace počítá vzorcem $l = \int \sqrt{1 + f'^2} dx$. Odmocninu se snaží zjednodušit (u půlkružnice vyjde arkussinus); kde integrál nemá elementární primitivní funkci, je výsledek numerický.

Jak zadat

delka($x^{(3/2)}$, 0, 4)

Délka křivky na intervalu (i „délka“).

Ukázky

Délka půlkružnice.

Zadání: `sqrt(1 - x^2)`

Délka křivky, meze -1 a 1

Výsledek

$$l = \pi \approx 3,1416$$

Postup

- Délka křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

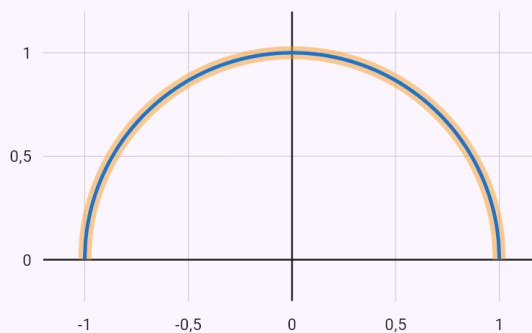
- Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

- Nevlastní integrál – v nekonečné mezi a v bodě, kde funkce není omezená, bereme limitu primitivní funkce. Limity jsou konečné, integrál konverguje

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x - \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Graf



— $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Zvýrazněný oblouk – jeho délka je výsledek.

Objem rotačního tělesa

Objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x aplikace počítá vzorcem $V = \pi \int f^2 dx$ (mezi dvěma křivkami jako mezikružím), kolem osy y metodou válcových slupek. Těleso ukáže i ve 3D – otáčíte jím prstem.

Jak zadat

objem(sqrt(x), 0, 4)

Objem tělesa rotací kolem osy x.

objem(x^2, 0, 2, y)

Rotace kolem osy y.

Ukázky

Rotační paraboloid.

Zadání: sqrt(x) Objem tělesa, meze 0 a 4

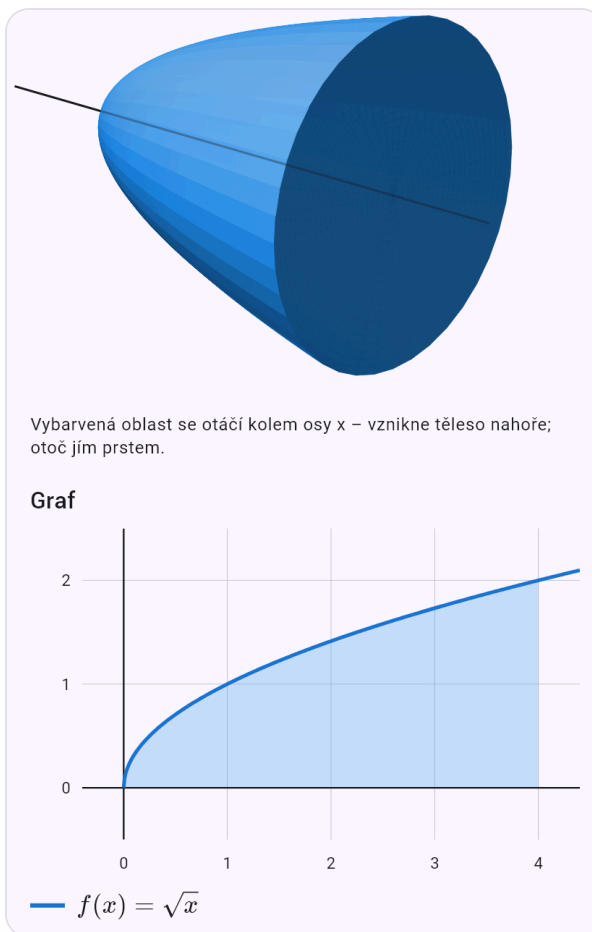
Výsledek

$$V = 8\pi \approx 25,1327$$

Postup

- Objem rotačního tělesa kolem osy x, $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$
: $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Newtonova–Leibnizova formule, $F(b) - F(a)$:
 $\int_0^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8 - 0 = 8$
- Hodnotu integrálu vynásobíme konstantou před ním:
 $V = \pi \cdot 8 = 8\pi$

Rotační těleso



Plášť rotačního tělesa

Obsah pláště aplikace počítá vzorcem $S = 2\pi \int f\sqrt{1 + f'^2} dx$; součin pod odmocninou se často zjednoduší (u koule vyjde konstanta).

Jak zadat

povrch(sqrt(4 - x^2), -2, 2)

Plášť tělesa rotací kolem osy x.

Ukázky

Povrch koule o poloměru 2.

Zadáání: $\sqrt{4 - x^2}$

Povrch tělesa, meze -2 a 2

Výsledek

$$S = 16\pi \approx 50,2655$$

Postup

- Obsah pláště rotačního tělesa kolem osy x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-2}^2 2 dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int 2 dx = 2x$

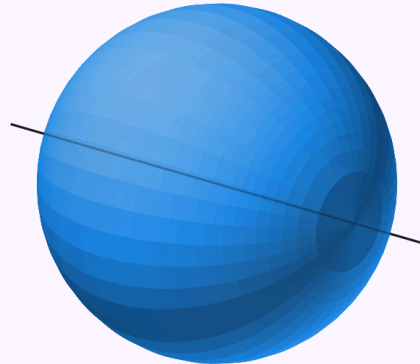
- Newtonova-Leibnizova formule, $F(b) - F(a)$:

$$\int_{-2}^2 2 dx = [2x]_{-2}^2 = 4 - (-4) = 8$$

- Hodnotu integrálu vynásobíme konstantou před ním:

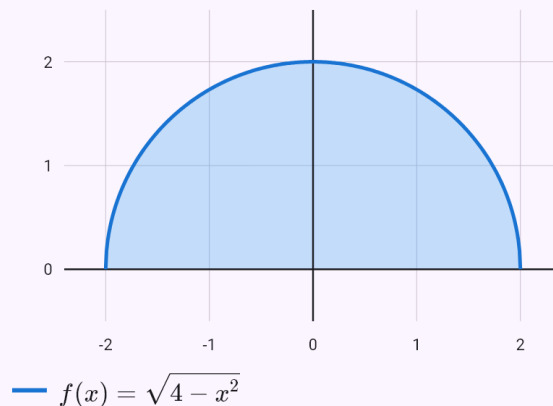
$$S = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

Rotační těleso



Vybarvená oblast se otáčí kolem osy x – vznikne těleso nahoře; otoč jím prstem.

Graf



Křivky zadané parametricky a v polárních souřadnicích

Křivku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ napište na dva řádky, křivku v polárních souřadnicích jako $r = \rho(\varphi)$. Aplikace pak u čipu „Integrovat“ nabídne plochu, délku, objem a plášť; meze parametru jsou nepovinné (bez nich od 0 do 2π). Objem a plášť počítá rotací kolem osy x z části křivky nad osou.

Jak zadat

$$x = t - \sin(t)$$

$$y = 1 - \cos(t)$$

Parametrická křivka na dva řádky.

$$r = 1 + \cos(\varphi)$$

Křivka v polárních souřadnicích ($i\ r^2 = \dots$ pro lemniskátu).

delka($x=\cos(t)^3$, $y=\sin(t)^3$, t , 0 , 2π)

Psaný zápis s parametrem a mezemi.

Ukázky

Plocha pod obloukem cykloidy.

Zadání: $x = t - \sin(t)$

$y = 1 - \cos(t)$ **Plocha**

Výsledek

$$S = 3\pi \approx 9,4248$$

Postup

- Derivace podle parametru:

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t$$

- Obsah plochy pod parametricky zadanou křivkou (u uzavřené křivky obsah uvnitř) pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$,

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \right|:$$

$$S = \left| \int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt \right|$$

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \int 1 dt + \int -2 \cos t dt -$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int 1 dt = t$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int -2 \cos t dt = -2 \int \cos t dt$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \cos t dt = \sin t$

- Použijeme vzorec $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$:

$$\int \cos^2 t dt = \int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt$$

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2}$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt$$

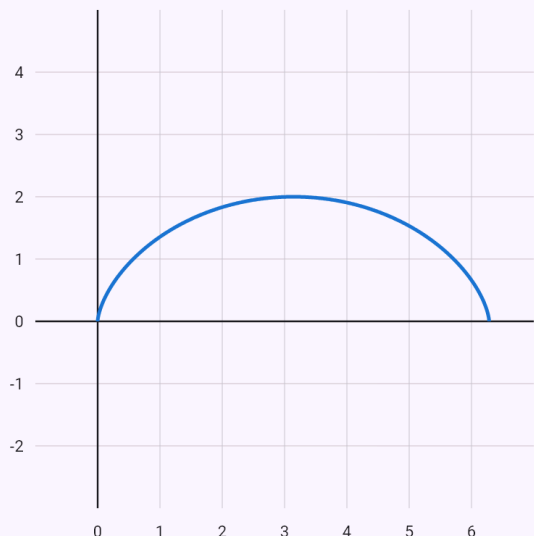
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$), výsledek proto vydělíme koeficientem a :

$$\int \cos(2t) dt = \frac{\sin(2t)}{2}$$

- Newtonova–Leibnizova formule, $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{2\pi} (-2 \cos t + \cos^2 t + 1) dt = \left[\frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{\sin(2t)}{4} \right]$$

Graf



$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

Křivka zadaná parametricky (nebo v polárních souřadnicích) nakreslená pro zvolené meze parametru.

Délka kardioidy.

Zadání: $r = 1 + \cos(\varphi)$

Délka křivky

Výsledek

$$l = 8$$

Postup

- Derivace podle parametru: $\rho'(\varphi) = -\sin \varphi$

- Délka křivky v polárních souřadnicích pro $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi$$

- Interval rozdělíme v nulových bodech výrazů v absolutní hodnotě (π) a v každé části absolutní hodnotu odstraníme podle znaménka

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = \int_0^{\pi} 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Konstantu vytkneme před integrál

$$\int 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$), výsledek proto vydělíme koeficientem a:

$$\int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

- Newtonova–Leibnizova formule, $F(b) - F(a)$

$$\int_0^{\pi} 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{\pi} = 4 - 0 = 4$$

- Konstantu vytkneme před integrál

$$\int -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = -2 \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$), výsledek proto vydělíme koeficientem a:

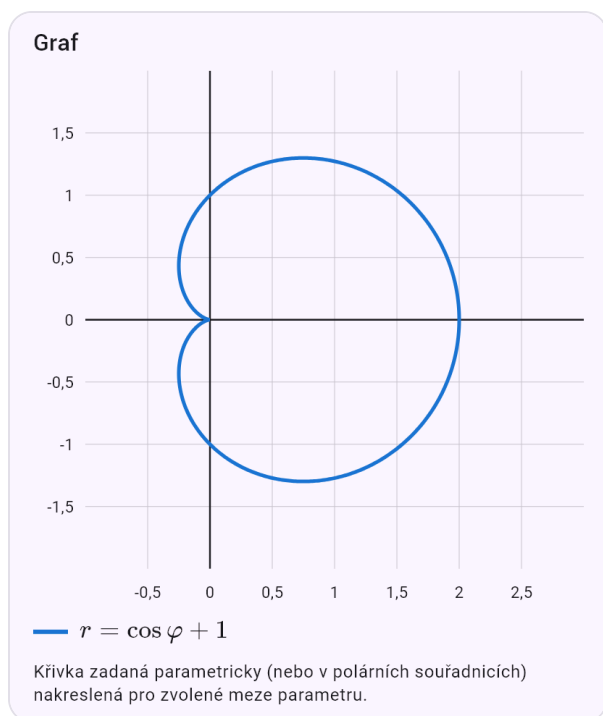
$$\int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

- Newtonova–Leibnizova formule, $F(b) - F(a)$

$$\int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[-4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]_{\pi}^{2\pi} = 0 - (-4) = 4$$

- Hodnoty částí sečteme:

$$\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| d\varphi = 4 + 4 = 8$$



Křivky zadané rovnicí

U rovnice s x a y ($x^3 + y^3 = 3xy$) nabídne čip „Integrovat“ plochu, délku, objem a plášť. Bez mezí počítá s celou uzavřenou křivkou: kružnici a elipsu zapíše parametricky přes $\cos$ a $\sin$, smyčku procházející počátkem (Descartův list) pomocí přímek $y = tx$ – plochu smyčky pak spočítá přesně z výsečí, délku, objem a plášť numericky. S mezemi v x použije horní větev $y = f(x)$.

Jak zadat

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Uzavřená křivka – čip „Integrovat“ bez mezí.

$$y^2 = x^3$$

Neuzavřená křivka – čip „Integrovat“ s mezemi v x (horní větev $y = x^{3/2}$).

Ukázky

Plocha smyčky Descartova listu – přes přímky $y = tx$ a výseče, $S = 3/2$.

Zadání: $x^3 + y^3 = 3xy$

[Integrovat → Plocha](#)

Výsledek

$$S = \frac{3}{2}$$

Postup

- Smyčku procházející počátkem zapíšeme parametricky pomocí přímek $y = tx$ – dosadíme do rovnice a vyjádříme x

$$y = tx \Rightarrow x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}, \quad t \in \langle 0; \infty \rangle$$

- Obsah smyčky sečteme z výsečí od počátku: $S = \frac{1}{2} \int (x \cdot y' - y \cdot x') dt$, a na přímce $y = tx$ je $x \cdot y' - y \cdot x' = x^2$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt$$

- Konstantu vytkneme před integrál

$$\int \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \frac{9}{2} \int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt$$

- Substituce $u = t^3 + 1$, $du = 3t^2 dt$:

$$\int \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt = \int \frac{1}{3u^2} du$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

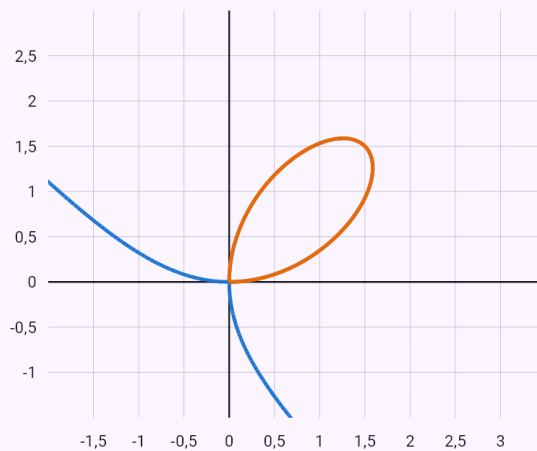
$$\int \frac{1}{3u^2} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2} du$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}$
- Vrátíme se k původní proměnné: $-\frac{1}{3u} = -\frac{1}{3(t^3 + 1)}$

- Nevlastní integrál – v nekonečné mezi a v bodě, kde funkce není omezená, bereme limitu primitivní funkce. Limity jsou konečné, integrál konverguje

$$\int_0^\infty \frac{9t^2}{2(t^3 + 1)^2} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2(t^3 + 1)} \right) - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

Graf



— $x^3 + y^3 = 3xy$

— $x = \frac{3t}{t^3 + 1}, y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$

Celá křivka zadaná rovnicí; zvýrazněná je část, se kterou se počítá.

Známá omezení

- Délku křivky $y = \sqrt[3]{x}$ (a podobných) umíme jen numericky – vede na eliptický integrál, který nemá elementární primitivní funkci.
- U křivek zadaných parametricky a v polárních souřadnicích zatím chybí vybarvená plocha a 3D těleso; rotace jen kolem osy x .
- Rotace kolem osy y jen pro oblast na jedné straně osy.
- U implicitních křivek bez mezí umíme jen kružnici, elipsu a smyčku procházející počátkem; rotace jen kolem osy x .

Nekonečné řady

U číselné řady aplikace nejdřív ověří nutnou podmínku konvergence a pak zvolí jedno kritérium podle tvaru řady – geometrická řada, $\sum 1/n^p$, podílové, odmocninové, limitní srovnávací, integrální nebo Leibnizovo kritérium; u řady se střídavými znaménky rozliší absolutní a neabsolutní konvergenci. Kde to jde, řadu sečte. V grafu jsou členy a částečné součty.

Číselné řady

Součet aplikace najde u geometrické a teleskopické řady, u řad $\sum P(n)q^n$ a u známých řad ($\sum 1/n^2 = \pi^2/6$); jinak ho spočítá numericky. Konečný součet sečte jako ve škole – teleskopický, aritmetický, geometrický, jinak člen po členu. Vyřeší i rovnici se součtem geometrické řady a ověří podmínku konvergence $|q| < 1$.

Jak zadat

<code>suma(1/n^2)</code>	Obecný člen; index n od 1 (i sum, řada).
<code>suma(1/n^2, n, 1, oo)</code>	S indexem a počátečním členem.
<code>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}</code>	Z fotky nebo v zápisu LaTeX.
<code>1/n^2</code>	Obecný člen s čípkem „Řada“ – počáteční index vyplníte do pole.
<code>suma(2k+1, k, 1, 100)</code>	Konečný součet – s indexem, dolní a horní mezí.

Ukázky

Řada $\sum 1/n^2$ – konverguje, součet $\pi^2/6$.

Zadání: `sum(1/n^2)`

Výsledek

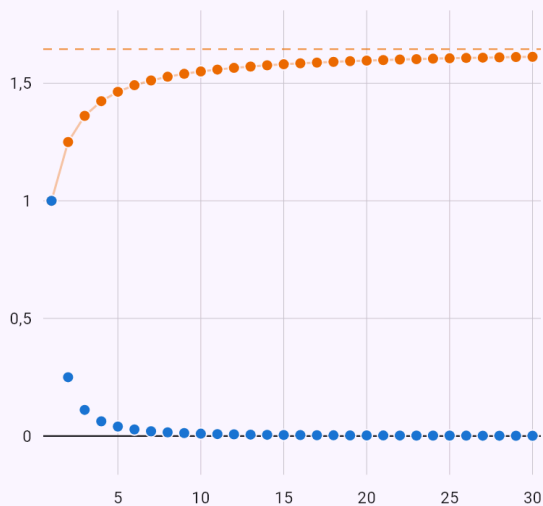
Řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$$

Postup

- Nutná podmínka konvergence je splněna (sama o konvergenci nerozhoduje): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je typu $\sum 1/n^p$ s $p = 2 > 1$ – konverguje.
- Součet známé řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Graf



Body jsou členy řady a_n a částečné součty $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Konverguje-li řada, členy se blíží k nule a částečné součty k jejímu součtu.

Leibnizovo kritérium – konverguje neabsolutně.

Zadání: `sum((-1)^(n+1)/n)`

Výsledek

Řada konverguje, ale ne absolutně.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0,6931$$

Postup

- Nutná podmínka konvergence je splněna (sama o konvergenci nerozhoduje): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$
- Řada má členy různých znamének – nejdřív vyšetříme absolutní konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

- Harmonická řada diverguje – členy seskupíme po mocninách dvou, každá skupina je aspoň $1/2$

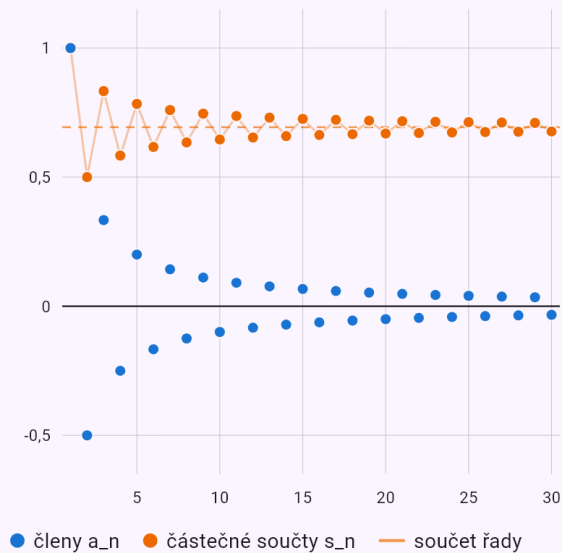
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots > 1 + \frac{1}{2}$$

- Leibnizovo kritérium: $|a_n| = \frac{1}{n}$ klesá a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ – řada konverguje.

- Závěr: řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, ale ne absolutně (podle Leibnizova kritéria).

• Součet známé řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Graf



Body jsou členy řady a_n a částečné součty $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Konverguje-li řada, členy se blíží k nule a částečné součty k jejímu součtu.

Podílové kritérium a součet.

Zadání: `sum(n/2^n)`

Výsledek

Řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Postup

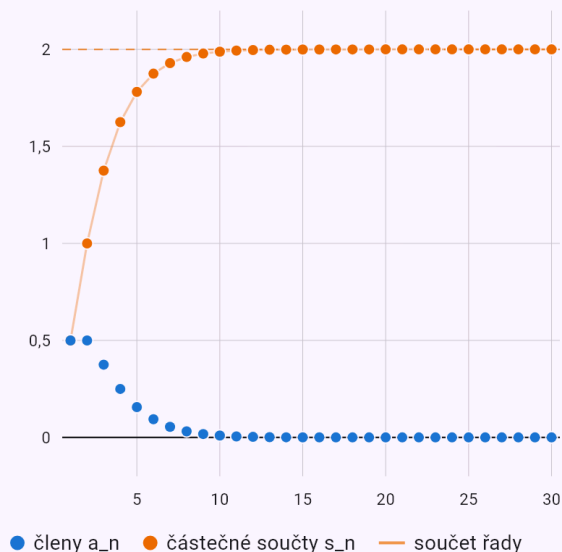
- Nutná podmínka konvergence je splněna (sama o konvergenci nerozhoduje): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$
- Podílové (d'Alembertovo) kritérium – řada konverguje.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

- Řadu typu $\sum P(n) \cdot q^n$ sečteme derivováním geometrické

$$\text{řady: } \sum_{n=0}^{\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad s = 2$$

Graf



Body jsou členy řady a_n a částečné součty $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Konverguje-li řada, členy se blíží k nule a částečné součty k jejímu součtu.

Není splněna nutná podmínka – řada diverguje.

Zadání: `sum(n/(n+1))`

Výsledek

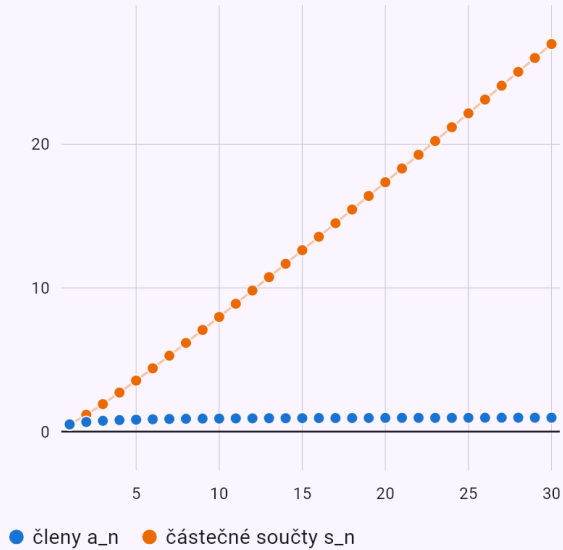
Řada diverguje.

Postup

- Nutná podmínka konvergence není splněna:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

Graf



Body jsou členy řady a_n a částečné součty $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Konverguje-li řada, členy se blíží k nule a částečné součty k jejímu součtu.

Teleskopický součet – zbude první a poslední člen.

Zadání: `sum(sqrt(2i+1) - sqrt(2i-1), i, 1, 60)`

Výsledek

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 10$$

Postup

- Teleskopický součet – sousední členy se navzájem odečtou, zbude jen první a poslední:

$$\sum_{i=1}^{60} (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) = 11 - 1 = 10$$

Rovnice se součtem geometrické řady.

Zadání: $\text{sum}((2^x)^n, n, 1, \infty) = 1$

Výsledek

$$x = -1$$

Postup

- Řada je geometrická s kvocientem $q = 2^x$ a konverguje pro $|2^x| < 1$; její součet: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}$
- Vyřešíme: $\frac{2^x}{1-2^x} = 1 \Rightarrow x = -1$
- $x = -1$ splňuje podmínku konvergence: $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

Mocninné řady

U mocninné řady aplikace najde poloměr konvergence podílovým kritériem, krajní body vyšetří jako číselné řady a uvede obor konvergence; kde to jde, i součet. Graf ukáže částečné součty s posuvníkem počtu členů.

Ukázky

Obor konvergence $\langle -1; 1 \rangle$.

Zadání: `sum(x^n/n)`

Výsledek

$$x \in \langle -1; 1 \rangle$$

Postup

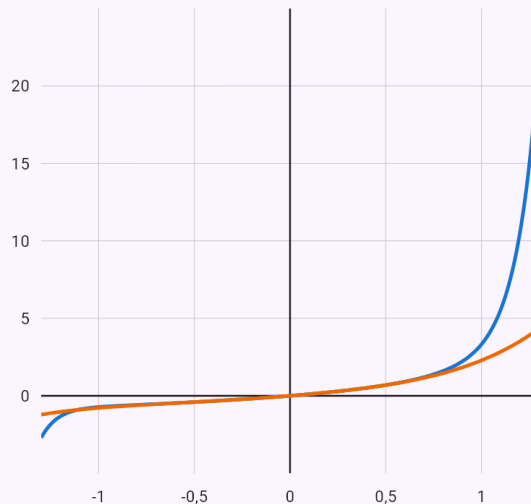
- Poloměr konvergence $R = 1$ podílovým kritériem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| < 1$$

- Krajní bod $x = -1$: řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje, ale ne absolutně (podle Leibnizova kritéria).
- Krajní bod $x = 1$: řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle seskupení členů harmonické řady.
- Obor konvergence: $x \in \langle -1; 1 \rangle$

Graf

Členů: 5



$$\begin{aligned} \text{— } s_{15}(x) &= \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{10} \\ \text{— } s_5(x) &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \end{aligned}$$

Posuvníkem zvolíš počet sčítaných členů – částečné součty se k součtu řady blíží jen uvnitř oboru konvergence.

Taylorova řada

Taylorovu řadu funkce aplikace odvodí ze známých rozvojų (e^x , $\sin x$, $\ln(1+x)$, ...) dosazením a určí její obor konvergence.

Jak zadat

`taylor(e^x, 0, oo)`

Funkce, bod a oo místo stupně; nebo čip „Taylorův polynom“ → „Řada“.

Ukázky

Řada $\ln(1 + x)$ a její obor konvergence.

Zadání: `taylor(ln(1 + x), 0, oo)`

Výsledek

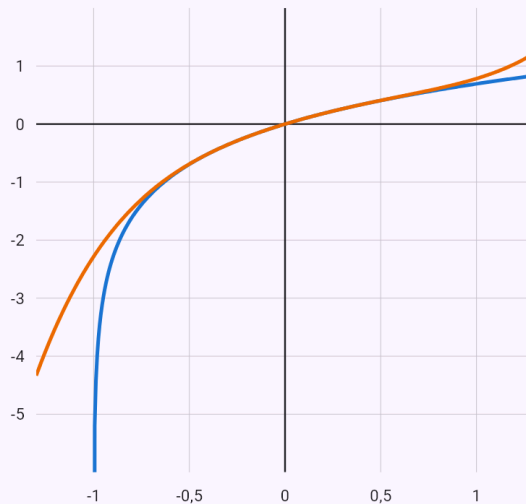
$$\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-$$

Postup

- Ze známého rozvoje $\ln(1 + u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$ dosazením $u = x$: $\ln(x + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
- Poloměr konvergence $R = 1$ podílovým kritériem
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{xn}{n+1} \right| = |x| < 1$$
- Krajní bod $x = -1$: řada $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverguje podle seskupení členů harmonické řady.
- Krajní bod $x = 1$: řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, ale ne absolutně (podle Leibnizova kritéria).
- Obor konvergence: $x \in (-1; 1)$

Graf

Členů: 5



$$s(x) = \ln(x + 1)$$

$$s_5(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

Posuvníkem zvolíš počet sčítaných členů – částečné součty se k součtu řady blíží jen uvnitř oboru konvergence.

Fourierovy řady

Aplikace sestaví Fourierovu řadu funkce na intervalu jako jedné periodě (bez zadání na $\langle -\pi; \pi \rangle$), nebo sinovou či kosinovou řadu funkce na $\langle 0; L \rangle$. Funkci lze zadat i po částech.

Koeficienty počítá integrály s celým postupem (per partes s parametrem n), dosadí $\sin n\pi = 0$ a $\cos n\pi = (-1)^n$, u sudé a liché funkce využije symetrii. V bodech nespojitosti určí součet řady podle Dirichletovy věty a dosazením bodu a Parsevalovou rovností z řady odvodí součty číselných řad (třeba $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$). Graf ukáže periodické rozšíření funkce a částečné součty s posuvníkem.

Jak zadat

<code>fourier(x^2, -pi, pi)</code>	Funkce a interval.
<code>fouriersin(x, 0, pi)</code>	Sinová řada (fouriercos – kosinová).
<code>-1, -pi < x < 0</code> <code>1, 0 < x < pi</code>	Funkce po částech po řádcích, s čipem „Fourierova řada“.
<code>x^2</code>	Funkce s čipem „Fourierova řada“ – druh řady a interval vyberete tam.

Ukázky

Sudá funkce – jen kosiny; součty $\Sigma 1/n^2$ a $\Sigma 1/n^4$.

Zadání: `fourier(x^2)`

Výsledek

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad ;$$

Postup

- Interval $\langle -\pi; \pi \rangle$ bereme jako jednu periodu: $T = 2\pi$, polovina periody $l = \pi$. Hledáme řadu s koeficienty

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Funkce je sudá, $f(-x) = x^2 = f(x)$, takže koeficienty u sinů jsou nulové a zbylé stačí počítat přes polovinu intervalu

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

- Koeficient a_0 : $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$
- Dosadíme meze: $a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$
- Koeficient a_n : $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$
- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x^2$, $v' = \cos(nx)$, tedy $u' = 2x$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$
$$\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx$$
- Konstantu vytkneme před integrál:
$$\int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int x \sin(nx) dx$$
- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x$, $v' = \sin(nx)$, tedy $u' = 1$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$
$$\int x \sin(nx) dx = -\frac{x \cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n} dx$$
- Konstantu vytkneme před integrál:
$$\int -\frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{1}{n} \int \cos(nx) dx$$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$),

výsledek proto vydělíme koeficientem a:

$$\int \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n}$$

• Pro celé n platí $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

• Dosadíme meze

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_0^\pi = \frac{4}{n^3}$$

• Dosadíme koeficienty do řady

$$s(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

• Periodické rozšíření funkce je spojité, takže podle Dirichletovy věty je součet řady roven $f(x)$ pro $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$

• Dosazením $x = 0$ dostaneme součet číselné řady

$$s(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

• Dosazením $x = \pi$ dostaneme součet číselné řady

$$s(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

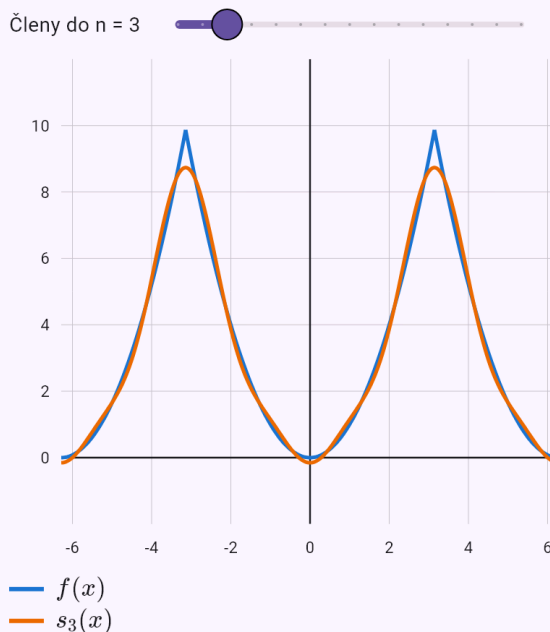
• Z Parsevalovy rovnosti dostaneme

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Graf

Členy do $n = 3$



Funkce je rozšířená periodicky. Posuvníkem přidáváš členy řady – částečné součty se k funkci blíží; u skoku překmitávají (Gibbsův jev) a procházejí průměrem obou stran, vyznačeným bodem.

Funkce po částech – skoky a Gibbsův jev.

Zadání: $-1, -\pi < x < 0$

Výsledek

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

Postup

- Interval $(-\pi; \pi)$ bereme jako jednu periodu: $T = 2\pi$, polovina periody $l = \pi$. Hledáme řadu s koeficienty

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Funkce je lichá, $f(-x) = -f(x)$, takže absolutní člen i koeficienty u kosinů jsou nulové a koeficienty u sinů stačí počítat přes polovinu intervalu

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Koeficient b_n : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$

- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární $(ax + b)$, výsledek proto vydělíme koeficientem a:

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

- Pro celé n platí $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

- Dosadíme meze

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi}$$

- Dosadíme koeficienty do řady:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi} \sin(nx)$$

- Členy se sudým n jsou nulové, sčítáme jen lichá $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

- Podle Dirichletovy věty je součet řady roven $f(x)$ pro $x \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$; v bodě nespojitosti je průměrem jednostranných limit

$$s(-\pi) = s(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

$$s(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

- Dosažením $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme součet číselné řady

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Z Parsevalovy rovnosti dostaneme

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Graf

Členy do $n = 5$ 

— $f(x)$
— $s_5(x)$

Funkce je rozšířená periodicky. Posuvníkem přidáváš členy řady – částečné součty se k funkci blíží; u skoku překmitávají (Gibbsův jev) a procházejí průměrem obou stran, vyznačeným bodem.

Sinová řada a součet $1 - 1/3^3 + 1/5^3 - \dots = \pi^3/32$.

Zadání: `fouriersin(x*(pi - x), 0, pi)`

Výsledek

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

Postup

- Funkci z intervalu $(0; \pi)$ rozšíříme lichě a pak periodicky ($T = 2\pi$) – vznikne sinová řada $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, kde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

- Koeficient b_n : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx$
- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = x(\pi - x)$, $v' = \sin(nx)$, tedy $u' = \pi - 2x$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$
$$\int x(\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{x(x - \pi) \cos(nx)}{n} - \int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx$$

- Konstantu vytkneme před integrál

$$\int \frac{(2x - \pi) \cos(nx)}{n} dx = \frac{1}{n} \int (2x - \pi) \cos(nx) dx$$

- Per partes ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$), $u = 2x - \pi$, $v' = \cos(nx)$, tedy $u' = 2$, $v = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$\int (2x - \pi) \cos(nx) dx = \frac{(2x - \pi) \sin(nx)}{n} - \int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx$$

- Konstantu vytkneme před integrál:
$$\int \frac{2 \sin(nx)}{n} dx = \frac{2}{n} \int \sin(nx) dx$$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$), výsledek proto vydělíme koeficientem a :
$$\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n}$$
- Pro celé n platí $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$
- Dosadíme meze

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \cos(nx)}{n} - \frac{\pi x \cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x) \sin(nx)}{n^2} \right]$$

- Dosadíme koeficienty do řady:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 4(-1)^n}{n^3 \pi} \sin(nx)$$

- Členy se sudým n jsou nulové, sčítáme jen lichá $n = 2k - 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

- Periodické rozšíření funkce je spojité, takže podle Dirichletovy věty je součet řady roven $f(x)$ pro $x \in (0; \pi)$
- Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme součet číselné řady

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

• Z Parsevalovy rovnosti $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

dostaneme

$$\frac{\pi^4}{15} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

Graf

Členy do n = 5



— $f(x)$
— $s_5(x)$

Funkce je rozšířená periodicky. Posuvníkem přidáváš členy řady – částečné součty se k funkci blíží; u skoku přeskmitávají (Gibbsův jev) a procházejí průměrem obou stran, vyznačeným bodem.

Známá omezení

- Neomezenou funkci (třeba $\ln x$ na $\langle 0; 2\pi \rangle$) nerozvineme – řada by v bodě, kde funkce roste nade všechny meze, divergovala.
- Když koeficienty vedou na integrál bez elementární primitivní funkce ($\ln x$ na $\langle 1; 3 \rangle$), jsou vyjádřeny pomocí integrálního sinu a kosinu.

Diferenciální rovnice

Aplikace řeší obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu: separovatelné, lineární, exaktní, homogenní ($y' = f(y/x)$), Bernoulliovy a rovnice $y' = f(ax + by + c)$. Typ pozná sama a postup ukáže tak, jak se počítá ve škole – separace proměnných, variace konstanty nebo integrační faktor, substituce, kmenová funkce exaktní rovnice. Integrály v postupu mají vlastní kroky.

Rovnice vyšších řádů: lineární s konstantními koeficienty libovolného řádu přes charakteristickou rovnici (i násobné a komplexní kořeny), partikulární řešení podle speciální pravé strany (i rezonance a součet pravých stran) nebo variací konstant, počáteční úlohu v nule i Laplaceovou transformací (volba čipem „Metoda“). Dále Eulerovu rovnici substitucí $x = e^t$, rovnici $y^{(n)} = f(x)$ postupnou integrací a snížení řádu – když v rovnici chybí y ($p = y'$) nebo x ($y' = p(y)$).

Rovnici $y' = y \cdot (a(x) \cdot \ln y + b(x))$ převede substitucí $z = \ln y$ na lineární. Lineární rovnici 2. řádu s nekonstantními koeficienty vyřeší, když jedno řešení uhodne ($x^k, e^{cx}, \dots$): druhé najde snížením řádu (d'Alembert), pravou stranu variací konstant. Řád sníží i o víc než jedna ($p = y^{(m)}$ s rovnicí 2. řádu pro p). U rovnice s parametry rozliší případy – tlumený oscilátor podle znaménka $\delta^2 - \omega^2$ (nadkritické, kritické a podkritické tlumení), rezonanci ($y'' + \omega^2 y = \cos 2t$ pro $\omega = 2$) a znaménko konstanty, na kterém závisí integrál ($y'' = 2yy'$). Laplaceovou transformací řeší i počáteční úlohu v jiném bodě než 0 (posunutím $\tau = t - t_0$) a s parametry.

Výsledkem je obecné řešení s konstantou C , u vyšších řádů s konstantami $C_1, C_2, \dots$ (explicitně, a kde to nejde, implicitně), s podmínkami řešení, které je splňuje – počáteční i okrajové, včetně případů „žádné řešení“ a „nekonečně mnoho řešení“. Konstantní řešení ztracená dělením aplikace dohledá. Každé řešení ověří dosazením do rovnice. Graf u 1. řádu ukáže směrové pole a řešení pro různá C , u vyšších řádů řešení pro různé konstanty; u autonomní rovnice 2. řádu (bez x) přepínač ukáže i fázovou rovinu (y, y').

Jak zadat

$y' = x \cdot y$	Derivace čárkou.
$dy/dx = x \cdot y^2$	Leibnizův zápis – určí i proměnnou ($dm/dt, dT/dt$).
$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$	Zápis z fotky.
$(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$	Tvar $M dx + N dy = 0$ (exaktní rovnice).
$y' = y^2 + 1, y(0) = 1$	Počáteční podmínka za čárkou nebo na dalším řádku.
$dm/dt = m + 2, m(0) = 0$	Funkce a proměnná mohou mít libovolná písmena.

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{(2x)}$$

Rovnice vyššího řádu – derivace více čárkami.

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Vyšší derivace zápisem $y^{(4)}$ (i z fotky).

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Počáteční podmínky $y(0)$, $y'(0)$ – nebo okrajové v různých bodech.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Newtonovy tečky (derivace podle času t) a řecké parametry.

Ukázky

Separovatelná rovnice – obecné řešení a směrové pole.

Zadání: $y' = x \cdot y$

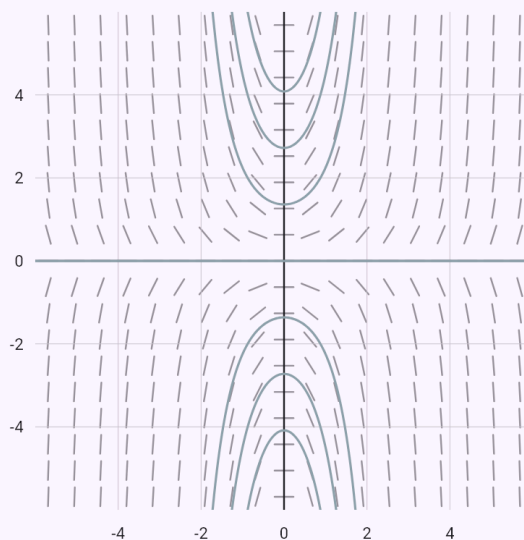
Výsledek

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Rovnice se separovatelnými proměnnými – pravá strana je součin funkce nezávislé proměnné a funkce neznámé:
 $y' = xy$
- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $y \neq 0$):
 $\frac{dy}{y} = x dx$
- Integrujeme obě strany: $\int \frac{dy}{y} = \int x dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$
- Odlogaritmuje – konstantu $\pm e^C$ označíme opět C :
 $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
- Konstantní řešení $y = 0$, které jsme dělením vyloučili, je v obecném řešení obsažené pro $C = 0$
- Zkouška – derivace řešení $y' = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ dosazená do rovnice dává rovnost.

Graf



— řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Počáteční podmínka určí konstantu C.

Zadání: $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$

Výsledek

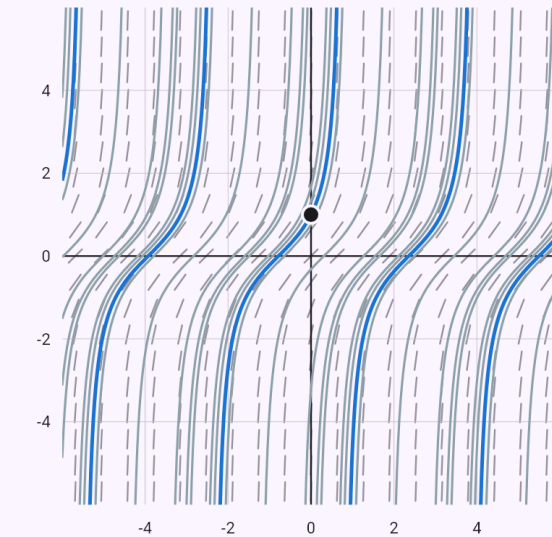
$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Postup

- Rovnice se separovatelnými proměnnými – pravá strana je součin funkce nezávislé proměnné a funkce neznámé:
 $y' = y^2 + 1$
- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $y^2 + 1 \neq 0$): $\frac{dy}{y^2 + 1} = dx$
- Integrujeme obě strany: $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx$
- Podle tabulky základních integrálů:
 $\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \operatorname{arctg} y$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 1 dx = x$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $\operatorname{arctg} y = x + C$
- Vyjádříme řešení: $y = \operatorname{tg}(x + C)$
- Dosadíme počáteční podmínku $y(0) = 1$:
 $1 = \operatorname{tg} C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):
 $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ dosazená do rovnice dává rovnost.

Graf



— řešení pro různá C

— $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají. Zvýrazněné je řešení s počáteční podmínkou, bod je počáteční podmínka.

Lineární rovnice variací konstanty.

Zadání: $y' + 2y = e^x$

Variace konstanty

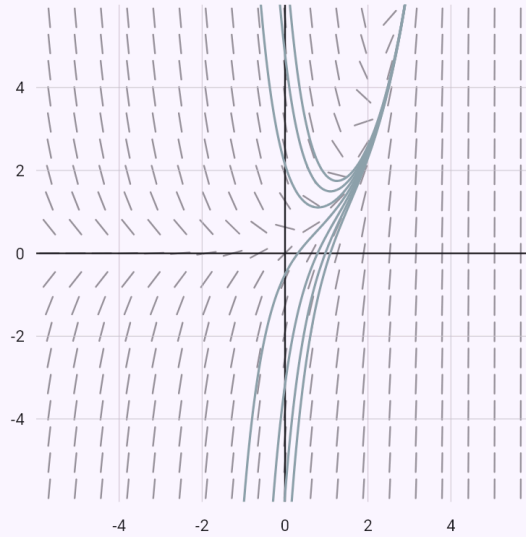
Výsledek

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineární rovnice 1. řádu tvaru $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:
 $y' + 2y = e^x$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y' + 2y = 0$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 2 dx = 2x$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = Ce^{-2x}$
- Variace konstanty – řešení hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-2x}$; dosazením do rovnice dostaneme $C'(x)e^{-2x} = e^x$
- Odtud $C'(x) = e^{3x}$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$), výsledek proto vydělíme koeficientem a: $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Zintegrujeme: $C(x) = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Obecné řešení: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ dosazená do rovnice dává rovnost.

Graf



— řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Táž rovnice integračním faktorem.

Zadání: $y' + 2y = e^x$

Integrační faktor

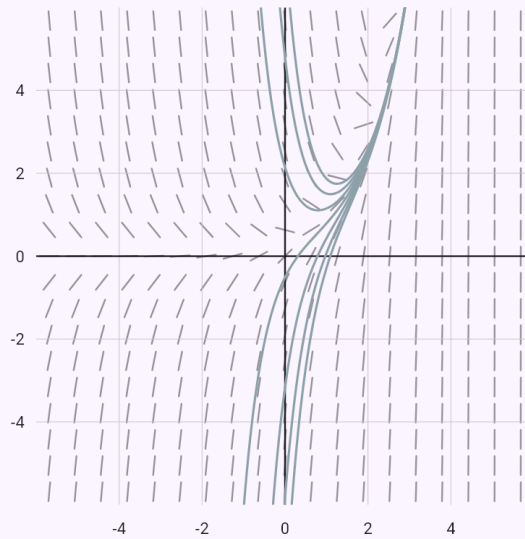
Výsledek

$$y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineární rovnice 1. řádu tvaru $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:
 $y' + 2y = e^x$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 2 dx = 2x$
- Integrační faktor: $\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$
- Rovnici vynásobíme integračním faktorem – levá strana je pak derivace součinu: $(ye^{2x})' = e^{3x}$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární $(ax + b)$,
výsledek proto vydělíme koeficientem a: $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$
- Zintegrujeme obě strany: $ye^{2x} = \frac{e^{3x}}{3} + C$
- Obecné řešení: $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{e^x}{3} - 2Ce^{-2x}$ dosazená do rovnice dává rovnost.

Graf



— řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úseček dotýkají.

Homogenní rovnice – substituce $u = y/x$.

Zadání: $y' = (x - y)/(x + y)$

Výsledek

$$x^2 - 2xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

- Homogenní rovnice – pravá strana závisí jen na podílu y/x :

$$x: y' = \frac{x - y}{x + y}$$

- Substituce $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $y' = u + xu'$ převede rovnici na $xu' = -u - 1 + \frac{2}{u+1}$

- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu

$$u^2 + 2u - 1 \neq 0): \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{x} dx$$

- Integrujeme obě strany: $\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = \int -\frac{1}{x} dx$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int -\frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du$$

- V čitateli je derivace jmenovatele (případně její násobek), $f(x) = -u^2 - 2u + 1$, podle vzorce

$$\int \frac{f'(u)}{f(u)} du = \ln |f(u)| + C$$

$$\int \frac{u+1}{-u^2-2u+1} du = -\frac{1}{2} \int \frac{-2u-2}{-u^2-2u+1} du = -\frac{1}{2} \ln$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int -\frac{1}{x} dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

- Obecné řešení v implicitním tvaru:

$$\frac{\ln |-u^2-2u+1|}{2} = C - \ln |x|$$

- Odlogaritmujeme – konstantu $\pm e^C$ označíme opět C :

$$-u^2 - 2u + 1 = \frac{C}{x^2}$$

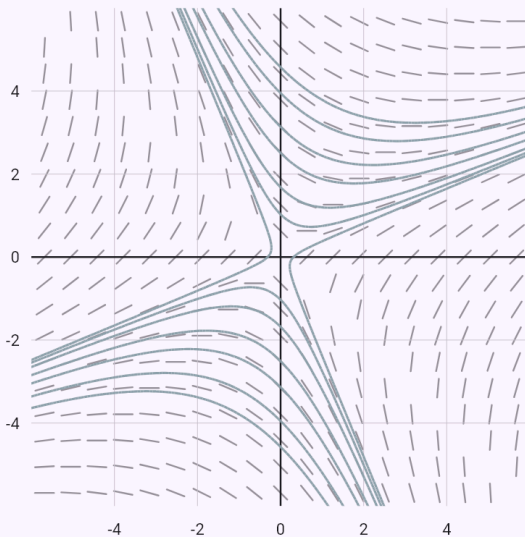
- Konstantní řešení $u = -1 - \sqrt{2}$, které jsme dělením vyloučili, je v obecném řešení obsažené pro $C = 0$

- Konstantní řešení $u = -1 + \sqrt{2}$, které jsme dělením vyloučili, je v obecném řešení obsažené pro $C = 0$

- Vrátíme se k původní neznámé: $\frac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2} = \frac{C}{x^2}$

- Obecné řešení v implicitním tvaru: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

Graf



— řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úsečkami dotýkají.

Bernoulliho rovnice – substituce $z = y^{1-n}$ a konstantní řešení $y = 0$.

Zadání: $xy' - y = -xy^2$

Výsledek

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = 0$$

Postup

- Bernoulliho rovnice tvaru $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$:

$$y' - \frac{y}{x} = -y^2$$

- Substituce $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{1}{y^2} y'$ převede rovnici na

$$z' + \frac{z}{x} = 1$$

- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $z' + \frac{z}{x} = 0$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

- Řešení homogenní rovnice: $z_h = \frac{C}{x}$

- Variace konstanty – řešení hledáme ve tvaru

$$z = C(x) \cdot \frac{1}{x}; \text{ dosazením do rovnice dostaneme}$$

$$C'(x) \cdot \frac{1}{x} = 1$$

- Odtud $C'(x) = x$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$

- Zintegrujeme: $C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

- Obecné řešení: $z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

- Vrátíme se k původní neznámé: $\frac{1}{y} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

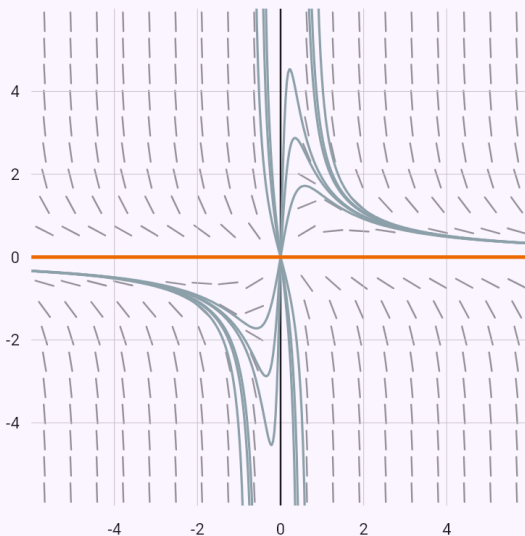
- Vyjádříme řešení: $y = \frac{2x}{x^2 + 2C}$

- Dělením jsme vyloučili konstantní řešení $y = 0$ – to je další řešení rovnice.

- Konstantu přeznačíme (násobek libovolné konstanty je opět libovolná konstanta): $y = \frac{2x}{x^2 + C}$

- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{2C - 2x^2}{x^4 + 2Cx^2 + C^2}$ dosazená do rovnice dává rovnost.

Graf



— řešení pro různá C

— $y = 0$

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úsečky dotýkají.

Exaktní rovnice – kmenová funkce $F(x, y) = C$.

Zadání: $(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$

Výsledek

$$y^4 + x^2y + 3x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Postup

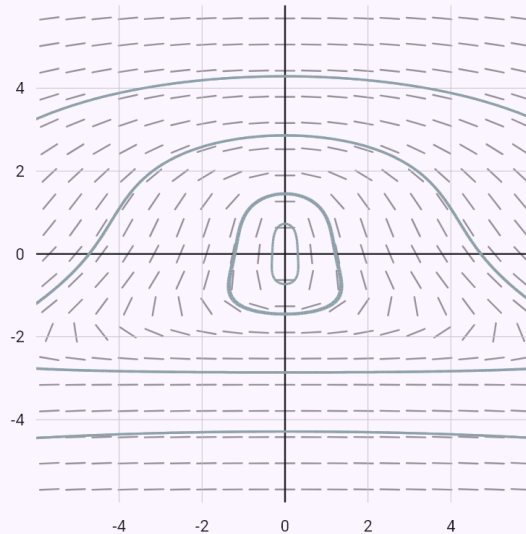
- Rovnice tvaru $M dx + N dy = 0$ – ověříme, zda je exaktní (levá strana je totální diferenciál):
 $(2xy + 6x)dx + (4y^3 + x^2)dy = 0$
- $M = 2xy + 6x, N = 4y^3 + x^2$; rovnice je exaktní, protože
 $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$
- Integrál součtu je součet integrálů:
 $\int (6x + 2yx) dx = \int 6x dx + \int 2yx dx$
- Konstantu vytkneme před integrál: $\int 6x dx = 6 \int x dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Konstantu vytkneme před integrál:
 $\int 2yx dx = 2y \int x dx$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$
- Kmenovou funkci F najdeme integrací M podle x :
 $F(x, y) = \int (2xy + 6x) dx = x^2y + 3x^2 + \varphi(y)$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int 4y^3 dy = 4 \int y^3 dy$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$
- Z podmínky $\partial F / \partial y = N$: $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $y^4 + x^2y + 3x^2 = C$

Graf



— řešení pro různá C

Krátké úsečky ukazují v každém bodě směr, který rovnice předepisuje (směrové pole). Šedé křivky jsou řešení pro různá C – všude se úsečky dotýkají.

Substituce $z = x - y$; Symja by tu ztratila dvojku, aplikace výsledek ověř.

Zadání: $y' = \cos(x - y)$, $y(0) = \pi/2$

Výsledek

$$y = x + 2 \operatorname{arccotg}(x + 1)$$

Postup

- Pravá strana je funkcí výrazu $ax + by + c$ – zavedeme ho jako novou neznámou: $y' = \cos(x - y)$

- Substituce $z = x - y$, $z' = 1 - y'$ převede rovnici na $z' = 1 - \cos z$

- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $1 - \cos z \neq 0$): $\frac{dz}{1 - \cos z} = dx$

- Integrujeme obě strany: $\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx$

- Žádná jednodušší substituce nesedí – univerzální substituce $t = \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right)$

$$\sin z = \frac{2t}{1+t^2}, \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dz = \frac{2dt}{1+t^2}$$
$$\int \frac{1}{1 - \cos z} dz = \int \frac{1}{t^2} dt$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}$

- Vrátime se k původní proměnné

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) : -\operatorname{cotg}\left(\frac{z}{2}\right)$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int 1 dx = x$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $-\operatorname{cotg}\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$
- Vyjádříme řešení: $z = 2 \operatorname{arccotg}(C - x)$
- Dělením jsme vyloučili konstantní řešení $z = 0$ – to je další řešení rovnice.
- Vrátime se k původní neznámé:
 $y = x - 2 \operatorname{arccotg}(C - x)$
- Konstantu přeznačíme (násobek libovolné konstanty je opět libovolná konstanta): $y = x + 2 \operatorname{arccotg}(x + C)$
- Dosadíme počáteční podmínku $y(0) = \frac{\pi}{2}$:
 $\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arccotg} C \Rightarrow C = 1$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):
 $y = x + 2 \operatorname{arccotg}(x + 1)$
- Zkouška – derivace řešení $y' = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2}$ dosazená do rovnice dává rovnost.

Charakteristická rovnice s komplexními kořeny $-2 \pm 3i$.

Zadání: $y'' + 4y' + 13y = 0$

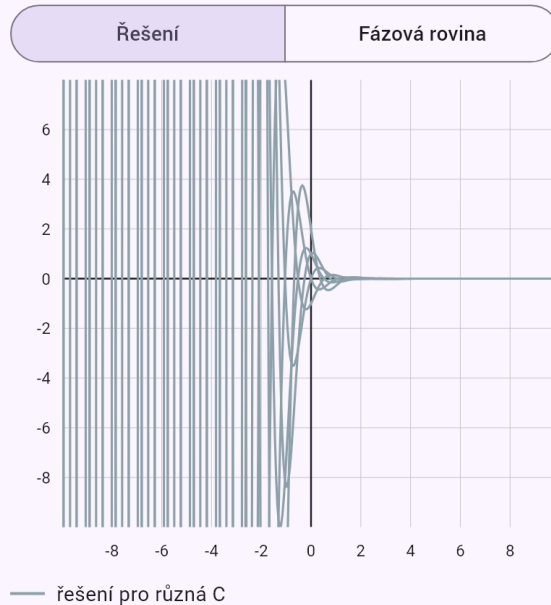
Výsledek

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)),$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty:
 $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$; po dosazení a vydělení $e^{\lambda x}$ dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$
- Diskriminant $D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36$; kořeny:
 $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$
- Každý kořen λ dává řešení $e^{\lambda x}$, k-násobný ještě $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ a dvojice $\alpha \pm \beta i$ řešení $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ a $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Fundamentální systém:
 $y_1 = e^{-2x} \cos(3x)$, $y_2 = e^{-2x} \sin(3x)$
- Obecné řešení: $y = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

Graf



Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Speciální pravá strana při rezonanci – 2 je kořenem charakteristické rovnice.

Zadání: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

Speciální pravá strana

Výsledek

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

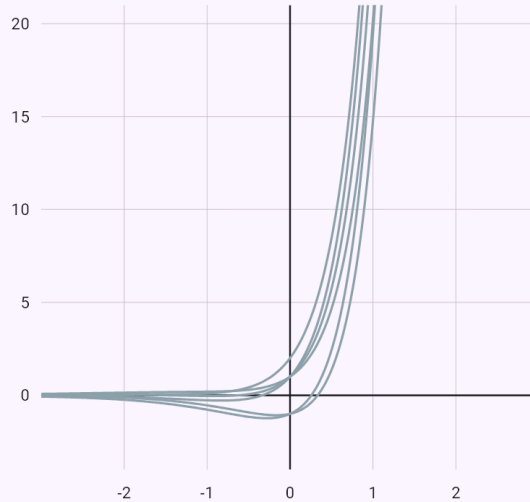
Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty:
 $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' - 3y' + 2y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$; po dosazení a vydělení $e^{\lambda x}$ dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; kořeny:
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
- Každý kořen λ dává řešení $e^{\lambda x}$, k-násobný ještě $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ a dvojice $\alpha \pm \beta i$ řešení $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ a $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Fundamentální systém:
 $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
- Pravá strana $3e^{2x}$ má speciální tvar; číslo 2 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme x : $y_p = A x e^{2x}$
- Derivace: $y_p' = 2A x e^{2x} + A e^{2x}, y_p'' = 4A x e^{2x} + 4A e^{2x}$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy: $A = 3$

• Partikulární řešení: $y_p = 3xe^{2x}$

• Obecné řešení: $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$

Graf



— řešení pro různá C

Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Pravá strana tg x není speciální – variace konstant a wronskián.

Zadání: $y'' + y = \tan x$

Výsledek

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln |\sec x|$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty:
 $y'' + y = \tan x$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' + y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$; po dosazení a vydělení $e^{\lambda x}$ dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 + 1 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Každý kořen λ dává řešení $e^{\lambda x}$, k -násobný ještě $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ a dvojice $\alpha \pm \beta i$ řešení $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ a $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Fundamentální systém:
 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Variace konstant – řešení hledáme ve tvaru
 $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, derivace funkcí C_k splňují soustavu
$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x \end{cases}$$
- Determinant soustavy (wronskián)

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

- Odtud $C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\sin x \cdot \tan x$
- Odtud $C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \sin x$
- Konstantu vytkneme před integrál
$$\int -\sin x \cdot \tan x \, dx = - \int \sin x \cdot \tan x \, dx$$
- Funkce je lichá vůči kosinu – substituce $t = \sin x$
 $dt = \cos x \, dx$
$$\int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt$$
- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky
$$\int \frac{t^2}{(1-t)(t+1)} \, dt = \int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) \, dt$$
- Integrál součtu je součet integrálů
$$\int \left(-1 - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} \right) \, dt = \int -1 \, dt + \int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt + \int \frac{1}{2(t+1)} \, dt$$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int -1 \, dt = -t$
- Konstantu vytkneme před integrál:
$$\int -\frac{1}{2(t-1)} \, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} \, dt$$

- Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{t-1} dt = \ln |t-1|$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int \frac{1}{2(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt$$

- Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1|$$

- Vrátime se k původní proměnné

$$t = \sin x : \quad \frac{\ln |\sin x + 1|}{2} - \frac{\ln |\sin x - 1|}{2} - \sin x = \ln$$

- Zintegrujeme (integrační konstanty už obsahuje řešení homogenní rovnice)

$$C_1(x) = \int -\sin x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \sin x \, dx = -\cos x$

- Zintegrujeme (integrační konstanty už obsahuje řešení homogenní rovnice): $C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$

- Partikulární řešení: $y_p = -\cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right|$

- Obecné řešení

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \right|$$

Počáteční úloha – soustava pro konstanty C_1, C_2 .

Zadání: $y'' - 4y' + 3y = e^{(2x)}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Výsledek

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

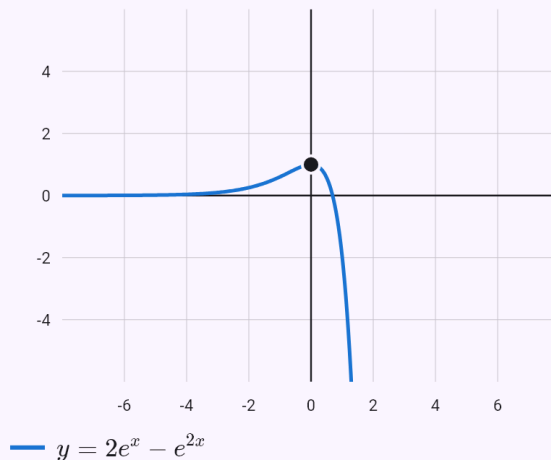
Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty:
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' - 4y' + 3y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{(\lambda x)}$; po dosazení a vydělení $e^{(\lambda x)}$ dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$
- Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4$; kořeny:
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$
- Každý kořen λ dává řešení $e^{(\lambda x)}$, k-násobný ještě $x \cdot e^{(\lambda x)}$, ..., $x^{(k-1)} \cdot e^{(\lambda x)}$ a dvojice $\alpha \pm \beta i$ řešení $e^{(\alpha x)} \cdot \cos \beta x$ a $e^{(\alpha x)} \cdot \sin \beta x$. Fundamentální systém:
 $y_1 = e^x, y_2 = e^{3x}$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
- Pravá strana e^{2x} má speciální tvar; číslo 2 není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $y_p = A e^{2x}$
- Derivace: $y'_p = 2A e^{2x}, y''_p = 4A e^{2x}$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy: $-A = 1$

Zvýrazněné je řešení splňující podmínky, body jsou zadané hodnoty.

- Odtud $A = -1$
- Partikulární řešení: $y_p = -e^{2x}$
- Obecné řešení: $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}$
- Derivace obecného řešení: $y' = C_1 e^x - 2e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Dosazením podmínek dostaneme soustavu odtud
$$\begin{cases} -1 + C_1 + C_2 = 1 \\ -2 + C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$
- Řešení splňující zadané podmínky: $y = 2e^x - e^{2x}$

Graf



Táž úloha Laplaceovou transformací.

Zadání: $y'' - 4y' + 3y = e^{(2x)}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Laplaceova transformace

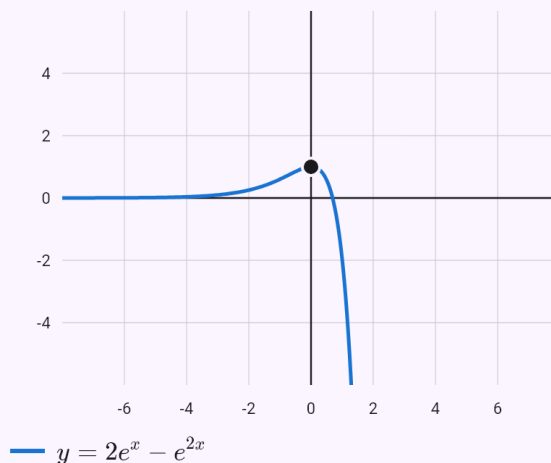
Výsledek

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty:
 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
- Laplaceova transformace obou stran: $\mathcal{L}(y) = Y, \mathcal{L}(y') = sY - y(0), \mathcal{L}(y'') = s^2 Y - s y(0) - y'(0)$; dosadíme počáteční podmínky: $(s^2 Y - s) - 4(sY - 1) + 3Y = \frac{1}{s-2}$
- Vyjádříme obraz Y : $Y = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)}$
- Rozložíme na parciální zlomky: $Y = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$
- Zpětnou transformací (podle slovníku obrazů) dostaneme řešení: $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 2e^x - e^{2x}$

Graf



Zvýrazněné je řešení splňující podmínky, body jsou zadané hodnoty.

Okrajová úloha s nekonečně mnoha řešeními.

Zadání: $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

Výsledek

$$y = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty: $y'' + y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$; po dosazení a vydělení $e^{\lambda x}$ dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 + 1 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm i$
- Každý kořen λ dává řešení $e^{\lambda x}$, k -násobný ještě $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ a dvojice $\alpha \pm \beta i$ řešení $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ a $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Fundamentální systém:
 $y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$
- Obecné řešení: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = 0$
$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$$
- Konstanta C_2 zůstává libovolná – úloha má nekonečně mnoho řešení.
- Řešení splňující zadané podmínky: $y = C_2 \sin x$

Eulerova rovnice – substituce $x = e^t$.

Zadání: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$

Výsledek

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

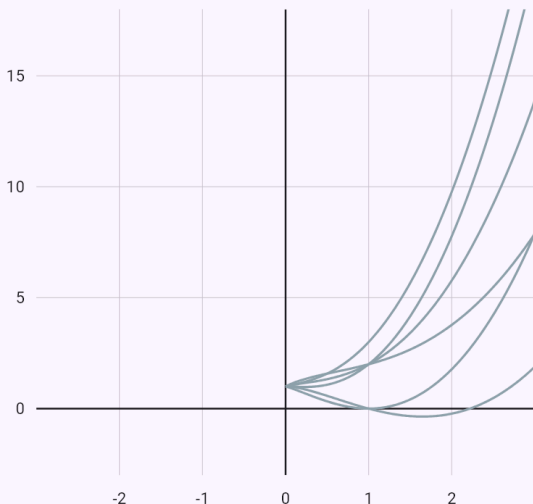
Postup

- Eulerova rovnice – u každé derivace $y^{(k)}$ stojí x^k ; substitucí $x = e^t$ z ní bude rovnice s konstantními koeficienty: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$
- Substituce $x = e^t$, $xy' = \dot{y}$, $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ převede rovnici na $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{2t} + 2$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda t}$; po dosazení a vydělení $e^{\lambda t}$ dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; kořeny: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$
- Každý kořen λ dává řešení $e^{\lambda x}$, k -násobný ještě $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ a dvojice $\alpha \pm \beta i$ řešení $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ a $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Fundamentální systém: $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$
- Řešení homogenní rovnice: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$
- Pravou stranu rozdělíme na části speciálního tvaru – partikulární řešení najdeme pro každou zvlášť a sečteme je: $f_1 = 2$, $f_2 = e^{2t}$
- Pravá strana 2 má speciální tvar; číslo 0 není kořenem

charakteristické rovnice, partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $y_{p_1} = A$

- Derivace: $y'_{p_1} = 0$, $y''_{p_1} = 0$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy: $2A = 2$
- Odtud $A = 1$
- Partikulární řešení: $y_{p_1} = 1$
- Pravá strana e^{2t} má speciální tvar; číslo 2 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme x : $y_{p_2} = Ate^{2t}$
- Derivace: $y'_{p_2} = 2Ate^{2t} + Ae^{2t}$, $y''_{p_2} = 4Ate^{2t} + 4Ae^{2t}$
- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy: $A = 1$
- Partikulární řešení: $y_{p_2} = te^{2t}$
- Partikulární řešení: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = te^{2t} + 1$
- Obecné řešení: $y = y_h + y_p = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$
- Vrátíme se k původní proměnné ($t = \ln x$, pro $x > 0$):
 $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$

Graf



— řešení pro různá C

Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Snížení řádu $y' = p(y)$, konstanty z počátečních podmínek postupně.

Zadání: $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Výsledek

$$y = -\ln(1 - x)$$

Postup

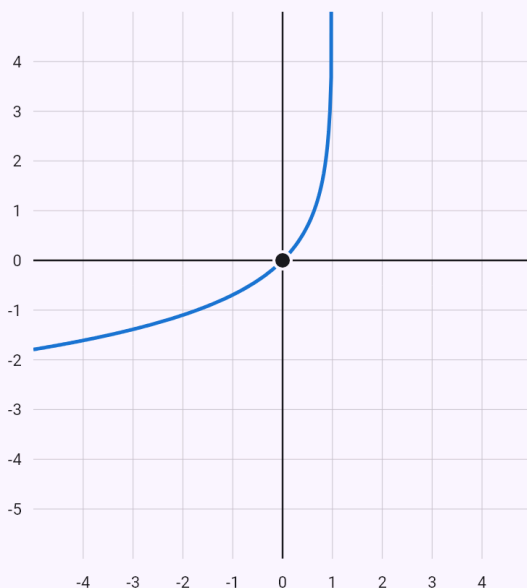
- V rovnici chybí nezávislá proměnná – derivaci y' vezmeme jako funkci y : $y'' = e^{2y}$
- Substituce $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ převede rovnici na $p \frac{dp}{dy} = e^{2y}$; z počátečních podmínek plyne $p(0) = 1$
- Rovnice se separovatelnými proměnnými – pravá strana je součin funkce nezávislé proměnné a funkce neznámé: $\frac{dp}{dy} = \frac{e^{2y}}{p}$
- Separujeme proměnné: $p dp = e^{2y} dy$
- Integrujeme obě strany: $\int p dp = \int e^{2y} dy$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int p dp = \frac{p^2}{2}$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$), výsledek proto vydělíme koeficientem a : $\int e^{2y} dy = \frac{e^{2y}}{2}$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $\frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1$
- Vyjádříme řešení: $p^2 = e^{2y} + C_1$

- Dosadíme počáteční podmínku $p(0) = 1$: $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $p = e^y$
- Vrátíme se k původní neznámé: $y' = e^y$
- Rovnice se separovatelnými proměnnými – pravá strana je součin funkce nezávislé proměnné a funkce neznámé: $y' = e^y$
- Separujeme proměnné (dělíme za předpokladu $e^y \neq 0$): $\frac{dy}{e^y} = dx$
- Integrujeme obě strany: $\int \frac{dy}{e^y} = \int dx$
- Podle tabulky – vnitřní funkce je lineární ($ax + b$), výsledek proto vydělíme koeficientem a : $\int e^{-y} dy = -e^{-y}$
- Podle tabulky základních integrálů: $\int 1 dx = x$
- Obecné řešení v implicitním tvaru: $-e^{-y} = x + C_2$
- Vyjádříme řešení: $y = -\ln(C_2 - x)$
- Dosadíme počáteční podmínku $y(0) = 0$: $0 = -\ln C_2 \Rightarrow C_2 = 1$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení): $y = -\ln(1 - x)$

Graf

Řešení

Fázová rovina



— $y = -\ln(1 - x)$

Zvýrazněné je řešení splňující podmínky, body jsou zadané hodnoty.

Tlumený oscilátor – tři případy podle δ a ω .

Zadání: $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$

Výsledek

$$\delta > \omega : y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

$$\delta = \omega : y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$$

$$\delta < \omega : y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty:

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

- Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$; po dosazení a vydělení $e^{\lambda x}$ dostaneme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

- Pro $\delta > \omega$ tedy

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$$y = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})x}$$

- Pro $\delta = \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta$, tedy $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\delta x}$

- Pro $\delta < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2}i$, tedy

$$y = e^{-\delta x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} x \right) \right)$$

Rezonance – pro $\omega = 2$ má řešení jiný tvar.

Zadání: $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$

Výsledek

$$\omega \neq 2: y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2: y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

Postup

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty:
 $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici (pravá strana nulová): $y'' + \omega^2 y = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda t}$; po dosazení a vydělení $e^{\lambda t}$ dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$
- Každý kořen λ dává řešení $e^{\lambda x}$, k -násobný ještě $x \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ a dvojice $\alpha \pm \beta i$ řešení $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ a $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Fundamentální systém:
 $y_1 = \cos(\omega t)$, $y_2 = \sin(\omega t)$
- Řešení homogenní rovnice:
 $y_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$
- Pravá strana $\cos(2t)$ má speciální tvar; číslo $2i$ není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $y_p = A \cos(2t) + B \sin(2t)$

Derivace

$$y'_p = 2B \cos(2t) - 2A \sin(2t), \quad y''_p = -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t)$$

- Dosadíme do rovnice (vydělíme exponenciálou) a sloučíme členy
 $(A\omega^2 - 4A) \cos(2t) + (B\omega^2 - 4B) \sin(2t) = \cos(2t)$
- Porovnáme koeficienty u stejných členů na obou stranách odtud $A = \frac{1}{\omega^2 - 4}$, $B = 0$
$$\begin{cases} A\omega^2 - 4A = 1 \\ B\omega^2 - 4B = 0 \end{cases}$$
- Partikulární řešení: $y_p = \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$
- Obecné řešení
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\cos(2t)}{\omega^2 - 4}$$
- Pro $\omega = 2$ je číslo z pravé strany kořenem charakteristické rovnice (rezonance) – tvar řešení je jiný:
$$y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t \sin(2t)}{4}$$

Uhodnuté řešení $y_1 = x$ a snížení řádu (d'Alembert).

Zadání: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

Výsledek

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln |x-1| - x \ln |x+1|)$$

Postup

- Lineární rovnice 2. řádu s nekonstantními koeficienty:

$$y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

- Jedno řešení uhadneme a dosazením ověříme: $y_1 = x$.
Druhé najdeme snížením řádu (d'Alembert, $y = y_1 \cdot u$)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = x \ln |x-1|$$

- Racionální funkci rozložíme na polynom a parciální zlomky

$$\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

- Integrál součtu je součet integrálů

$$\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{2(x-1)} dx$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int \frac{1}{2(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$$

- Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln |x-1|$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

$$\int -\frac{1}{2(x+1)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx$$

- Podle tabulky základních integrálů:

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1|$$

- Konstantu vytkneme před integrál:

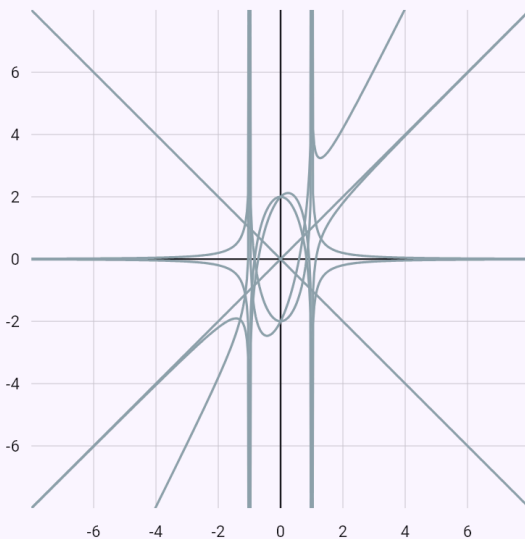
$$\int -\frac{1}{x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

- Podle tabulky základních integrálů: $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$

- Obecné řešení:

$$y = C_1 x + C_2 (x \ln |x-1| - x \ln |x+1| + 2)$$

Graf



— řešení pro různá C

Šedé křivky jsou řešení pro různé hodnoty konstant.

Známá omezení

- Rovnici, kterou je třeba upravit náповědou ze zadání (jiná než $z = \ln y$), zatím nevyřeší.
- U rovnice s parametrem (k, λ, ω) aplikace nekreslí graf a parametry bere jako kladné.
- Kde řešení nejde vyjádřit explicitně, zůstane v implicitním tvaru.
- Laplaceova transformace zatím nezná Heavisideovu funkci, posunutí a periodické pravé strany.

Rekurence a vytvořující funkce

Aplikace řeší lineární rekurence s konstantními koeficienty libovolného řádu přes charakteristickou rovnici – i násobné a komplexní kořeny (komplexní tvar řešení a jeho převod na reálný podle Moivreovy věty) – a s pravou stranou ve tvaru $P(n) \cdot q^n$ (i $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, rezonance a součet pravých stran). Počáteční podmínky určí konstanty; jako kontrolu aplikace spočítá další členy z rekurence a porovná je se vzorcem.

Čipem „Metoda“ jde zvolit i vytvořující funkci ($A(x) = \sum a_n x^n$, parciální zlomky, geometrické řady), mocniny matice (diagonalizace) nebo u 1. řádu sčítání. Rekurenci 1. řádu s proměnným koeficientem ($a_{n+1} = (n+1)a_n$) vyřeší součinem (faktoriály), převoditelné nelineární rekurence substitucí $b_n = 1/a_n$ nebo $b_n = \ln a_n$. Soustavu dvou rekurencí vyřeší vyloučením jedné posloupnosti nebo maticí, rekurenci „rozděl a panuj“ $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ substitucí $n = b^k$ – i s odhadem podle mistrovské věty.

S operací „Vytvořující funkce“ aplikace najde vytvořující funkci posloupnosti zadané vzorcem ($n^2 + 2^n$) nebo prvními členy (1, 0, 1, 0, ...), a obráceně z funkce $A(x)$ vzorec pro a_n . Počet celočíselných nezáporných řešení rovnice $x_1 + x_2 + \dots = N$ (i s mezemi nebo koeficienty – placení mincemi) spočítá jako koeficient vytvořující funkce.

Graf ukáže členy posloupnosti jako body (u soustavy obě posloupnosti).

Jak zadat

$a(n+2) = 5a(n+1) - 6a(n), a(0) = 1, a(1) = 4$	Zápis se závorkami, podmínky za čárkou.
$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$	Zápis s indexy (i z fotky). Bez podmínek vyjde obecné řešení s konstantami C_1, C_2 .
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1$	Index může klesat (a_{n-1}, a_{n-2}); stejnou hodnotu lze zadat více členům.
$a_{n+1} = a_n + 2b_n$ $b_{n+1} = 3a_n + b_n$ $a_0 = 1, b_0 = 0$	Soustava – rovnice na řádcích, podmínky na posledním.
$T(n) = 2T(n/2) + n, T(1) = 1$	Rozděl a panuj – člen v n/b .
$n^2 + 2^n$	Vzorec posloupnosti s operací „Vytvořující funkce“ (i $a_n = \dots$).

1, 0, 1, 0, ...

První členy posloupnosti oddělené čárkou.

$1/(1 - x - x^2)$

Vytvořující funkce v x (i $A(x) = \dots$) – vzorec pro a_n .

počet řešení $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 \leq 3$

Počet nezáporných celočíselných řešení s mezemi.

Ukázky

Dva různé reálné kořeny, kontrola dalšími členy.

Zadání: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

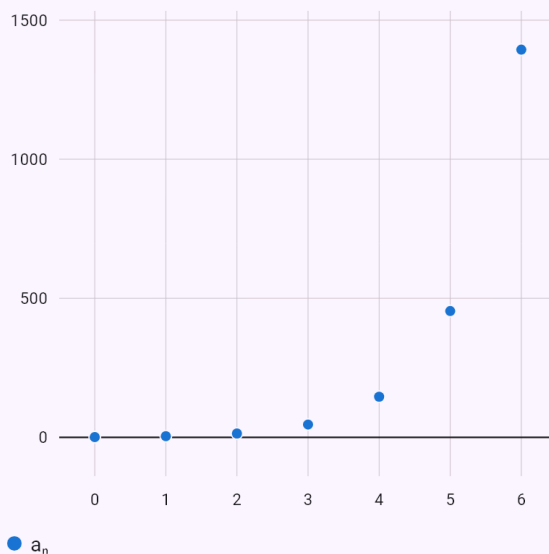
Výsledek

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty:
 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
- Řešení hledáme ve tvaru $a_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
- Diskriminant $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$; kořeny:
 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$
- Obecné řešení: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud
 $C_1 = -1$, $C_2 = 2$
 $C_1 + C_2 = 1$
 $2C_1 + 3C_2 = 4$
- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Kontrola: z rekurence vychází
 $a_2 = 14$, $a_3 = 46$, $a_4 = 146$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



• a_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Fibonacciho posloupnost – Binetův vzorec.

Zadání: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

Výsledek

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty:
 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

- Řešení hledáme ve tvaru $F_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^{n-2} dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

- Diskriminant $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$; kořeny:
 $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- Obecné řešení

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud

$$C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$C_1 + C_2 = 0$$

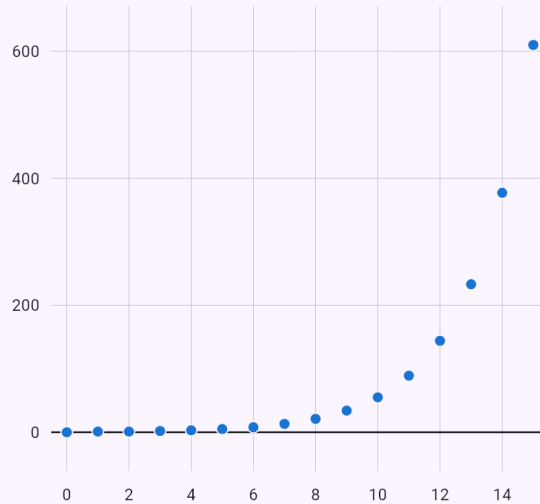
$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} C_2 = 1$$

- Řešení splňující zadané podmínky

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Kontrola: z rekurence vychází $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



● F_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Komplexní kořeny $1 \pm i$ – komplexní tvar a Moivreova věta.

Zadání: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Výsledek

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty:
 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$
- Řešení hledáme ve tvaru $a_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
- Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$; kořeny:
 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
- Komplexní kořeny $1 \pm i$ zapíšeme v goniometrickém tvaru: $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, tedy $\lambda = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4}\right)$.
Podle Moivreovy věty $\lambda^n =$
 $\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Obecné řešení v komplexním tvaru (komplexní konstanty): $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$. Sdružené členy sečteme a s novými reálnými konstantami dostaneme reálný tvar
 $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud
 $C_1 = 1$, $C_2 = 1$

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

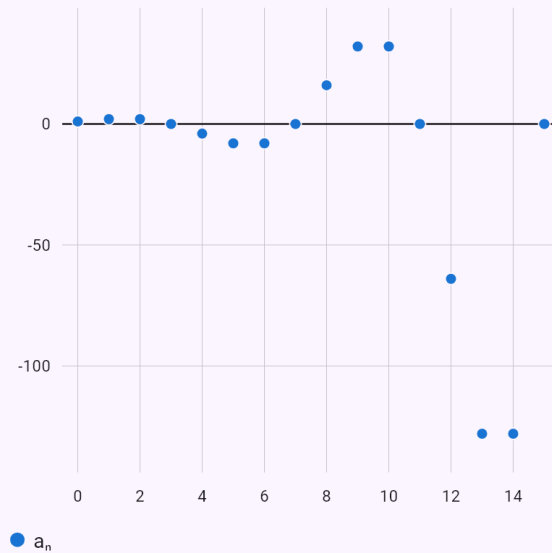
$$C_1 = 1$$
$$C_1 + C_2 = 2$$

- Řešení splňující zadané podmínky

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

- Kontrola: z rekurence vychází $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = -4$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



Pravá strana n, dvojnásobný kořen 2.

Zadání: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$

Výsledek

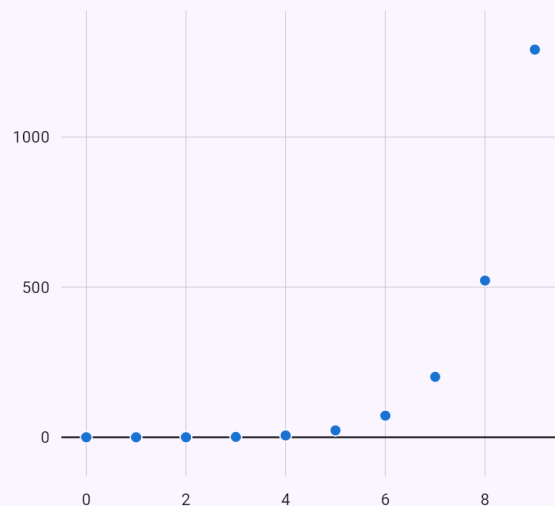
$$a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty:
 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rekurenci (pravá strana 0):
 $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $a_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici:
 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
- Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$; kořeny: $\lambda_{1,2} = 2$
- Obecné řešení homogenní rekurence:
 $a_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$
- Pravá strana n má speciální tvar; číslo 1 není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $a_n^{(p)} = An + B$
- Dosadíme do rekurence a sloučíme členy:
 $An + B - 2A = n$
- Porovnáme koeficienty u stejných členů na obou stranách odtud $A = 1$, $B = 2$
 $A = 1$
 $B - 2A = 0$

- Partikulární řešení: $a_n^{(p)} = n + 2$
- Obecné řešení:
 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n + n + 2$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud
 $C_1 = -2$, $C_2 = \frac{1}{2}$
 $C_1 + 2 = 0$
 $2C_1 + 2C_2 + 3 = 0$
- Řešení splňující zadané podmínky:
 $a_n = \frac{n-4}{2} \cdot 2^n + n + 2$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 6$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



• a_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Táž rekurence vytvořující funkcí.

Zadání: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Vytvořující funkce

Výsledek

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

- Zavedeme vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

- Rekurenci vynásobíme x^{n+2} a sečteme pro všechna $n \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

- Součty vyjádříme pomocí vytvořující funkce a počátečních hodnot:

$$A(x) - 1 - 4x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x)$$

- Vyjádříme vytvořující funkci a rozložíme jmenovatel:

$$A(x) = \frac{1-x}{(1-2x)(1-3x)}$$

- Rozklad na parciální zlomky:

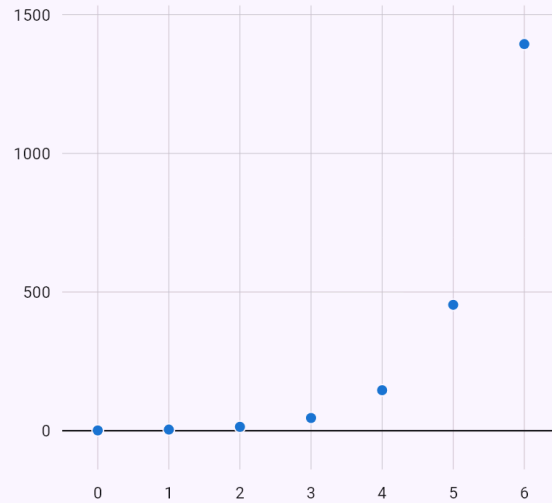
$$A(x) = -\frac{1}{1-2x} + \frac{2}{1-3x}$$

- Zlomky rozvineme v geometrické řady

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \frac{2}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 3^n x^n$$

- Koeficient u x^n je hledaný člen: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$

Graf



• a_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Táž rekurence mocninami matice.

Zadání: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

Mocniny matice

Výsledek

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

Postup

- Lineární rekurence 2. řádu s konstantními koeficienty:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

- Rekurenci zapíšeme maticově tedy $v_{n+1} = M \cdot v_n$ s maticí

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Opakovaným dosazením $v_n = M^n \cdot v_0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla matice: $\det(M - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$,
odtud $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

- Vlastní vektory – řešení $(M - \lambda E)u = 0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Matici diagonalizujeme, $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

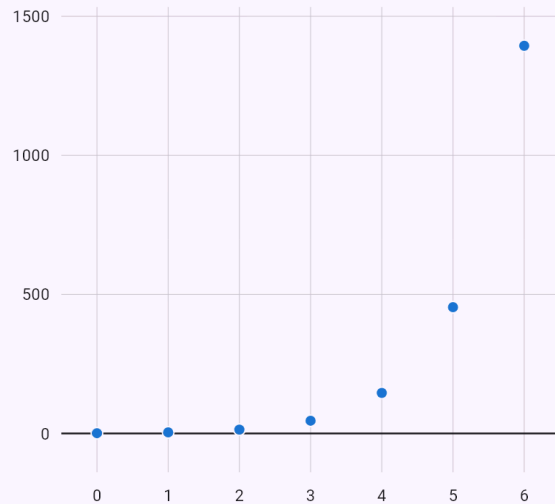
- Mocnina matice koeficienty takže $v_n = P \cdot D^n \cdot (P^{-1}v_0)$.

$$M^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$
- Kontrola: z rekurence vychází
 $a_2 = 14$, $a_3 = 46$, $a_4 = 146$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



• a_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Rekurence 1. řádu sčítáním.

Zadání: $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_0 = 0$

Sčítání

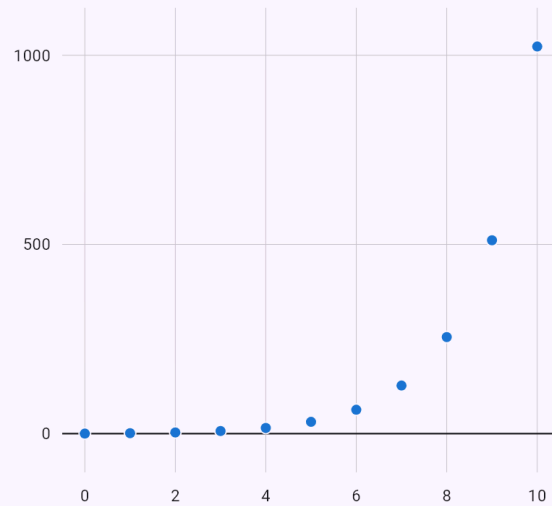
Výsledek

$$a_n = 2^n - 1$$

Postup

- Lineární rekurence 1. řádu s konstantními koeficienty:
 $a_{n+1} = 2a_n + 1$
- Rekurenci opakovaně dosadíme do sebe:
 $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 4a_{n-2} + \dots$, obecně
$$a_n = a_0 \cdot 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}$$
- Součet sečteme: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1$
- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = 2^n - 1$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



• a_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Proměnný koeficient – součin vede na faktoriál.

Zadání: $a_{n+1} = (n+1)a_n$, $a_0 = 1$

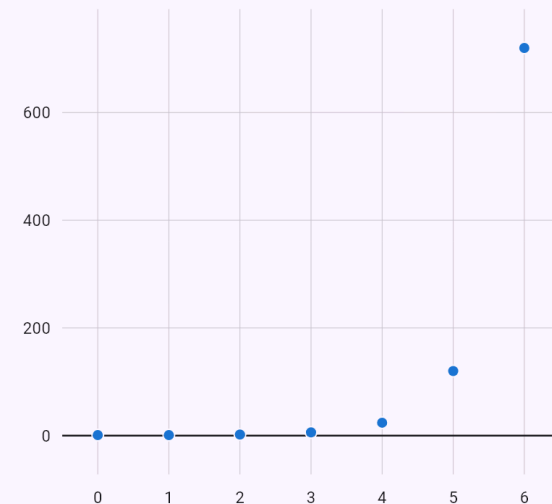
Výsledek

$$a_n = n!$$

Postup

- Lineární rekurence 1. řádu s proměnným koeficientem:
 $a_{n+1} = a_n(n+1)$
- Rekurenci opakovaně dosadíme do sebe – člen je součinem
$$a_n = (n+1)a_{n-1} = n(n+1)a_{n-2} = \dots = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} (j+1)$$
- Součin zjednodušíme (faktoriály se zkrátí):
$$\prod_{j=0}^{n-1} (j+1) = n!$$
- Řešení splňující zadané podmínky: $a_n = n!$
- Kontrola: z rekurence vychází $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ – stejně jako ze vzorce.

Graf



• a_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Nelineární rekurence – substituce $b_n = 1/a_n$.

Zadání: $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$, $a_0 = 1$

Výsledek

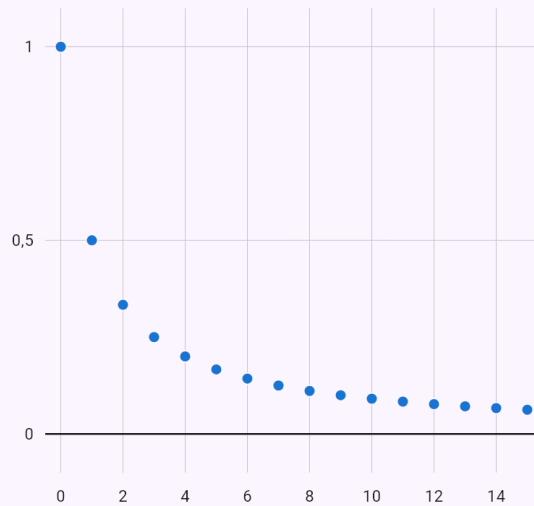
$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Postup

- Nelineární rekurence – převrácené hodnoty členů ji převedou na lineární: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$
- Obě strany převrátíme: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$; substituce $b_n = \frac{1}{a_n}$ tak převede rekurenci na lineární: $b_{n+1} = b_n + 1$
- Počáteční podmínky pro novou posloupnost: $b_0 = 1$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rekurenci (pravá strana 0): $b_{n+1} - b_n = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $b_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda - 1 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = 1$
- Obecné řešení homogenní rekurence: $b_n^{(h)} = C_1$
- Pravá strana 1 má speciální tvar; číslo 1 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme n : $b_n^{(p)} = An$
- Dosadíme do rekurence a sloučíme členy: $A = 1$
- Partikulární řešení: $b_n^{(p)} = n$

- Obecné řešení: $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = C_1 + n$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = 1$
 $C_1 = 1$
- Řešení splňující zadané podmínky: $b_n = 1 + n$
- Kontrola: z rekurence vychází $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$ – stejně jako ze vzorce.
- Vrátíme se k původní posloupnosti: $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1}$

Graf



• a_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Soustava dvou rekurencí vyloučením posloupnosti b_n .

Zadání: $a_{n+1} = a_n + 2b_n$

$b_{n+1} = 3a_n + b_n$

$$a_0 = 1, b_0 = 0$$

Výsledek

$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

Postup

- Soustava dvou lineárních rekurencí

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$b_{n+1} = 3a_n + b_n$$

- Z první rovnice vyjádříme $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$, tedy i

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}; \text{ dosazením do druhé rovnice}$$

dostaneme rekurenci pro jedinou posloupnost:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0$$

- Druhou počáteční podmínku dostaneme z první rovnice:

$$a_1 = 1 + 0 = 1$$

- Řešení hledáme ve tvaru $a_n = \lambda^n$; po dosazení a vydělení λ^n dostaneme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$$

- Diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24$; kořeny:

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{6}, \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$$

- Obecné řešení: $a_n = C_1 (1 - \sqrt{6})^n + C_2 (1 + \sqrt{6})^n$

- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$(1 - \sqrt{6})C_1 + (1 + \sqrt{6})C_2 = 1$$

- Řešení splňující zadané podmínky:

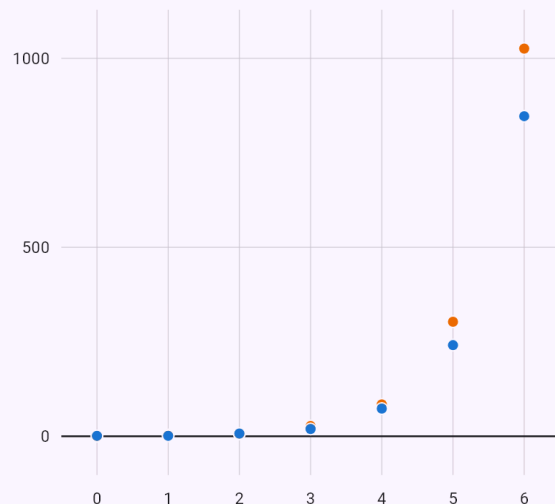
$$a_n = \frac{(1 - \sqrt{6})^n}{2} + \frac{(1 + \sqrt{6})^n}{2}$$

- Kontrola: z rekurence vychází $a_2 = 7$, $a_3 = 19$, $a_4 = 73$ – stejně jako ze vzorce.

- Druhou posloupnost dopočítáme z vyjádření

$$b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} (1 + \sqrt{6})^n - \frac{\sqrt{6}}{4} (1 - \sqrt{6})^n$$

Graf



● a_n ● b_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Rozděl a panuj (merge sort) – substituce $n = 2^k$ a mistrovská věta.

Zadání: $T(n) = 2T(n/2) + n$, $T(1) = 1$

Výsledek

$$T(n) = n + n \log_2 n$$

Podmínky: $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$

Postup

- Rekurence typu „rozděl a panuj“: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
- Pro n mocninu základu: substituce $n = 2^k$, $S_k = T(2^k)$ dává lineární rekurenci 1. řádu: $S_{k+1} = 2S_k + 2^{k+1}$
- Počáteční podmínky pro novou posloupnost: $S_0 = 1$
- Nejdřív vyřešíme homogenní rekurenci (pravá strana 0): $S_{k+1} - 2S_k = 0$
- Řešení hledáme ve tvaru $S_k = \lambda^k$; po dosazení a vydělení λ^k dostaneme charakteristickou rovnici: $\lambda - 2 = 0$
- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_1 = 2$
- Obecné řešení homogenní rekurence: $S_k^{(h)} = C_1 \cdot 2^k$
- Pravá strana 2^{k+1} má speciální tvar; číslo 2 je kořenem charakteristické rovnice (násobnosti 1), tvar proto vynásobíme k : $S_k^{(p)} = Ak \cdot 2^k$
- Dosadíme do rekurence, vydělíme 2^k a sloučíme členy: $2A = 2$
- Odtud $A = 1$
- Partikulární řešení: $S_k^{(p)} = k \cdot 2^k$

- Obecné řešení: $S_k = S_k^{(h)} + S_k^{(p)} = C_1 \cdot 2^k + k \cdot 2^k$
- Dosadíme podmínky do obecného řešení odtud $C_1 = 1$
 $C_1 = 1$
- Řešení splňující zadané podmínky: $S_k = 2^k + k \cdot 2^k$
- Kontrola: z rekurence vychází
 $S_1 = 4$, $S_2 = 12$, $S_3 = 32$ – stejně jako ze vzorce.
- Vratíme se k n ($k = \log_2 n$): $T(n) = n + n \log_2 n$
- Mistrovská věta ($a = 2$, $b = 2$, $f(n) = \Theta(n)$): $2 = 2^1$, proto $T(n) = \Theta(n \log n)$

Vytvořující funkce posloupnosti $n^2 + 2^n$.

Zadání: $n^2 + 2^n$

Vytvořující funkce

Výsledek

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

Postup

- Zavedeme vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2^n)x^n$

- Řadu rozdělíme podle linearity:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

- Známá řada: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$

- Známá řada: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

- Vynásobení členů n odpovídá derivaci vynásobené x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- Vynásobení členů n^2 odpovídá derivaci vynásobené x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$$

- Vytvořující funkce: $A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2 - 3x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$

- Kontrola – rozvoj funkce začíná členy posloupnosti:
 $A(x) = 1 + 3x + 8x^2 + 17x^3 + \dots$

Z vytvářející funkce vzorec pro a_n – parciální zlomky přes iracionální kořeny.

Zadání: $1/(1 - x - x^2)$

Vytvářející funkce

Výsledek

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Postup

- Vyjádříme vytvářející funkci a rozložíme jmenovatel

$$A(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

- Rozklad na parciální zlomky

$$A(x) = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

- Zlomky rozvineme v geometrické řady

$$\frac{1}{1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n, \quad \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n$$

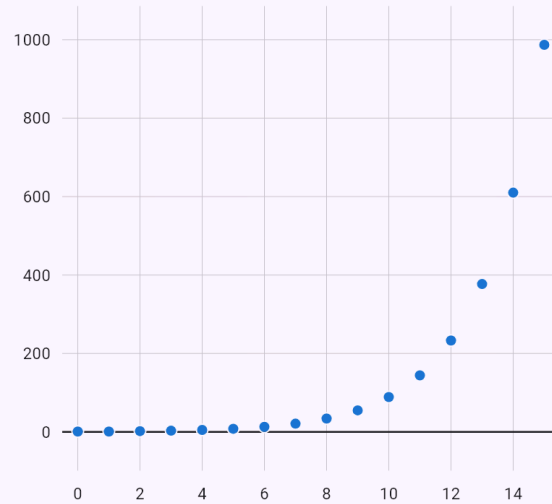
- Koeficient u x^n je hledaný člen

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Kontrola – rozvoj funkce začíná členy posloupnosti:

$$A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

Graf



• a_n

Body jsou členy posloupnosti spočítané ze vzorce – stejné hodnoty dává i samotná rekurence.

Počet řešení $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ s podmínkou $x_1 \leq 3$.

Zadání: počet řešení $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 \leq 3$

Výsledek

38

Postup

- Neznámá x_1 ($0 \leq x_1 \leq 3$) přispívá řadou

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

- Neznámá x_2 ($x_2 \geq 0$) přispívá řadou

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- Neznámá x_3 ($x_3 \geq 0$) přispívá řadou

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

- Vytvářející funkce je jejich součin – koeficient u x^N

$$\text{udává počet řešení: } G(x) = \frac{1 - x^4}{(1 - x)^3}$$

- Počet řešení je koeficient u x^{10} : 38

Známá omezení

- Zatím neumí: lineární rekurence s proměnnými koeficienty vyššího řádu, soustavy tří a více rekurencí, rozděl a panuj s více členy ($T(n/2)$ a $T(n/3)$) a nelineární rekurence, které uvedené substituce nepřevodou na lineární.

Aplikace diferenciálních rovnic

Tlačítkem „Aplikace diferenciálních rovnic“ na úvodní obrazovce otevřete formulář se 23 modely: radiouhlíková metoda, rozpad a poločas, exponenciální růst, rozpadová řada, Newtonovo ochlazování (i doba smrti ze dvou měření), chemická kinetika 0.–2. řádu, lék v krvi (jedna dávka, opakované dávky, infuze), alkohol v krvi, spoření a splácení úvěru, obvody RC, RL a RLC, kmitání pružiny, pád s odporem vzduchu, vytékání nádoby, směšování v nádrži, logistický a Gompertzův růst, populace s lovem, epidemie SIR, dravec a kořist, konkurence dvou druhů a chemostat.

Vyberete model, jeho variantu a co hledáte; konstanty (poločas ^{14}C , tíhové zrychlení, ...) jsou předvyplněné a jdou přepsat. U každé veličiny i u výsledku si zvolíte jednotku – aplikace hodnoty převede (převod je v postupu). Ikonka „?“ u modelu vysvětlí, jak se k jeho rovnici došlo.

Postup začíná sestavením modelu (proč právě tahle rovnice), pokračuje řešením rovnice (separace proměnných, integrační faktor, charakteristická rovnice), dosazením podmínek a vyjádřením hledané veličiny a končí dosazením čísel. Soustavy (SIR, dravec–kořist, konkurence, chemostat) se řeší numericky metodou Runge–Kutta, přesně pak rovnovážné stavy a jejich stabilita. Graf ukáže veličiny v čase s vyznačenou odpovědí, u soustav i fázovou rovinu.

Ukázky

Stáří nálezů, ve kterém zbývá 35 % ^{14}C .

Zadáni: `model(radiocarbon; find=t[yr]; T12=5730[yr]; p=35[pct]; input=ratio)`

Výsledek

$t \approx 8700$ let

Postup

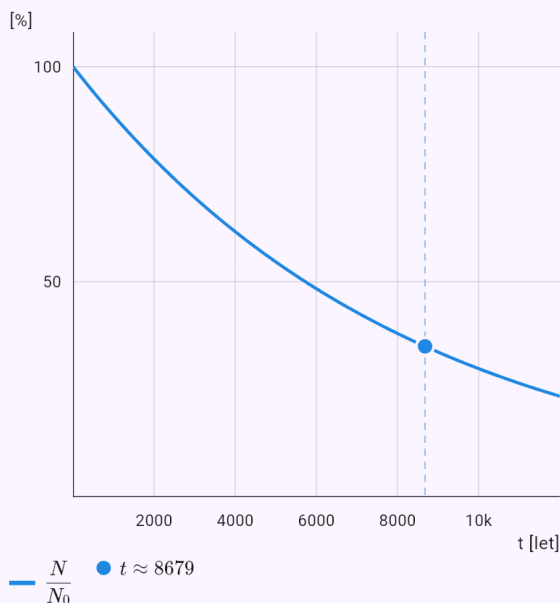
- Hledáme t ; zadáno: $T_{1/2} = 5730$ let, $\frac{N}{N_0} = 35\%$
- Převédeme jednotky: $\frac{N}{N_0} = 35\% = 0,35$
- Živé organismy přijímají uhlík z ovzduší, a proto obsahují stejný podíl radioaktivního izotopu ^{14}C jako atmosféra. Po smrti příjem ustane a ^{14}C se rozpadá. Počet rozpadů za jednotku času je úměrný počtu jader, která ještě zbývají: $dN/dt = -\lambda N$, kde λ je rozpadová konstanta. Řešením je $N = N_0 \cdot e^{(-\lambda t)}$ a za poločas $T_{1/2} = 5730$ let ubude polovina, takže $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$. Ze zbývajících podílu ^{14}C (nebo z poměru naměřené aktivity a aktivity živého vzorku) vypočítáme stáří. Rovnice modelu: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- Separujeme proměnné: $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$
- Integrujeme obě strany: $\ln |N| = -\lambda t + C$
- Odlogaritmuje – konstantu $\pm e^C$ označíme opět C :
 $N = C e^{-\lambda t}$
- Dosadíme počáteční podmínku $N(0) = N_0$: $N_0 = C$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):
 $N = N_0 e^{-\lambda t}$

- Za poločas klesne množství na polovinu – rozpadová konstanta

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ rok}^{-1}$$

- Vyjádříme hledanou veličinu:
 $t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}$
- Dosadíme: $t = \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{1}{0,35} \approx 8679$ let
- Laboratoře uvádějí „radiouhlíkové stáří“ s Libbyho poločasem 5568 let a přepočítávají ho kalibrační křivkou (obsah ^{14}C v atmosféře nebyl vždy stejný) – skutečné stáří se proto může o něco lišit.

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Doba smrti: tělo mělo při nález 30 °C, o hodinu později 28 °C, v místnosti je 20 °C.

Zadání: `model(cooling; find=t[h]; T0=30[degC]; Ta=20[degC]; t1=1[h]; T1=28[degC]; Tt=37[degC]; k=measured)`

Výsledek

$$t \approx -2,38 \text{ h}$$

Postup

- Hledáme t ; zadáno
 $T_0 = 30^\circ\text{C}$, $T_a = 20^\circ\text{C}$, $t_1 = 1 \text{ h}$, $T_1 = 28^\circ\text{C}$,
- Těleso předává teplo okolí tím rychleji, čím větší je rozdíl teplot: $dT/dt = -k(T - T_a)$, kde T_a je teplota okolí a k závisí na tělese (velikost, materiál, proudění vzduchu). Řešením je $T = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{(-kt)}$ – rozdíl teplot klesá exponenciálně. Konstantu k lze určit ze dvou měření. Kriminalisté tak odhadují dobu smrti: změří teplotu těla při nález a o něco později a dopočítají, kdy mělo tělo 37°C . Rovnice modelu: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$
- Separujeme proměnné: $\frac{dT}{T - T_a} = -k dt$
- Integrujeme obě strany: $\ln |T - T_a| = -kt + C$
- Odlogaritmujeme – konstantu $\pm e^C$ označíme opět C :
 $T = T_a + C e^{-kt}$
- Dosadíme počáteční podmínku $T(0) = T_0$:
 $T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):
 $T = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt}$
- Konstantu k určíme z druhého měření

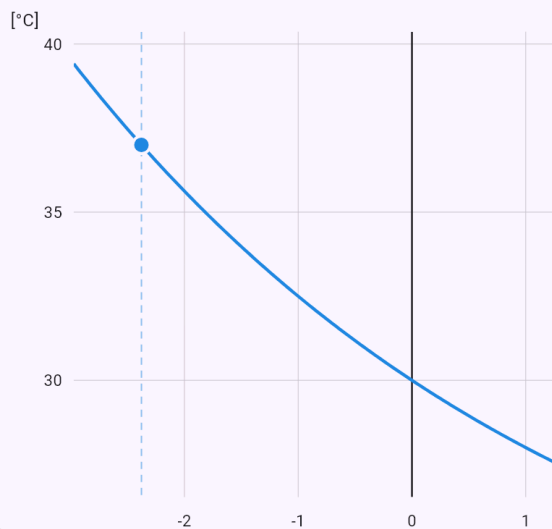
$$T(t_1) = T_1 \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = -\frac{1}{1} \ln \frac{28 - 20}{30 - 20} \approx$$

- Vyjádříme hledanou veličinu

$$T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt} = T \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{T - T_a}{T_0 - T_a}$$

- Dosadíme: $t = -\frac{1}{0,2231} \ln \frac{37 - 20}{30 - 20} \approx -2,378 \text{ h}$
- Záporný čas znamená dobu před prvním měřením (u určení doby smrti tolik hodin před nálezem).

Graf



— T • $t \approx -2,378$

t [h]

Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Lék 500 mg každých 8 hodin – ustálená hladina mezi dávkami.

Zadání: `model(drug; find=steady[mg_l]; D=500[mg]; V=40[l]; T12=6[h]; tau=8[h];`

mode=repeated)

Výsledek

$$c_{max} \approx 20,7 \text{ mg/l}$$

$$c_{min} \approx 8,22 \text{ mg/l}$$

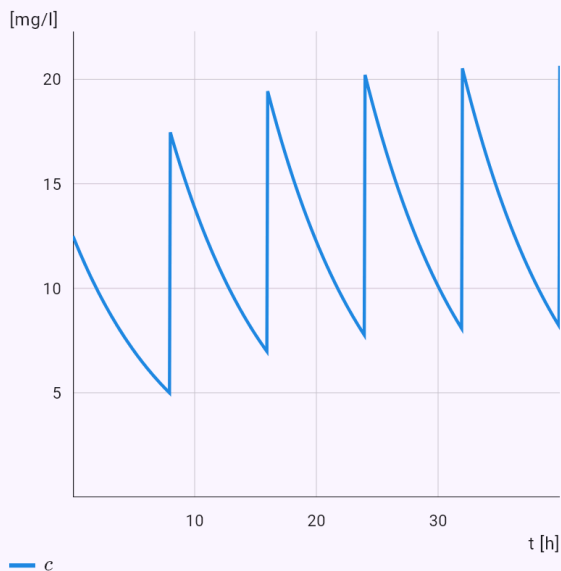
Postup

- Hledáme c_{max} ; zadáno
 $D = 500 \text{ mg}$, $V = 40 \text{ l}$, $T_{1/2} = 6 \text{ h}$, $\tau = 8 \text{ h}$
- Lék podaný do krve se rozptýlí v distribučním objemu V ; ledviny a játra ho vylučují rychlostí úměrnou koncentraci: $dc/dt = -kc$, kde $k = \ln 2 / T_{1/2}$ (biologický poločas). Po jedné dávce D je $c = (D/V) \cdot e^{(-kt)}$. Při opakovaném podávání po intervalu τ se zbytky sčítají (geometrická řada) a hladina se ustálí mezi c_{min} a c_{max} . Při infuzi rychlostí R platí $dc/dt = R/V - kc$ a koncentrace se blíží ustálené hodnotě $R/(kV)$. Rovnice modelu: $\frac{dc}{dt} = -kc$
- Počáteční koncentrace po podání dávky:
 $c_0 = \frac{D}{V} = \frac{500}{40} \approx 12,5 \text{ mg/l}$
- Eliminační konstanta z biologického poločasu:
 $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6} \approx 0,1155 \text{ h}^{-1}$
- Separujeme proměnné: $\frac{dc}{c} = -k dt$
- Integrujeme obě strany: $\ln |c| = -kt + C$
- Odlogaritmuje – konstantu $\pm e^A C$ označíme opět C :

$$c = C e^{-kt}$$

- Dosaďme počáteční podmínku $c(0) = c_0$: $c_0 = C$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):
 $c = c_0 e^{-kt}$
- Podíl léku, který zbude do další dávky:
 $q = \frac{c(\tau)}{c_0} = e^{-k\tau} = e^{-0,1155 \cdot 8} \approx 0,3969$
- Vyjádříme hledanou veličinu
 $c_{max} = c_0 (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{c_0}{1 - q}$, $c_{min} = q c_{max}$
- Dosaďme: $c_{max} = \frac{12,5}{1 - 0,3969} \approx 20,72 \text{ mg/l}$
- Dosaďme: $c_{min} = 0,3969 \cdot 20,72 \approx 8,225 \text{ mg/l}$
- Kumulační faktor (kolikrát je ustálená hladina vyšší než po jedné dávce): $R = \frac{1}{1 - q} \approx 1,658$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Měsíční splátka úvěru 1 000 000 Kč na 20 let při úroku 5 %.

Zadání: `model(interest; find=a[CZK_mo]; B0=1000000[CZK]; r=5[pct_yr]; t=20[yr]; B=0[CZK];`

kind=loan)

Výsledek

$$a \approx 6592 \text{ Kč/měs.}$$

Postup

- Hledáme a ; zadáno

$$D_0 = 1\,000\,000 \text{ CZK}, \quad r = 5\% \text{ ročně}, \quad t = 20 \text{ let},$$

- Převedeme jednotky: $r = 5\% \text{ ročně} = 0,05 \text{ rok}^{-1}$
- Při spojitém úročení přibývá úrok v každém okamžiku úměrně zůstatku: $dD/dt = rD$, kde r je roční úroková sazba. Pravidelné vklady a zůstatek zvyšují ($dD/dt = rD + a$), splátky úvěru dluh snižují ($dD/dt = rD - a$). Rovnici vyřešíme separací proměnných a z řešení dopočítáme zůstatek, dobu splácení nebo výši splátky (spojitá obdoba anuity). Rovnice modelu: $\frac{dD}{dt} = rD - a$
- Separujeme proměnné: $\frac{dD}{D - \frac{a}{r}} = r dt$
- Integrujeme obě strany: $\ln \left| D - \frac{a}{r} \right| = rt + C$
- Odlogaritmuje – konstantu $\pm e^C$ označíme opět C :
 $D = \frac{a}{r} + C e^{rt}$
- Dosadíme počáteční podmínku $D(0) = D_0$:
 $C = D_0 - \frac{a}{r}$

- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):

$$D = \frac{a}{r} + \left(D_0 - \frac{a}{r} \right) e^{rt}$$

- Spojitě úročení je model – banky úročí měsíčně nebo ročně, výsledky se liší jen málo.

- Vyjádříme hledanou veličinu: $a = \frac{r(D_0 e^{rt} - D)}{e^{rt} - 1}$

- Dosadíme

$$a = \frac{0,05(1\,000\,000 e^{0,05 \cdot 20} - 0)}{e^{0,05 \cdot 20} - 1} \approx 79\,100 \text{ Kč/rok}$$

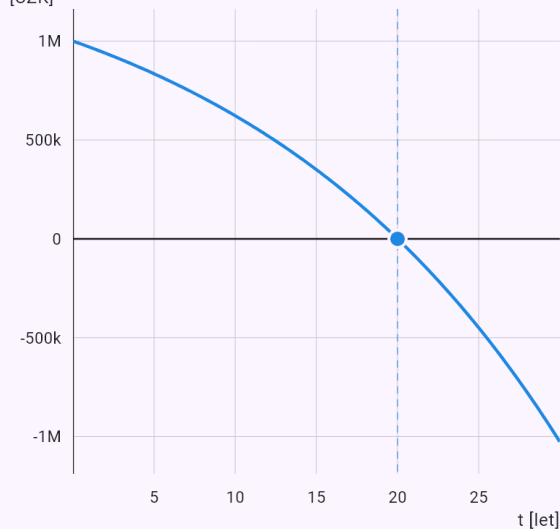
- Celkem zapláceno: $a t = 1\,582\,000 \text{ CZK}$

- Převedeme jednotky:

$$a \approx 79\,100 \text{ Kč/rok} = 6592 \text{ Kč/měs.}$$

Graf

[CZK]



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Za jak dlouho se kondenzátor nabije na polovinu napětí zdroje.

Zadání: `model(rc; find=t[ms]; R=10[kohm]; C=100[uF]; U=12[V]; u=6[V]; mode=charge)`

Výsledek

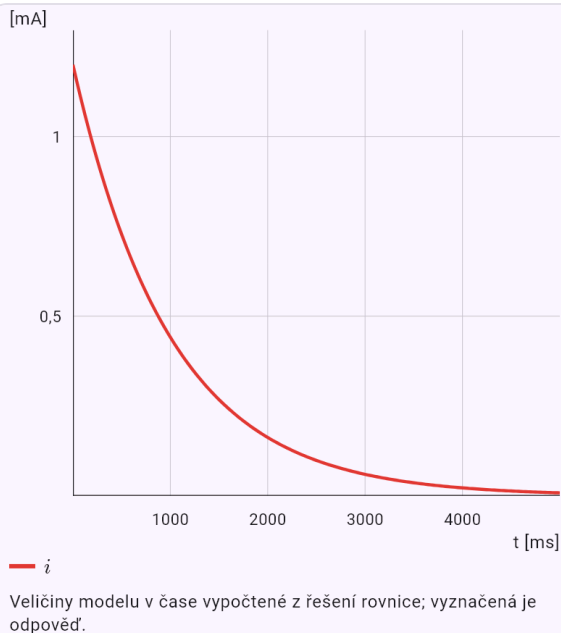
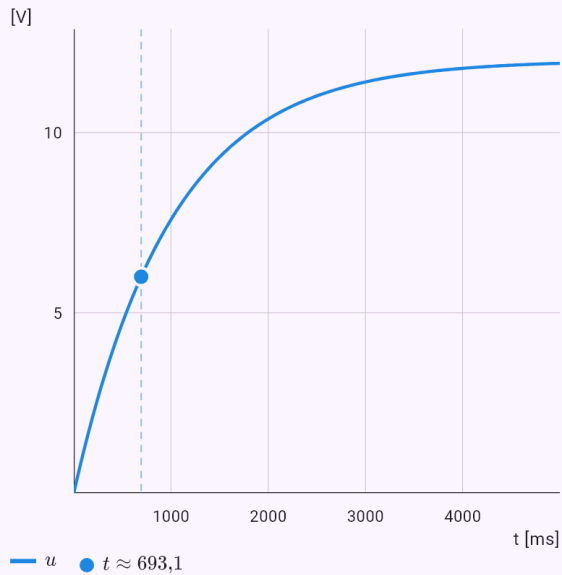
$$t \approx 693 \text{ ms}$$

Postup

- Hledáme t ; zadáno
 $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $U = 12 \text{ V}$, $u = 6 \text{ V}$
- Při nabíjení kondenzátoru přes rezistor platí podle Kirchhoffova zákona $U = Ri + u$ a proud kondenzátor nabíjí: $i = C \cdot du/dt$. Dohromady $RC \cdot du/dt + u = U$. Napětí se blíží napětí zdroje: $u = U(1 - e^{-(t/\tau)})$, kde $\tau = RC$ je časová konstanta; proud $i = (U/R) \cdot e^{-(t/\tau)}$ klesá. Při vybíjení je $u = U_0 \cdot e^{-(t/\tau)}$. Rovnice modelu:
$$RC \frac{du}{dt} + u = U$$
- Časová konstanta: $\tau = RC = 10 \cdot 100 \approx 1000 \text{ ms}$
- Separujeme proměnné: $\frac{du}{u - U} = -\frac{dt}{\tau}$
- Integrujeme obě strany: $\ln |u - U| = -\frac{t}{\tau} + C$
- Odlogaritmuje – konstantu $\pm e^C$ označíme opět C :
 $u = U + C e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Dosadíme počáteční podmínku $u(0) = 0$:
 $0 = U + C \Rightarrow C = -U$
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):
 $u = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

- Vyjádříme hledanou veličinu: $t = -\tau \ln \left(1 - \frac{u}{U}\right)$
- Dosadíme: $t = -1000 \ln \left(1 - \frac{6}{12}\right) \approx 693,1 \text{ ms}$

Graf



Tlumené kmitání pružiny – výchylka v čase 1 s.

Zadání: `model(spring; find=x[cm]; m=0.5[kg]; k=20[N_m]; b=1[kg_s]; x0=5[cm]; v0=0[m_s];`

$$t=1[s])$$

Výsledek

$$x \approx 1,827 \text{ cm}$$

Postup

- Hledáme x ; zadáno

$$m = 0,5 \text{ kg}, \quad k = 20 \text{ N/m}, \quad b = 1 \text{ kg/s}, \quad x_0 = 5 \text{ cm},$$

- Převedeme jednotky: $x_0 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

- Na těleso na pružině působí síla pružiny $-kx$ (Hookův zákon), tlumení $-b \cdot v$ (odpor úměrný rychlosti) a případně budící síla $F_0 \cdot \cos \omega t$. Podle 2. Newtonova zákona $m \cdot x'' = -kx - b \cdot x' + F_0 \cdot \cos \omega t$, tedy $m \cdot x'' + b \cdot x' + kx = F_0 \cdot \cos \omega t$ – lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Kořeny charakteristické rovnice určí, zda těleso kmitá (podkritické tlumení), nebo se jen vrací do rovnováhy. Při buzení blízko vlastní frekvence $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ nastává rezonance. Rovnice modelu: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$

- Vlastní úhlová frekvence (bez tlumení):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} \approx 6,325 \text{ s}^{-1}$$

- Součinitel útlumu: $\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2 \cdot 0,5} \approx 1 \text{ s}^{-1}$

- Řešení hledáme ve tvaru $x = e^{\lambda t}$; po dosazení a vydělení $e^{\lambda t}$ dostaneme charakteristickou rovnici: $0,5\lambda^2 + \lambda + 20 = 0$

- Kořeny charakteristické rovnice: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6,245i$

- Podkritické tlumení ($\delta < \omega_0$; $\delta = 1$, $\omega_0 = 6,325$): komplexní kořeny – tlumené kmity.

- Řešení homogenní rovnice:

$$x_h = e^{-t}(C_1 \cos 6,245t + C_2 \sin 6,245t)$$

- Dosadíme podmínky do obecného řešení:

$$x(0) = 0,05, \quad x'(0) = 0, \text{ odtud}$$

$$C_1 \approx 0,05, \quad C_2 \approx 0,008006$$

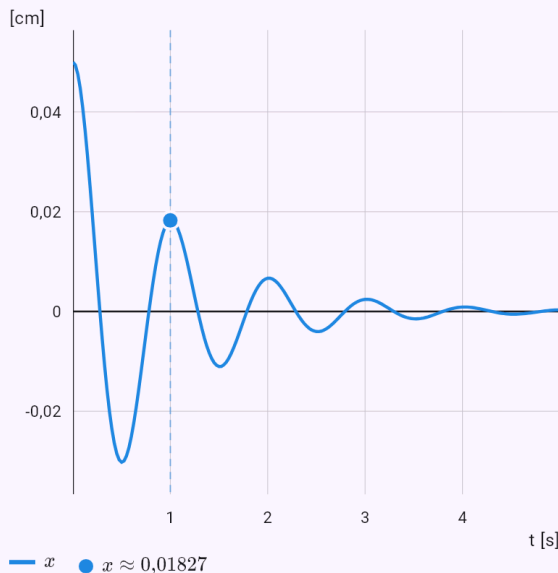
- Řešení s počáteční podmínkou (partikulární řešení):

$$x = e^{-t}(0,05 \cos 6,245t + 0,008006 \sin 6,245t)$$

- Dosadíme: $x(1) \approx 0,01827 \text{ m}$

- Převedeme jednotky: $x \approx 0,01827 \text{ m} = 1,827 \text{ cm}$

Graf



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Epidemie s $R_0 = 2,5$ – vrchol a konečný počet nakažených.

Zadání: `model(sir; find=overview[d]; N=10000[pcs]; I0=10[pcs]; R0=2.5; D=7[d]; rates=r0)`

Výsledek

$$I_{max} \approx 2340 \text{ jed.}$$

$$t_{max} \approx 34,1 \text{ d}$$

$$R_{\infty} \approx 8930 \text{ jed.}$$

Postup

- Hledáme t_{max} ; zadáno
 $N = 10\,000 \text{ jed.}, \quad I_0 = 10 \text{ jed.}, \quad R_0 = 2,5, \quad D = 7 \text{ d}$

- Populaci N rozdělíme na vnímavé S , nakažené I a uzdravené (imunní) R . Nakažených přibývá úměrně počtu setkání vnímavých s nakaženými: $\beta \cdot S \cdot I / N$; nakažení se uzdravují rychlostí $\gamma = 1/D$, kde D je doba nemoci. Soustava $S' = -\beta SI/N$, $I' = \beta SI/N - \gamma I$, $R' = \gamma I$ nemá řešení v elementárních funkcích – řešíme ji numericky. Přesně ale odvodíme základní reprodukční číslo $R_0 = \beta/\gamma$, vrchol epidemie, konečný počet nakažených a práh kolektivní imunity $1 - 1/R_0$. Rovnice modelu

$$S' = -\frac{\beta SI}{N}$$

$$I' = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$$

$$R' = \gamma I$$

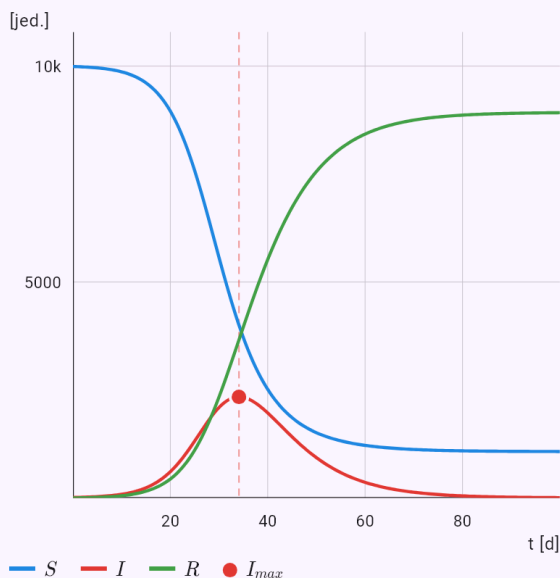
- Rychlost uzdravování: $\gamma = \frac{1}{D} = \frac{1}{7} \approx 0,1429 \text{ d}^{-1}$
- Rychlost přenosu nákazy: $\beta = R_0 \gamma \approx 0,3571 \text{ d}^{-1}$

- Součet $S + I + R = N$ je stálý (sečtením rovnic dostaneme nulu).
- Práh kolektivní imunity (podíl imunních, při kterém se nemoc přestane šířit): $1 - \frac{1}{R_0} \approx 60\%$
- Epidemie se rozběhne, protože na začátku platí
 $I' > 0 \Leftrightarrow S > \frac{N}{R_0} \approx 4000$
- Vrchol epidemie nastane při $S = N/R_0$; z rovnice pro dI/dS
$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S} \Rightarrow I + S - \frac{N}{R_0} \ln S = C \Rightarrow I_{max} = I$$
- Rovnici vyřešíme numericky (půlením intervalu)
$$\ln \frac{S_{\infty}}{S_0} = \frac{R_0(S_{\infty} - N)}{N} \Rightarrow S_{\infty} \approx 1072 \text{ jed.}$$
- Nemoc celkem prodělá:
 $R_{\infty} = N - S_{\infty} \approx 8928 \text{ jed.} \quad (89,3\%)$
- Soustavu nelze vyřešit v elementárních funkcích – řešíme ji numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu s krokem 0,05 na intervalu $\langle 0; 100 \rangle$
- Z numerického řešení: $t_{max} \approx 34,1 \text{ d}$

Graf

Průběh v čase

Fázová rovina



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Dravec a kořist – rovnováha, stabilita a perioda kmitů.

Zadání: `model(predator; find=overview[mo]; a=0.5[per_mo]; b=0.01[per_pcs_mo]; c=0.4[per_mo]; d=0.005[per_pcs_mo]; x0=100[pcs]; y0=20[pcs])`

Výsledek

$$[x^*; y^*] \approx [80; 50]$$

$$T \approx 14,9 \text{ měs.}$$

Postup

- Hledáme T ; zadáno

$$a = 0,5 \text{ měs.}^{-1}, \quad b = 0,01 \text{ (jed.} \cdot \text{měs.)}^{-1}, \quad c = 0,4 \text{ měs.}$$

- Kořist x se bez dravců množí (ax), dravci y bez kořisti hynou ($-cy$). Setkání, úměrná součinu xy , kořist ubírájí ($-bxy$) a dravcům přidávají potravu ($+dxy$). Soustava $x' = ax - bxy$, $y' = -cy + dxy$ (Lotka, Volterra) má rovnovážný stav $[c/d; a/b]$. Linearizace v něm dává ryze imaginární vlastní čísla – populace kolem rovnováhy periodicky kolísají, dravci se zpožděním za kořisti. Řešíme numericky, přesně odvodíme rovnováhy a první integrál. Rovnice modelu

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$

- Rovnovážné stavy – všechny derivace jsou nulové

$$x(a - by) = 0, \quad y(dx - c) = 0 \Rightarrow [0; 0], \quad \left[\frac{c}{d}; \frac{a}{b}\right] \approx [80; 50]$$

- Stabilitu určíme linearizací – Jacobiho matice soustavy

$$J = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & dx - c \end{pmatrix}$$

- V bodě $[0; 0]$ vlastní čísla $\lambda_1 = -0,4$, $\lambda_2 = 0,5$ – sedlo (nestabilní).

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{pmatrix}$$

- V bodě $[80; 50]$ vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm 0,4472i$ – střed (kmity kolem rovnováhy).

$$\begin{pmatrix} 0 & -0,8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vydělením rovnic a separací dostaneme první integrál – veličinu, která se podél trajektorie nemění:

$$V = dx - c \ln x + by - a \ln y = C$$

- Protože V se podél trajektorie nemění, trajektorie jsou uzavřené křivky – populace periodicky kolísají kolem rovnováhy.

- Perioda malých kmitů kolem rovnováhy (z vlastních čísel): $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{ac}} \approx 14,05 \text{ měs.}$

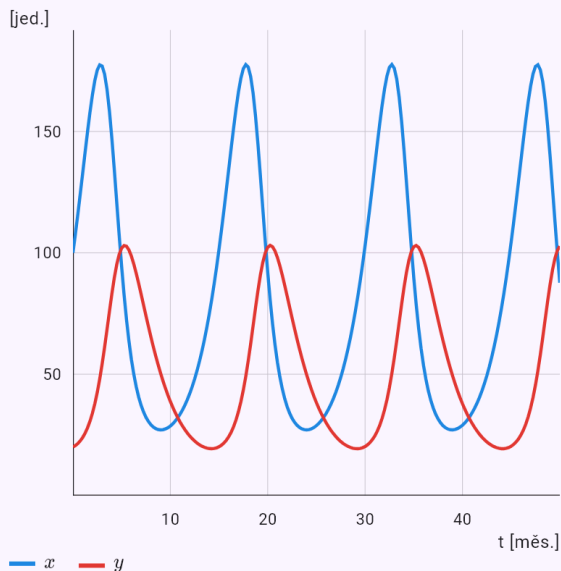
- Soustavu nelze vyřešit v elementárních funkcích – řešíme ji numericky metodou Runge–Kutta 4. řádu s krokem 0,0125 na intervalu $(0; 50)$

- Z numerického řešení: $T \approx 14,95 \text{ měs.}$

Graf

Průběh v čase

Fázová rovina



Veličiny modelu v čase vypočtené z řešení rovnice; vyznačená je odpověď.

Připravujeme

Na těchto typech úloh pracujeme nebo je máme v plánu. Pořadí se může měnit podle toho, co budete nejvíc potřebovat.

Rovnice a nerovnice

- Neúplné kvadratické rovnice vytknutím nebo odmocněním ($x^2 = 9$) místo diskriminantu.

Funkce, derivace a integrály

- Aplikace integrálu s parametry – obecné vzorce (koule o poloměru r , elipsa, kužel).
- Vybarvená plocha a 3D těleso u křivek zadaných parametricky a v polárních souřadnicích.
- Fyzikální aplikace derivací a integrálů (rychlost, zrychlení, práce, těžiště).
- Komplexní tvar Fourierovy řady a spektrum.
- Riemannův a Lebesgueův integrál u speciálních funkcí (Dirichletova, Riemannova funkce).

Diferenciální rovnice

- Soustavy diferenciálních rovnic zadané rovnicemi (v aplikacích už jsou) a jejich fázový portrét.
- Laplaceova transformace s Heavisideovou funkcí, posunutím a periodickými pravými stranami.

Další oblasti

- Vektory – velikost, skalární, vektorový a smíšený součin, odchylky, obsahy a objemy.
- Matice – operace, determinant, hodnost, inverzní matice, vlastní čísla a vektory.
- Konstrukční úlohy – trojúhelníky, čtyřúhelníky a kružnice ze zadaných prvků, postup konstrukce a diskuse počtu řešení.
- Komplexní čísla v goniometrickém a exponenciálním tvaru, Moivreova věta, n -té odmocniny.
- Cramerovo pravidlo u soustav lineárních rovnic.
- Funkce více proměnných, vícerozměrné, křivkové a plošné integrály.
- Přesný a numerický režim výsledků (desetinná čísla místo zlomků a odmocnin).
- Slovní úlohy – sestavení rovnic ze zadání a jejich řešení.